¿A DÓNDE VA LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA PRUEBA?

PATRICIO G. HERBST[1]
THE UNIVERSITY OF MICHIGAN, ANN ARBOR

La traducción de la tesis de Nicolás Balacheff al castellano es un hecho que debe celebrarse, particularmente por lo que esta obra significa para quienes nos interesamos en investigar la problemática de la validación de los conocimientos matemáticos en la clase. Como resulta evidente de la lectura del libro, el trabajo reconoce tres filiaciones intelectuales importantes. Hay una filiación epistemológica con las obras de Imre Lakatos (1976, 1978), de quien Balacheff obtiene la noción fundamental de que pruebas y refutaciones están necesariamente ligadas a las concepciones de los objetos matemáticos —las pruebas sirven a la construcción de objetos matemáticos (véanse también Balacheff, 1991a y Balacheff, en preparación) y por lo tanto son irreducibles a la lógica formal. Hay una filiación antropológica con la obra de Pierre Bourdieu (1990), que le permite a Balacheff establecer una relación fundamental entre la prueba y las prácticas matemáticas de los alumnos —las pruebas se adaptan a las necesidades de gestión de los objetos matemáticos dentro de una cierta práctica de los conocimientos (o una racionalidad). Y fundamentalmente, hay una filiación didáctica con la obra de Guy Brousseau (1997) de quien Balacheff toma la noción de *situación de validación* como modelo para pensar en situaciones donde la producción de pruebas y refutaciones constituya el sentido de la demostración matemática (que se vuelve la solución óptima a un problema de producir una prueba).

I. RELACIONES ENTRE PRUEBA Y DEMOSTRACIÓN

Vale la pena citar nuevamente las definiciones de *prueba* y *demostración* propuestas por Balacheff (véase también Balacheff, 1987),

> El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad. Esta posi-

1. Agradezco los comentarios de Humberto Alagia, Nicolás Balacheff, y Pedro Gómez a una versión preliminar de este documento.

> ción no es definitiva; con el tiempo puede evolucionar [...]. Por otro lado, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra. [...] El tipo de prueba dominante en matemáticas tiene una forma particular. Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. De aquí en adelante llamaremos *demostración* a estas pruebas. (pp. 12-13)

Es posible dar una lectura jerárquica a esas definiciones (la *demostración* es un estadio más desarrollado que la *prueba*) o inclusiva (la *demostración* es un tipo de *prueba*). Sin embargo, me parece importante recalcar que la *demostración* y la *prueba* están además en relación dialéctica en línea con la distinción, clásica en la didáctica francesa, entre *saber* y *conocimiento*: Una explicación —un cierto discurso de validación— puede tener en un momento dado el estatus cultural de demostración o no, sus condiciones de producción pueden darle o no el significado de prueba. Leyendo entre líneas (pues el texto ciertamente da una impresión distinta), yo diría entonces que la noción de *demostración* que nos ha legado Balacheff no necesariamente abreva en la imagen formalista o logicista, sino que refiere a la organización de los saberes matemáticos de los que dispone el observador (o el docente). Pero más importante que lo que las palabras significan por sí solas, lo importante es la relación, la distinción, que Balacheff establece entre esas palabras, *prueba* y *demostración*, como conceptos de la didáctica —es importante no perder de vista esa distinción.

Tal distinción ha sido crucial para plantear una nueva problemática para la investigación de las condiciones de existencia de la demostración en las matemáticas escolares. En efecto, esta problemática didáctica se diferencia de la problemática epistemológica clásica en educación matemática, cuyo exponente más visible es Gila Hanna (Hanna, 1983, 1989, 1991, 1995 y Hanna y Jahnke, 1996), que se dedica a analizar el funcionamiento de la demostración en las prácticas de los matemáticos y a utilizar sus conclusiones para elaborar recomendaciones sobre el funcionamiento de la demostración en la escuela. La problemática didáctica, en contraste, se plantea el problema de conocer cuáles son las condiciones de posibilidad para que el aprendizaje de la demostración en la escuela se acompañe de la construcción de la prueba como significado de la demostración. La tesis de Balacheff, en particular, la distinción entre prueba y demostración, ha hecho posible el desarrollo de esta problemática didáctica.

Los tipos de prueba estudiados por Balacheff (el *empirismo ingenuo*, la *experiencia crucial*, el *ejemplo genérico*, la *experiencia mental*) deben leerse en el contexto de las filiaciones con los trabajos de Brousseau, Bourdieu, y Lakatos, y como candidatos a la constitución del significado de la demostración. Son el producto de una teorización sobre la prueba en la clase, donde el comportamiento de los alumnos es el dato empírico pero no el objeto de estudio. Es una teorización que busca los orígenes cognitivos de la demostración pero que, sin embargo, entiende lo cognitivo no tanto en relación a la cognición individual sino más bien en relación a las prácticas humanas asociadas con el funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la clase. En tal sentido la diferencia con los trabajos de Guershon Harel (Harel y Sowder, 1998; Martin y Harel, 1989; Sowder y Harel, 1998), orientados hacia la prueba como instrumento de la cognición individual, no podría ser más marcada. Los trabajos de Harel se mantienen dentro de una problemática de la psicología aplicada: atribuyen las respuestas de los alumnos al funcionamiento de esquemas generales de la cognición cuya diferenciación se proponen comprender. El trabajo de Balacheff, por el contrario, propone como objeto de estudio la microgénesis de la prueba en el contexto de situaciones que son propias de un objeto de conocimiento y que son creadas para estudiar la constitución del sentido de la demostración.

Este trabajo de Nicolás Balacheff, parte de su *Thèse d'Etat*, fue publicado en 1986 y, como he ilustrado, ha sido crucial para plantear una problemática didáctica sobre la demostración. Es decir, esta tesis ha proporcionado una propuesta alternativa a la reducción psicológica o lógica del aprendizaje de la demostración.

II. La validación y el papel del docente

Desde 1986 hasta ahora muchos trabajos han hecho uso de la tesis de Balacheff para hacer progresar la investigación sobre el aprendizaje de la demostración. Por otra parte, las cuestiones relativas al papel del docente en la gestión de los conocimientos se han vuelto un tema central de trabajo a ambos lados del Atlántico (Ball, 1993; Lampert, 1990; Margolinas, 1992). Comprender aquella gestión en relación al problema de la validación de los conocimientos en la clase se ha vuelto un tema prioritario sobre el cual el trabajo de Balacheff nos ayuda a pensar (Arsac, Balacheff y Mante, 1992; Ball y Bass, 2000; Herbst, en preparación; Margolinas, 1993).

Concentro el resto de mi comentario en un momento en el que la conclusión del libro sugiere que la argumentación es un posible obstáculo epistemológico de origen didáctico (véase también Balacheff, 1991b). Balacheff nos dice,

> […] en ciertos casos la interacción social se pudo constituir en un obstáculo cuando los alumnos, como consecuencia de <u>su compromiso como personas</u>, o de su incapacidad de <u>coordinar sus puntos de vista</u>, no lograron superar el <u>conflicto</u>. Estas interacciones pudieron favorecer especialmente el empirismo ingenuo o justificar el recurso a la experiencia crucial como medio de obtener la adhesión del compañero en detrimento de la utilización de medios de prueba de un ni-

> vel más elevado y que se encontraban disponibles. [...] el objeto de la argumentación es el de obtener la adhesión del interlocutor al buen fundamento de lo que se sostiene. Esto no genera ningún problema con respecto a su verdad. La argumentación como acto social se caracteriza por el carácter abierto de los medios a los que recurre: "mientras que la demostración, en su forma más perfecta, es una sucesión de estructuras y de formas en las que no se puede cambiar su desarrollo, la argumentación tiene un carácter no restrictivo. Ella le permite al autor la duda, la libertad de elección. Inclusive cuando ella propone soluciones racionales, ella no tiene seguridad absoluta" (Perelman, 1970, p.41). (p. 179, el subrayado es mío).

La cita presenta elementos fundamentales para estudiar el problema del docente[2]. Por una parte se ha visto que la devolución de una situación de prueba se hace posible mediante el establecimiento de ciertas reglas de interacción social (convencer, llegar a un acuerdo con el compañero). Por otra parte se ha observado que a la vez que la interacción social requiere el común acuerdo de los participantes, el hecho de que la necesidad de la interacción social ha sido impuesta por el docente puede legitimar que aquel acuerdo se consiga a toda costa: lo que era una posible condición necesaria para construir una prueba se puede volver una condición suficiente para dejar de lado el trabajo de encontrar la mejor prueba posible y en su lugar aceptar la mínima prueba disponible en la que haya un acuerdo. Aquellas reglas de interacción, si bien importantes para la devolución de una situación de prueba pueden por tanto mantener la noción de prueba dentro de un dominio limitado, o volverse obstáculos para el aprendizaje de la demostración. Hasta allí el argumento de Balacheff.

El problema del papel del docente puede formularse, en este contexto, como el problema de comprender *la situación del docente* enfrentado a la ambigüedad de una situación de prueba: la situación como posible portadora del significado de la demostración, pero también la situación como posible sustituto de la prueba. Uno puede imaginarse algunas escenas posibles en las que tal ambigüedad se pone de manifiesto: el docente rompe el contrato didáctico al sugerir qué tipo de acuerdo deberían preferir los participantes (cuáles argumentos son retóricos o cuáles son los argumentos matemáticos disponibles). Puede ocurrir que la situación se actúe, pero que pierda su significado como situación de prueba.

Tal comportamiento por parte del docente no es sencillamente una falla logística en la implementación del contrato experimental. Es decir, no se trata de que la situación no funcionó como debía porque el docente no hizo lo que tenía que hacer. Una situación experimental no solamente crea un contexto para observar el funcionamiento de ciertos conocimientos, también produce una perturbación de las condiciones normales de trabajo (en parti-

2. Véase otras posibilidades relacionadas con la argumentación en Chazan y Ball (1999).

cular del docente) y permite así la observación de ciertos fenómenos (Herbst, 1999). Comprender el papel del docente requiere buscar los elementos teóricos que permitan pensar a tales hechos como respuestas más o menos adaptadas a las perturbaciones experimentadas por el funcionamiento de la situación. Este "axioma" del trabajo teórico no es específico de la prueba pero permite pensar la situación del docente enfrentado a la ambigüedad de una situación de prueba.

Cuando el interés del observador se centra en el trabajo del alumno (como en el trabajo de Balacheff), el papel del docente es el de gestionar el contrato didáctico para que la situación de prueba funcione como tal. Cuando el interés del observador se centra en el trabajo del docente, hay aspectos más generales de la relación didáctica, previos y posteriores a una situación de prueba que deben considerarse, por cuanto ellos regulan —hacen posible y limitan— aquel trabajo de gestión[3]. Una situación de prueba ocupa un lugar en el tiempo de la clase, y establece relaciones espontáneas con otros elementos del curso de estudios: el docente es responsable de darle un significado, de reconstruir aquellas relaciones (independientemente del significado que la situación por sí misma produzca).

Por ejemplo, el curso avanzado de geometría en noveno grado de la escolaridad estadounidense incluye el que los estudiantes hagan demostraciones; uno de mis alumnos (de pregrado universitario) apuntó, sin embargo, "nosotros hacíamos demostraciones en la escuela, pero nunca demostrábamos nada"[4]. En efecto, que las pruebas hechas por los alumnos ocupen un lugar accesorio en relación a los saberes estudiados (en particular, que las pruebas o los resultados probados por los alumnos jamás sean usados como referencia en lo que sigue del curso, tal como ocurre en los Estados Unidos[5]) parece ser la manera como el sistema enseñante concilia el imperativo de que los estudiantes demuestren con la posibilidad de que los estudiantes no puedan demostrar[6]. Por otra parte, el trabajo de Paolo Boero (Boero et al., 1996) con el contexto experiencial de la proyección de sombras nos deja ver

3. Claire Margolinas (1995) ha proporcionado elementos teóricos que permiten analizar esto.
4. La expresión en inglés es "We did proofs in school but we never proved anything." Interrogado sobre qué es lo que quería decir con tal comentario, aparentemente contradictorio, este alumno agregó que por ejemplo se les requería demostrar que dos triángulos dados eran congruentes pero que jamás se les requirió demostrar la validez de alguno de los criterios de congruencia de triángulos.
5. El divorcio señalado por Alan Schoenfeld (1988) entre problemas que requieren una demostración y problemas que requieren una construcción en el curso de geometría es sintomático del aislamiento de los problemas de prueba con respecto al resto de los conocimientos en juego. Daniel Chazan (1993) documenta asimismo que estudiantes que juzgan una prueba correcta y completa aún consideran que aquélla solamente es válida para el caso particular de los objetos dados en el diagrama adjunto.
6. Los alumnos realizan ejercicios de demostración, pero lo que funciona como prueba para controlar la validez de los conocimientos bien puede ser otra cosa, por ejemplo la percepción de la figura (véase Herbst, 1998).

otra posibilidad: que las pruebas hechas por los alumnos estén íntegramente ligadas al manejo de los objetos "matemáticos" dentro de cierto contexto, y que por lo tanto su eficiencia dependa de que existan como pruebas fundamentalmente dentro de tal contexto. Se crea así una subcultura de teoremas alrededor de objetos pseudo-matemáticos pero se presenta el problema docente de encuadrar tal subcultura dentro de la cultura en sentido amplio (el curso de estudios): por ejemplo, el docente debe buscar maneras de "reescribir" aquellas pruebas contextuales para que sean válidas en otros contextos. Ambos ejemplos, el de la demostración en Estados Unidos y el de los experimentos de Boero, ilustran el mismo problema: independientemente del buen funcionamiento de una situación de prueba, la inserción de tal situación en el tiempo de la clase no es solamente un acto administrativo. Nos debemos preguntar, ¿de qué recursos dispone el docente para gestionar esta inserción? Esto me conduce nuevamente al uso de la argumentación en la enseñanza.

La noción de que el conflicto socio-cognitivo y la argumentación permiten construir situaciones de prueba que den significado a la demostración es importante de explorar desde el punto de vista del docente. Promover una confrontación de puntos de vista entre los alumnos, estimularlos a encontrar un discurso que los convenza mantiene abiertos los medios para llegar a un acuerdo. El hecho de que los alumnos puedan llegar a un acuerdo a pesar de no haber encontrado la mejor prueba posible (a veces mediante un mero juego social) todavía deja al docente la oportunidad de convertir la experiencia vivida en una oportunidad de aprendizaje (si bien lo que se aprende puede no tener mucho que ver con lo que estaba en juego). Así, por ejemplo una discusión que termina por acordar en una prueba de menor valor que lo disponible todavía puede ser usada por el docente como análogo social de cómo funciona la demostración dentro de la comunidad de los matemáticos, tal vez no como significado de la demostración lograda pero sí como emblema de la demostración buscada. En contraste con aquella posibilidad, circunscribir explícitamente los medios disponibles para llegar a un acuerdo, por ejemplo alienando el funcionamiento social o argumentativo, hace que la existencia de una prueba matemática sea dependiente de que la situación de prueba funcione bien (lo cual es, de cierta manera, contingente). Esto requiere que en el peor de los casos (si la situación de prueba no funciona bien), el docente deba negociar explícitamente las condiciones para que la clase acepte el fracaso de la situación. Así, si no se ha producido una prueba, el docente se ve obligado a indicar qué deberían haber hecho los alumnos para producir una prueba: la situación deviene una especie de trampa puesta para que los alumnos caigan en ella y el significado de la situación está en cómo salir de la trampa —las razones por las que la trampa se puso en el camino no siempre están a la vista.

Una cosa está clara de ambas posibilidades, el tiempo que la clase y, en particular, el docente, ha dedicado a la gestión de la situación de prueba debe ser interpretado e incorporado dentro de la historia cognitiva de la clase. Las dos posibilidades sugeridas en el párrafo anterior representan casos extremos donde tal interpretación o bien da un sentido totalmente distinto del que la situación tenía o bien convierte la situación misma en un objeto de estudio. Preguntas que vale la pena plantearse son, entonces,

- ¿Cuáles son los elementos de los que dispone el docente para elegir situaciones de prueba que mantendrán esos extremos a cierta distancia?
- ¿Cuáles son los elementos de esas situaciones que le permitirán al docente sacar el mejor partido de su presente (en relación con el antes y el después)?

Por una parte, comparto con Balacheff que la *argumentación* puede ser un obstáculo cognitivo para la *prueba* [7]. Por otra parte, sugiero que hacer uso de tal ambigüedad parece ser conveniente para la enseñanza, y no sólo porque la argumentación es una fuente de heurísticas para generar situaciones que puedan ser condiciones necesarias para a la demostración[8]. Sino además porque la misma apertura de medios que caracteriza a la argumentación puede ser usada por el docente para 'hacerse el alumno,' mostrándoles en los hechos que lo que no se les ocurrió pensar bien podría habérseles ocurrido, construyendo la búsqueda de una prueba posible[9].

Las situaciones de validación surgen en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau como un modelo didáctico para estudiar la construcción del significado de una teoría matemática. La prueba y la refutación son los elementos que movilizan el proceso dialéctico de construcción de una teoría. La sucesión de pruebas y refutaciones le dan sentido a una demostración dentro del contexto de la producción de una teoría. Desde la posición del docente la construcción de una teoría matemática es una elección que tiene un costo y un riesgo. El uso de la argumentación, con sus reglas abiertas, es un ejemplo de como el docente mantiene abiertas sus posibilidades de que la inversión del tiempo de la clase en una situación de prueba produzca resultados que puedan integrarse a la historia cognitiva de la clase. Una manera de contestar la pregunta de adónde va la prueba, para el caso de la investigación sobre el papel del docente, es decir que la investigación se dirige a comprender en qué condiciones puede el docente proponer, gestionar, mantener, e incorporar a la historia de la clase un proyecto teórico —la construcción de una teoría matemática— que contenga a la demostración y a su significado.

7. Raymond Duval (1991, 1992) ha explicado bien la distinción conceptual entre argumentación y demostración.
8. Véase el trabajo de Boero citado anteriormente y también el de Mariotti et al. (1997).
9. Véase en Schoenfeld (1994) algunas características del trabajo del docente 'haciéndose el alumno' en un curso de resolución de problemas.

III. REFERENCIAS

Arsac, G., Balacheff, N. y Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 5-29.

Ball, D. y Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. En D. Phillips (Ed.), *Constructivism in education: Yearbook of the National Society for the Study of Education*. Chicago: University of Chicago Press.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Balacheff, N. (1991a). Construction et analyse d'une situation didactique: Le cas de "la somme des angles d'un triangle." *Journal fur Matematikkdidaktikk, 12*, 199-264.

Balacheff, N. (1991b). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen, y J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (en preparación). *Meaning: a property of the learner-milieu system*.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal, 93,* 373-397.

Boero, P. et al. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Volume 2* (pp. 113-120). Universidad de Valencia, España.

Bourdieu, P. (1990). *The logic of practice*. Stanford: Stanford University Press.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathematiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, y V. Warfield, Eds.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 359-387.

Chazan, D. y Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics, 19* (2), 2-10.

Duval, R. (1991). Structure du raissonnement deductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics, 22,* 233-261.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit x, 31*, 37-61.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE.

Hanna, G. (1991). "Mathematical proof". En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9* (1), 20-23.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15* (3), 42-49.

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schonfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*. (Issues in Mathematics Education, Volume 7, pp. 234-282), American Mathematical Society.

Herbst, P. (1998). What works as proof in the mathematics class. (Tesis doctoral) *Dissertation Abstracts International 59*, 10A. (University of Georgia, Athens Microfilms No. 3764).

Herbst, P. (1999). On devolving a voice to the participants of the mathematics classroom culture: a methodological critique. *Educational Review, 51*, 183-190.

Herbst, P. (Manuscrito en preparación). *Giving diagrams and getting students to prove: The role of the teacher.*

Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1978). A rennnaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. En I. Lakatos, *Mathematics, science, and espistemology. Volume 2*, Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational. Research Journal, 27*, 29-63.

Margolinas, C. (1992). Elements pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 113- 158.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathematiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. En C. Margolinas (Ed.), *Les debats en didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garutti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. En E. Pekhonen (Ed.), *Procedings of the 21st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Volume 1* (pp. 180-195). Helsinki: University of Helsinki.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (1), 41-51.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist, 23* (2), 145-166).

Schoenfeld, A.(1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.53-70). Erlbaum.

Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91* (8), 670-675.

Patricio G. Herbst
The University of Michigan, Ann Arbor
Dirección postal: 4204E School of Education
610 East University Avenue, Ann Arbor, MI 48109-1259
USA
E-mail: pgherbst@umich.edu.