Intervención del modelo intuitivo MADA en contextos de resolución de problemas. Aportes para la reflexión curricular

Oscar Iván Santafé
e-mail: s_oscar024@yahoo.es
Estudiante Maestría en Docencia de la Matemática
Universidad Pedagógica Nacional
Jairo Alonso Triana Yaya
e-mail: jaty5051@yahoo.es
Estudiante Especialización en Educación Matemática
Universidad Distrital

Introducción

Dentro de las investigaciones acerca de los modelos mentales que están detrás de las estrategias que los estudiantes ponen en juego a la hora de resolver problemas de tipo multiplicativo, se ha reportado una dificultad sobre la capacidad de predicción de los estudiantes cuando los problemas incluyen números decimales (Confrey, 1994). El estudio de esta dificultad se ha llevado más a profundidad en los trabajos de Bell, Fischbein y Greer (1984), en los que se determinó que tras esa dificultad existe un modelo intuitivo para la multiplicación y la división que ha sido denominado MADA (multiplicación agranda y división achica). En lo sucesivo se hará referencia al modelo intuitivo MADA, usando únicamente las siglas MADA.

Desde esta perspectiva se han elaborado numerosos estudios Bell, Fischbein & Greer (1984), Confrey (1994), Fischbein, Deri, Nello & Marino (1985), Gershon Harel, Merlyn Behr, Thomas Post, Richard Lesh (1994), Mora Luís Oriol & Romero Jaime (2004), MESCUD (2005-2007) sobre la intervención de dicho modelo cuando estudiantes de básica, media, estudiantes para profesor y profesores en ejercicio se enfrentan a problemas con restricciones de tiempo para su solución, los cuales se constituyeron en los antecedentes de investigación para el trabajo que reportamos. A continuación centraremos la mirada en los hallazgos encontrados en la investigación, en donde se amplia el campo de accion MADA al identificar su intervención en el desarrollo de la clase de matemática del movimiento I, desarrollada bajo la resolución de problemas, la cual fue observada durante 40 horas. Para la presentación de dicho trabajo haremos referencia a los objetivos, metodología y marco de referencia finalizando con los principales resultados y haciendo una breve descripción de cómo dicho trabajo generó nuevas preguntas de investigación sobre las cuales se esta indagando actualmente.

Sobre el problema de los modelos intuitivos asociados a la multiplicación

El constructo conceptual de los modelos intuitivos no se reduce a determinar de si los estudiantes utilizan o no cierto modelo para resolver un problema, este estudio va más allá, pues la forma en que el docente gestiona la clase (el tipo de las actividades que propone, las maneras de participación que genera, las formas en presenta y articula los conocimientos matemáticos, entre otros) determina en parte los modelos que los estudiantes construyen, pues este tipo de acciones, van generando imágenes mentales en los estudiantes sobre dicho topico, imágenes que en un primer momento ayudan al estudiante en su comprensión, pero que con el tiempo y la validez otorgada por las practicas educativas se van cerrando y se hacen resistentes a los estimulos del medio generando, con el tiempo, dificultades en la ampliación de las ideas inciales (D´Amore, 2006). Dicho de este modo el problema de los modelos intuitivos es un problema que se debe atacar desde nuestra mirada como docentes y buscar nuevas formas de introducir los contenidos o mejorar las existentes para que las imágenes mentales no se cierren y puedan ser modificadas para ampliar la comprensión y el conocimiento de un determinado tópico, en este caso la multiplicación.

De lo anterior se desligan tres rutas para trabajar, los cuales se interrelacionan y permiten presentar el estudio de los modelos intuitivos como una problemática relevante en el campo de la didáctica de las matemáticas. a) las formas en que interviene un modelo intuitivo asociado a la multiplicación cuando se resuelven problemas y la forma en que éste perdura, incluso en niveles altos de escolaridad, b) la existencia y construcción de nuevos modelos intuitivos asociados a la multiplicación que permitan relacionarse con los existentes y así ampliar la visión que se tiene multiplicación, relacionando ciertos objetos matemáticos que tienen como base a la multiplicación, y c) la generación de actividades que busquen generar barreras para bloquear la acción de MADA y construir modelos mucho más flexibles que permitan abarcar diferentes situaciones que siendo multiplicativas no se contemplan. Cada una de estas tres rutas deberá generar elementos que impacten la construcción y el desarrollo del currículo de matemáticas. Este primer informe se ocupa de la primera ruta e inicia la via para la segunda pretendiendo responder a los siguientes objetivos

Objetivo General

Identificar y describir intervenciones del modelo intuitivo MADA en el análisis que realizan estudiantes para profesor de LEBEM a problemas multiplicativos de tipo geométrico variacional.

Objetivos Específicos

Establecer conexiones entre los procedimientos que ponen en juego los estudiantes al resolver problemas multiplicativos de tipo geométrico variacional y el modelo intuitivo MADA.

Establecer la existencia o no de formas diferentes a las establecidas en estudios anteriores, en las que se podría manifestar el modelo intuitivo MADA.

Establecer relaciones entre las situaciones problema y el modelo intuitivo MADA por medio de la descripción de la estructura matemática de las situaciones, la presentación que se hace de éstas y la forma en que se desarrollan.

Marco teórico de referencia, ¿Qué es un modelo intuitivo y cuál es su relación con el currículo?

Comencemos diciendo que: "las intuiciones son muy resistentes al cambio. La razón principal es que las intuiciones están relacionadas con sistemas bien estructurados de nuestra actividad cognoscitiva-conductual adaptativa" (Fischbein, 1999), dichos sistemas han sido denominados esquemas estructurales, "dispositivos conductuales-mentales que hacen posible la asimilación y la interpretación de la información y las reacciones adecuadas a varios estímulos" (Fischbein, 1999). Una evidencia de la presencia de este tipo de intuiciones para el caso de la multiplicación se puede hallar en Fischbein et. al (1985) reportado por Harel et. al (1994) para quienes “el modelo asociado con problemas de multiplicación es la adición repetida” y en el caso de la división existen dos modelos: el de división partitiva y el de división cuotitiva. Los tres modelos anteriores son operativos y eficaces solamente en el conjunto de los números naturales. En consecuencia, cuando un sujeto se enfrenta a problemas en donde dicha noción no es cierta, él tiende a cambiar las condiciones del problema, por ejemplo: cambiar la operación que se debe realizar, cambiar dividendo por divisor, o cambiar los números a operar; todo ello para poder trabajar con intuiciones que son más aceptadas para él y que preservan sus ideas previas sobre multiplicación y división

Atendiendo a lo anterior, se podría caracterizar un modelo intuitivo como una noción de una operación o de un procedimiento que, intuitivamente, se acepta como válido en el momento en que se soluciona una situación o se hace razonamientos en pro de una respuesta; dicha noción puede no estar de acuerdo con la situación planteada, lo cual hace que el sujeto cambie inconscientemente algunas de las condiciones de la situación por otras que son aceptadas y familiares para él. El modelo intuitivo es más fuerte que una intuición porque se genera como un sistema autónomo, cerrado y con gran oposición a la inclusión de nuevos elementos al mismo.

Ahora bien, es de resaltar en forma en la que se construyen las intuiciones el aspecto referido a la experiencia personal del que se deriva que las intuiciones “no son absolutas, dependen del contexto…” (Fischbein, 1999), y como consecuencia de la experiencia prolongada en contextos similares, se llega a “…generar intuiciones no solo mediante generación de patrones de reacciones sino también generando sistemas organizados de creencias aparentemente autónomos” (Fischbein, 1987) en (Mora & Romero, 2004), es decir se generan modelos intuitivos. Especificamente MADA se construye debido al tratamiento curricular que se hace de la multiplicación como una suma reiterada, es decir, al contexto del cual se toman los problemas, la similaridad en relación a su estructura semántica y matemática, la presentación que se realiza de éstos, y las formas de solución que se proponen. Estos hechos provocan una diferenciación entre los actores de la multiplicación, de modo que uno de los factores es el multiplicando y el otro es el multiplicador. Dicha diferenciación genera una comprensión de la multiplicación que aunque es compatible en Z+ no lo es en Q o R.

Metodología y Análisis de datos

La investigación estuvo enmarcada dentro del paradigma de la investigación cualitativa, específicamente el estudio fue de tipo exploratorio-descriptivo, pues buscaba destacar aspectos fundamentales de la intervención del modelo y así aportar conocimientos para la realización de un estudio posterior en el cual se haga énfasis en las rutas dos y tres presentados en la descripción del problema.

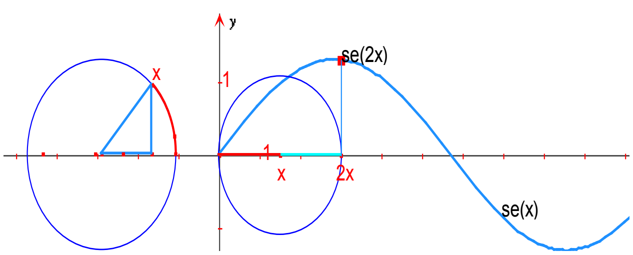
El principal método de indagación fue la observación de tipo no participante en un sistema abierto descriptivo teniendo como categorías para la observación y el análisis las reglas que impone MADA. Para realizar la observación se hizo uso de los siguientes instrumentos: cuaderno de notas, trabajos de los estudiantes, grabaciones magnetofónicas de algunas sesiones de clase y una entrevista realizada al profesor.

Los datos recolectados se agruparon atendiendo a cada una de las tareas que propuso el profesor en la clase, la acción realizada fue: tomar momentos de las grabaciones y del cuaderno de notas en donde los estudiantes daban respuestas a los problemas planteados, o donde ellos buscaban argumentar y/o comunicar una solución a alguno de los problemas planteados y por medio de los teoremas en actos y conceptos en acto (Vergnaud, 1990) que están detrás de las explicaciones que realizan los estudiantes, determinar si se presentan las reglas que impone MADA y con las cuales se asume que dicho modelo se manifiesta. Otro momento de la investigación estuvo enmarcado en el análisis a dos cuestionarios, propuestos por el profesor a cargo, en los cuales se evidencio la intervención del modelo como mostraremos más adelante.

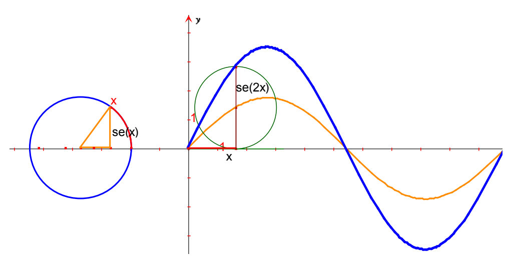
Como ejemplo presentamos una parte de una clase en la cual se discute sobre la construcción de la gráfica de la función se(2x), en dicha sesión de clase los estudiantes dan razones y explicaciones de cómo debería ser la gráfica, y en dichas explicaciones se hace evidente el uso de MADA. En lo sucesivo se usará la letra P para designar las intervenciones del profesor y E para las de los estudiantes.

El profesor enuncia el procedimiento que se tiene para construir se*(x)* (función circular análoga a sen*(x)* con un radio arbitrario) y pregunta *¿Cómo construiríamos se(2x)?, ¿cómo realizamos dicha gráfica?,* les pide a los estudiantes que *"anticipen una imagen de* se*"* y pregunta: ¿para hacer se qué tengo que hacer?, (E) *"duplicar x"* (P): *¿cómo podemos hacerlo?* (E): *"con centro en x* [siendo x la longitud del arco pasada al plano cartesiano] *y distancia x, donde se corta la circunferencia con el eje x tengo , ahora con perpendicular al eje x por el punto que corresponde* [donde se corta la perpendicular con se*(x)*] sería [ver gráfica 1]", con este procedimiento otro estudiante se pronuncia y genera la discusión, (E_1): "lo que yo pensé fue duplicar la longitud de $\boldsymbol{se}$ y no la longitud del arco" [ver gráfica 2] (E_2): "si hace lo anterior cambiaría la gráfica… y ese punto sería 2 se*(x)* " (E_3): *"si fuera lineal* se*(2x)=2* se*(x) … si se hace con 2x , se saldría del rango"* (E4): "*quién me asegura que la imagen de* se*(2x) es la intersección del lugar geométrico* se*(x)y la perpendicular al eje x que pasa por 2x "*

En la situación anterior, el profesor da tiempo para que los estudiantes reflexionen sobre las respuestas que van a dar. Inicialmente las respuestas dadas están encaminadas a duplicar alguna de las magnitudes involucradas en el problema. A continuación se presentan las gráficas que se realizaron en la clase.



Gráfica 1



Gráfica 2

Los teoremas en acto que se pueden expresar en la situación planteada como sigue: La gráfica de la función $f_3(x) = se$(2X) se obtiene duplicando x y haciendo corresponder 2x con su respectivo se(x) [ver gráfica 1], la gráfica de la función $f_3(x) = se$(2x) se obtiene duplicando se(x), es decir, se(2x)=2se(x), y por último si $f_3(x) =$ 2x y $f(x) = se$(x) entonces ($f_3 \circ f$)(x)=2 se(x). Los anteriores teoremas se basan en un hecho común: están influenciados por MADA mediante la regla "la multiplicación agranda", prueba de ello es que al proceder con esos teoremas en acto, las gráficas que se obtienen de $f_3(x) = se$(2X) evidencian un aumento con relación a la gráfica de f, ya sea en el periodo o en la amplitud de la función.

Al actuar con dichos modelos, los estudiantes, a pesar de tener conocimiento sobre composición y variación, no las consideren necesarias, y asumen que es suficiente para resolver la situación, con las ideas de multiplicación que poseen. De otro lado, debido al carácter extrapolativo de MADA, los estudiantes ponen en juego el conocimiento intuitivo que tienen de la multiplicación en un lugar donde dichas intuiciones no son correctas, pues el uso de la intuición “la multiplicación agranda”, los lleva a procedimientos no adecuados, como ya se mostró.

Otro aspecto que se abordó en la investigación, fue la aplicación de dos cuestionarios propuestos por el profesor, el primero busco indagar sobre la intervención de MADA cuando se opera con segmentos, sin hacer referencia a la medida de estos, y el segundo buscaba determinar cómo los estudiantes construían gráficas de funciones como senx2, conociendo los casos particulares de las mismas. En las respuestas que dan los estudiantes a ambos cuestionarios, se evidencia que los estudiantes hacen uso de MADA para operar segmentos y realizar las gráficas de las funciones. Este hecho nos permitió conjeturar que MADA actúa sin importar la naturaleza de los objetos que se están operando.

Principales resultados

Uno de los hallazgos más importantes, y que aporta al desarrollo del objeto teórico “modelo intuitivo MADA” es su intervención en el entorno de una clase de matemáticas con estudiantes para profesor en la cual, en oposición a los cuestionarios usados en anteriores investigaciones, el tiempo para analizar y solucionar problemas multiplicativos propuestos no está restringido a unos minutos y en donde los problemas abordados, para determinar si el modelo interviene, no son prototípicos, es decir, no son problemas de enunciado verbal, en donde se trabajan únicamente con números decimales y bajo los esquemas mostrados en la tabla 1. Es asi como se puede afirmar que el modelo interviene cuando se resuelven problemas y cuestionarios que necesitan para su solución multiplicación y/o división, y que involucran nuevos objetos a operar (magnitudes y funciones), y a otros aspectos tales como: la idea de variable, la composición de funciones, la construcción de gráficas (como conceptos figurales) y números reales, todos éstos involucrados a la hora de resolver las situaciones, pero también en muchas actividades matemáticas solicitadas a los estudiantes en cursos típicos de álgebra, precálculo y cálculo.

Los modelos intuitivos una construcción de carácter cultural ligada a las prácticas curriculares

Centrando la mirada en MADA, las imágenes que la escuela brinda a los estudiantes estan de acuerdo con una visión de la multiplicación como una suma repetida, este hecho se ve reforzado en los primeros años de la educación primaria pues el tipo de actividades que se presentan a los estudiantes se pueden enmarcar bajo los esquemas de acción:

Multiplicación	División
“si cada uno tiene… y hay tantos… entonces en total hay…” Ó en términos de veces, “si tiene… y el otro tiene tantas veces… entonces en total tiene… ”,	“si hay en total…y se reparten entre tantos…a cada uno corresponden…” En términos de medida “si hay en total…y se hacen grupos de a…el total de grupos es…”
Situaciones que llevan a asumir que el resultado debe ser mayor que los factores, es decir, la multiplicación agranda, pues la multiplicación parte de iteraciones iguales de una cantidad en términos de otra.	Se da como particiones iguales de una cantidad, de donde se desliga que la división debe ser más chica que los factores

El uso de los anteriores esquemas en las situaciones trabajadas en clase se ve reforzado por las carácteristicas de los libros de texto en los cuales sucede que:

> En los primeros años (2º y 3º) se presentan situaciones verbales, numéricas y gráficas de grupos iguales que se repiten, abordables desde situaciones de sumando repetido; sin embargo en los textos de grado 4º y 5º de primaria no se hace una reflexión sobre el sentido de la multiplicación a pesar de tratar suma y multiplicación de fracciones junto a problemas de proporcionalidad. (Mora & Romero 2004 p. 19)

Vemos de este modo que la construcción de MADA no es solo una cuestión aislada, atribuible a las interacciones de un grupo de docentes con unas determinadas poblaciones, sino que es un hecho que se construye de acuerdo con las condiciones aceptadas por grupos de educadores matemáticos que elaboran libros de texto y por ende está apoyada por el desarrollo del currículo que se presenta en nuestro país y que además interviene en los procesos de enseñanza y aprendizaje con una diversidad de conceptos asociados a las situaciones que se proponen como se mostró anteriormente, por ejemplo, el caso de la multiplicación geométrica.

Es así como el estudio de los modelos intuitivos abre un gran campo de acción de acuerdo con las tres rutas mencionadas anteriormente, y es por ello que continuamos trabajando en esta misma línea con las dos investigaciones que se describen a continuación y que darían luces sobre qué actuaciones deben ser modificadas o mejoradas a nivel curricular y didáctico para explotar las características de los modelos intuitivos en pro de la construcción de conceptos matemáticos.

Una de las investigaciones está enmarcada en la ruta dos y pretende determinar la existencia o no de otros modelos intuitivos asociados a la multiplicación diferentes a MADA y regla de tres, en situaciones que involucran funciones exponenciales y logarítmicas; proporcionando elementos teóricos que permitan comprender la multiplicación dentro de una estructura más compleja. La segunda investigación se encuentra en la ruta tres y pretende desarrollar las fases 1 y 2 de una ingeniería didáctica, obteniendo un conjunto de situaciones didácticas que permitan generar escenarios de investigación en los cuales se reflexione en torno al significado de la multiplicación en diferentes contextos.

Referencias bibliográficas:

- Bell, Fischbein & Greer (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effect of number size, problem structure and context. En Education Studies in Mathematics 15. Pág. 129-147.
- Confrey Jere (1994). Splitting,similarity, and rateo f change: anew approach to multiplication and exponential functions. Cap 8. En The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (Harel y Confrey, Eds) New York. State University of the New York. Pág. 291-330.
- D'Amore (2006). Didáctica de las Matemática. (Ángel Balderas Puga trad.) Cáp. 4 al 6 Magisterio Ed.
- Fischbein, Deri, Nello & Marino (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. En Journal for research in mathematics education. 16(1) Pág 3-17. Citado por Harel et al. 1994.
- Fischbein Efraim (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. Recuperado el 3 de marzo de 2007 en http://www.springerlink.com/content/x25r055kn26807j4/fulltext.pdf
- Gershon Harel, Merlyn Behr, Thomas Post, Richard Lesh (1994). The impact of the number type on the solutions of multiplication and division problems: further considerations. Cap 10. Jaime Romero Cruz Trad. En The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (Harel y Confrey, Eds) New York. State University of the New York. Pág. 363-384.
- Grupo MESCUD, (2007). La multiplicación como cambio de unidad: estrategias para promover

su aprendizaje. Impreso. Proyecto Curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Grupo MESCUD (2005). El pensamiento Multiplicativo: Una mirada de su Densidad y Complejidad en su desarrollo en el aula. Impreso. Proyecto Curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Mora Luís Oriol & Romero Jaime (2004). ¿Multiplicación y división "o" cambio de unidad? En Memorias sexto encuentro colombiano de matemática educativa. Gaia. Medellín. Pág. (13-20).
- Mora Luís Oriol, Romero Jaime, Bonilla Martha y Rojas Pedro (2006). Modelos MADA y Regla de tres: complementarios inconexos funcionales en la sua didáctica des matematiques. Pág. 210-213.
- Vergnaud G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. En Reserches en didactique des mathématiques. Vol. 10, nº 2. Pág.133-170. 1990. (traductor Díaz G. Juan) recuperado el día 2 de enero de 2007 en

  http://www.ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf