

Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales

Óscar Leonardo Pantano Mogollón

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá, Diciembre de 2014

Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales

Óscar Leonardo Pantano Mogollón

2013185027

**Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el título de
Magíster en Docencia de la Matemática**

Director

Rodolfo Vergel Causado

Doctor en Educación

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá, Diciembre de 2014

Dedicatoria

A mis padres y hermanos, quienes siempre me han brindado su apoyo, su amor y su comprensión y me han ofrecido lo que ellos nunca han tenido.

A Alejandra, por su constante amor, apoyo, sus palabras de aliento y motivación.

Agradecimientos

A Rodolfo Vergel, por su constante compromiso y orientación en mi proceso de formación en la maestría y especialmente por compartir su sabiduría y sus retos.

A los profesores de la Maestría, por sus infinitas enseñanzas, discusiones y reflexiones que contribuyeron a mi formación y al mejoramiento de mis prácticas educativas e investigativas.

A los niños y niñas de grado tercero, por su disposición, participación y deseo de hacer parte de esta investigación.

A Johanna Villanueva, por orientar e involucrar a los estudiantes en la investigación.

A Juan Carlos, por su constante apoyo y retroalimentación en la escritura de este documento.

A Carlos Diez, por sus enseñanzas y diferentes retos propuestos a lo largo de mi formación académica y profesional.

A Nidia, Eileen, Alberto y Fredy, por hacer que la maestría no solo fuera un espacio de formación de capacidades intelectuales sino también humanas.

A Indry, por su constante compañía en la culminación de esta etapa.

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

Resumen Analítico en Educación - RAE

}

| 1. Información General | |
|-----------------------------|---|
| Tipo de documento | Tesis de grado |
| Acceso al documento | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| Título del documento | MEDIOS SEMIÓTICOS Y PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE PRIMARIA AL RESOLVER TAREAS DE TIPO ADITIVO EN LOS NATURALES |
| Autor(es) | Pantano Mogollón, Óscar Leonardo |
| Director | Vergel Causado, Rodolfo |
| Publicación | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 94 p. |
| Unidad Patrocinante | Universidad Pedagógica Nacional |
| Palabras Claves | Medios semióticos de objetivación, Procesos de objetivación, Teoría Cultural de la Objetivación, Pensamiento aditivo, Vectores. |

| 2. Descripción |
|--|
| <p>Esta propuesta de investigación se enmarca en la perspectiva semiótica cultural de la educación matemática, sugiere revisar las formas de reflexión, acción y expresión asociadas a la manifestación, desarrollo y evolución del pensamiento aditivo de los estudiantes al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales. De este modo, se pretende poner en evidencia que los actos de conocer, conceptualizar y de pensar por parte de los estudiantes están fuertemente influenciados por modalidades sensoriales que emergen y se manifiestan a través del cuerpo, el movimiento, la actividad perceptual, la ritmicidad y el uso de signos y no, únicamente a través de las producciones que quedan consignadas en las hojas de trabajo, ni en sus actos discursivos. Para ello, se analizan desde una concepción multimodal del pensamiento matemático la actividad matemática y las producciones de un grupo de estudiantes de grado tercero de primaria.</p> |

3. Fuentes

Para la consolidación y realización de la investigación se utilizaron referencias bibliográficas. Algunas de las más relevantes son:

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 267-300.
- Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2013). Un origen matemático vs. dos orígenes fenomenológicos: la significación del movimiento de objetos respecto del punto (0, 0). *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 183-208.
- Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.
- Radford, L. (2008b). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96.
- Radford, L. (2010d). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2013b). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramírez y Y. Morales (Eds). *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo, República Dominicana, November 6-8, 2013. Plenary Lecture. .
- Radford, L. (2013c). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.
- Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C. Colombia.

4. Contenidos

La investigación se presenta en cinco capítulos. En el capítulo 1 se describe el campo o área problemática, los antecedentes del estudio, la delimitación del problema de investigación y los objetivos de ésta. En el capítulo 2 se expone la fundamentación teórica que sustenta y da coherencia al estudio. El diseño de la investigación se describe en el capítulo 3. En éste se presenta el enfoque de investigación utilizado en este estudio, como el ciclo que dirige éste. En el capítulo 4 se presenta el desarrollo de la investigación y el análisis multimodal tanto de las producciones como de la actividad matemática realizada por los estudiantes. En el capítulo 5 se presenta una discusión en relación con los vectores identificados en este estudio y algunos indicios relacionados con una posible tipología de formas de pensamiento aditivo. Para finalizar, en el capítulo 6 se expone los resultados de la investigación, de igual manera se hacen explícitas algunas consideraciones que se desprenden de la realización de esta investigación.

5. Metodología

El estudio se enmarca en un enfoque de investigación de tipo cualitativo, descriptivo e interpretativo (Ernest, 1991), puesto que, desde este enfoque se construye una rica descripción del problema didáctico bajo estudio, es decir, de las formas de acción, expresión y reflexión asociadas al desarrollo del pensamiento aditivo de los estudiantes de grado tercero al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales, utilizando como unidad de análisis la actividad matemática que desarrollan.

De este modo, para dirigir el proceso de investigación se toma como referencia el ciclo o enfoque inspirado en Radford (2010d). Sin embargo, en esta propuesta de investigación el enfoque difiere del original en el tercer y cuarto paso (en el enfoque propuesto por Radford el tercer paso consiste en la interpretación de los datos y el cuarto paso hace referencia a la generación de teoría). El ciclo está constituido por las siguientes fases: Fase 1. Diseño de las tareas. Fase 2. Implementación de las tareas. Fase 3. Recolección de los datos. Fase 4. Interpretación de los datos.

6. Conclusiones

A partir del proceso de elaboración de las tareas, su implementación y el análisis de datos, se logra concluir que:

En relación con la pregunta de investigación planteada: ¿Cuáles son los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de tercer grado de primaria y qué procesos de objetivación desarrollan cuando se enfrentan a tareas de tipo aditivo en los naturales? Se concluye que a partir de los diferentes análisis y las diversas producciones, se puede

afirmar que en la labor conjunta en el proceso de enseñanza y aprendizaje tanto los estudiantes como la profesora lucharon por comunicar sus intenciones y organizar sus acciones en el tiempo y en el espacio a través de la movilización de diferentes medios semióticos de objetivación.

Algunos de éstos que emergieron y que fue posible evidenciar son los siguientes: señalamientos con el lápiz, agrupamiento en el aire, señalamiento y registro escrito en el aire, ritmidad colectiva, complemento en el aire, secuencia numérica a través de leves golpes, entre otros. De igual manera, algunos de los procesos de objetivación que emergieron en la labor conjunta son los siguientes: contracción semiótica, iconicidad y el subproceso denominado orquestación icónica.

Además, a partir de los resultados obtenidos en este estudio se pone en evidencia la necesidad de investigar con mayor profundidad la evolución de los vectores que han sido identificado de manera no exhaustiva y que se considera caracterizan el desarrollo y evolución del pensamiento aditivo. Así mismo, las formas de pensamiento aditivo factual, contextual y simbólico asociados a cada uno de estos vectores, con el propósito de establecer una aproximación a una génesis del pensamiento aditivo que contribuya a la creación y consolidación de currículos, en los cuales se tome conciencia de los aspectos corpóreos que guían las formas de acción, reflexión y expresión al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales por parte de los estudiantes y el mismo profesor.

| | | | |
|--|----------------------------------|----|------|
| Elaborado por: | Pantano Mogollón, Óscar Leonardo | | |
| Revisado por: | Vergel Causado, Rodolfo | | |
| Fecha de elaboración del Resumen: | 3 | 12 | 2014 |

Tabla de contenido

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 1 |
| Capítulo 1 | 4 |
| 1.1 Campo o área problemática | 4 |
| 1.2 Antecedentes | 8 |
| 1.2.1 Sobre la Teoría Cultural de la Objetivación y algunos de sus intereses de investigación..... | 8 |
| 1.2.2 Sobre el pensamiento aditivo y la estructura aditiva | 11 |
| 1.3 Delimitación del problema..... | 13 |
| 1.4 Objetivos..... | 14 |
| 1.4.1 Objetivo general | 14 |
| 1.4.2 Objetivos específicos..... | 14 |
| Capítulo 2 | 15 |
| 2.1 Sobre el objetivo de la educación matemática desde la Teoría Cultural de la Objetivación | 15 |
| 2.2 Sobre los procesos de objetivación..... | 18 |
| 2.3 Medios semióticos de objetivación..... | 21 |
| 2.4 Sobre el pensamiento aditivo..... | 22 |
| Capítulo 3 | 25 |
| 3.1 Fase de pilotaje | 26 |
| 3.1.1 Emergencia de medios semióticos de objetivación | 28 |
| 3.1.2 Pertinencia y reformulación de las preguntas planteadas..... | 29 |
| 3.2 Diseño y justificación de las tareas | 30 |
| 3.3 Población, naturaleza de las sesiones de trabajo y proceso de recolección de la información..... | 36 |

| | |
|---|-----------|
| 3.4 Constitución de los datos y descripción del análisis | 38 |
| Capítulo 4 | 41 |
| Episodio 1. Tarea 1. Agrupación de unidades sueltas de ovejas en decenas..... | 41 |
| Episodio 2. Tarea 1. ¿9 decenas y 8 unidades o 8 decenas y 9 unidades?..... | 47 |
| Episodio 3. Tarea 2. Contando de diez en diez para llegar a ciento noventa. | 54 |
| Episodio 4. Tarea 2. Otras formas de acción para abordar y dar solución a la tarea..... | 61 |
| Episodio 5. Tarea 2. El tres es como el treinta pero más un cero..... | 66 |
| Capítulo 5 | 72 |
| 5.1 Sobre algunos vectores qué están en la base del pensamiento aditivo desde este estudio..... | 72 |
| 5.2 Sobre una posible tipología de formas de pensamiento aditivo | 77 |
| Capítulo 6 | 80 |
| 6.1 Respuesta a la pregunta de investigación | 80 |
| 6.2 Síntesis y observaciones finales | 88 |
| Referencias bibliográficas..... | 91 |
| Anexos..... | 95 |

Lista de figuras, diagramas y tablas

Figura 1. El fin de la educación en Radford (2014).

Figura 2. Diseño metodológico.

Figura 3. Tarea número 1 propuesta en la fase de pilotaje.

Figura 4. Tarea número 2 propuesta en la fase de pilotaje.

Figura 5. Coordinación multimodal de medios semióticos de objetivación movilizados por Jesús al agrupar en decenas el rebaño de ovejas.

Figura 6. Tarea 1. Agrupación en decenas del rebaño de ovejas.

Figura 7. Tarea 2. Agrupación del corral de cerdos en decenas.

Figura 8. Tarea 3. Billetes y monedas.

Figura 9. Tarea 4. El ahorro de Esteban.

Figura 10. Gesto utilizado por la profesora para llamar la atención de Samuel acerca de la forma sistemática como ha contado las ovejas.

Figura 11. Gesto realizado por Samuel Cabezas en el cual describe la trayectoria de una circunferencia para explicar la manera cómo se pueden agrupar en decenas las ovejas.

Figura 12. Gestos que acompañan las expresiones lingüísticas utilizadas por Samuel para explicar cómo se pueden agrupar las ovejas en decenas.

Figura 13. Producción de Samuel sobre el agrupamiento de las ovejas decenas

Figura 14. Gesto utilizado por Samuel para significar el valor posicional de cada una de las unidades de orden superior del número ochenta y nueve.

Figura 15. Secuencia de gestos realizados por Valentina para mostrar la secuencia de números escritos en la hoja de trabajo y el cardinal de ésta.

Figura 16. Señalamiento de cada una de las agrupaciones formadas en la hoja de trabajo.

Figura 17. Producción de Valentina sobre las agrupaciones formadas con decenas de números y su respectiva conclusión.

Figura 18. Gestos realizados por la profesora para llamar la atención de los estudiantes del grupo en relación con las formas de reflexión, expresión y acción utilizadas por Valentina para abordar la tarea.

Figura 19. Gestos movilizados por Samuel y la profesora en una labor conjunta.

Figura 20. Uso de los dedos de las manos para el conteo en decenas y el encerrar las manos para representar el cardinal de decenas añadidas.

Figura 21. Secuencia de gestos utilizados por Valentina para abordar el ítem seis de la tarea número dos.

Figura 22. Izquierda y medio, la profesora y Valentina señalan la hoja de trabajo. Derecha Valentina consigna en su hoja de trabajo algunos de los números inmediatamente consecutivos al número 36.

Figura 23. Parte superior, Samuel representa con sus dedos de la mano izquierda el número tres, luego representa el número treinta con los dedos de su mano derecha. Parte inferior Samuel desplaza su mano derecha en el aire desde su mano izquierda hacia la derecha de ésta.

Figura 24. Representación de siete decenas a través de los dedos de las manos, deslizamiento de las manos hacia adelante y hacia atrás.

Figura 25. Diversidad de maneras de realizar el conteo de las ovejas, evidenciadas en las hojas de trabajo de los estudiantes.

Figura 26. Utilización de los dedos para representar cada una de las decenas que pueden ser añadidas a determinada cantidad.

Figura 27. Producciones asociadas a la agrupación no posicional en decenas.

Figura 28. Gesto asociado a la agrupación posicional.

Tabla 1. Contraste entre las preguntas propuestas en la fase de pilotaje y las preguntas reformuladas para las tareas a implementar en el trabajo de campo.

Tabla 2. Ejemplo de la organización y sistematización de los datos.

Tabla 3. Tipología y caracterización de las formas de pensamiento aditivo.

Introducción

El propósito de esta investigación es identificar, describir y analizar los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes de tercer grado de primaria y los procesos de objetivación que emergen en la actividad matemática desarrollada por ellos en torno a tareas de tipo aditivo en los naturales. De este modo, se pretende realizar una aproximación tanto a la caracterización del desarrollo conceptual de los estudiantes como a la manifestación y evolución del desarrollo de su pensamiento aditivo.

Para sistematizar y dar respuesta al propósito planteado, este trabajo se ha dividido en cinco capítulos. En el primer capítulo se presenta inicialmente el campo o área problemática para contextualizar la perspectiva teoría en la cual se encuentra inmersa la investigación y más específicamente la teoría que será utilizada. A continuación, se abordan los antecedentes de este estudio, los cuales están asociados por una parte a la Teoría Cultural de la Objetivación y sus intereses de investigación y por otro lado a aspectos teóricos relacionados con la estructura aditiva.

A partir de la revisión de antecedentes se hace la delimitación del problema de investigación, de esta manera se expone la pregunta de investigación que hace referencia a: *¿Cuáles son los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes de tercer grado de primaria y qué procesos de objetivación desarrollan cuando se enfrentan a tareas de tipo aditivo en los naturales?* Con la intención de operativizar la pregunta de investigación finalmente se hacen explícitos los objetivos de la investigación.

El segundo capítulo está dedicado al desarrollo de la fundamentación teórica que sustenta y da coherencia al estudio. En este sentido, en la primera sección de este capítulo se desarrollan los planteamientos teóricos asociados a la finalidad de la educación matemática desde la Teoría Cultural de la Objetivación, intentando contextualizar una manera diferente de pensar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde una aproximación histórico-cultural.

En concordancia con esta finalidad de la educación, se exponen cuatro principios fundamentales, dos relacionados con la naturaleza ontológica y epistemológica y los otros dos relacionados con la finalidad de la educación matemática uno educativo y otro ético. En

esta misma sección se presenta la categoría de labor conjunta, categoría fundamental de la Teoría Cultural de la Objetivación que permite reconceptualizar la enseñanza y aprendizaje como una labor conjunta en la que se implican, se desarrollan y transforman constantemente tanto los estudiantes como el profesor, formando tanto sus capacidades intelectuales como humanas, aprendiendo a ser con otros, escuchando otras voces y otras conciencias.

En la segunda sección de este capítulo se exponen dos constructos teóricos que permiten describir y analizar tanto las formas de reflexión matemática como las formas de interacción y cooperación entre estudiantes y profesores. Formas que emergen en la labor conjunta. Estos dos constructos teóricos son los procesos de objetivación y los procesos de subjetivación. En esta dirección se exponen dos procesos de objetivación, uno denominado contracción semiótica y el otro iconicidad, procesos que permiten dar cuenta de las formas de acción, reflexión y expresión asociadas al desarrollo conceptual por parte de los estudiantes.

Estos constructos dan lugar a los medios semióticos de objetivación, puesto que sin éstos no se podría identificar la emergencia de los procesos de objetivación en la actividad matemática realizada por los estudiantes. En este sentido, en la tercera sección del capítulo dos, se describen la importancia de éstos en la manifestación y evolución del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y cómo éstos son utilizados para comunicar, hacer aparente y materializar sus intenciones.

Para finalizar, este capítulo en la cuarta sección, se presentan algunos elementos teóricos asociados al pensamiento aditivo, entre ellos una definición de pensamiento aditivo propuesta por la Secretaría de Educación Nacional, la cual es utilizada como base para reformularla, teniendo en cuenta la definición de pensamiento propuesta en la Teoría Cultural de la Objetivación.

El diseño de la investigación se describe en el tercer capítulo. Inicialmente se presenta el enfoque de investigación utilizado en este estudio, así mismo el ciclo que dirige éste. A continuación, en este apartado se expone la fase de pilotaje, resaltando algunos de los resultados encontrados y las decisiones que se tomaron en relación con la pertinencia y

reformulación de algunas de las preguntas propuestas en las tareas del pilotaje. En concordancia con lo anterior se presenta la justificación de las tareas propuestas en la investigación. Segundo, se describen algunas características de la población, así mismo la naturaleza de las sesiones de trabajo y el proceso de recolección como los instrumentos utilizados en éste. Este capítulo cierra con la descripción de la manera cómo se constituye el dato de investigación, resaltando los elementos que lo conforman y la manera cómo se realiza el análisis desde una concepción multimodal del pensamiento.

Asumiendo esta concepción del pensamiento, en el capítulo cuatro, se presenta el desarrollo de la investigación y el análisis multimodal tanto de las producciones como de la actividad matemática realizada por los estudiantes. Este análisis está conformado por cinco episodios asociados a las dos primeras tareas propuestas en la investigación, en cada uno de éstos se hacen explícitos los medios semióticos de objetivación que movilizaron los estudiantes como los procesos de objetivación que emergieron en la labor conjunta que se desarrolló.

A través del análisis de los diferentes episodios y de los resultados obtenidos, en el capítulo cinco, se describen algunos vectores que caracterizan el desarrollo del pensamiento aditivo, a saber: el conteo simple, el conteo múltiple, la agrupación no posicional y posicional. Vectores que se sugiere dan cuenta de la manifestación y evolución del pensamiento aditivo de los estudiantes al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales. Para finalizar este capítulo, se exponen algunas evidencias que podrían dar cuenta de formas de pensamiento aditivo asociadas al vector conteo simple, con el propósito de plantear algunos indicios relacionados con una posible tipología de formas de pensamiento aditivo, la cual se establece y caracteriza de manera no exhaustiva en analogía a las formas de pensamiento algebraico.

Para finalizar, en el capítulo seis, se expone los resultados de la investigación a partir de las evidencias encontradas y del análisis multimodal de los datos, de igual manera se hacen explícitas algunas consideraciones que se desprenden de la realización de esta investigación.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1 Campo o área problemática

En el transcurso de los últimos años la educación matemática ha presentado una evolución, resultado del desarrollo de varias perspectivas o enfoques que buscan dar solución a los problemas y desafíos que ésta debe afrontar (Artigue, 2004). Enfoques que han generado nuevas concepciones del aprendizaje, la enseñanza y el saber, puesto que conciben el conocimiento matemático como un proceso social, histórico y cultural, promoviendo así, un giro hacia lo social, en el que se pretende significar el reconocimiento e influencia que tienen las estructuras sociales, culturales, económicas y políticas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Lerman, 2000).

Entre estos enfoques se encuentran las perspectivas socioculturales, las cuales se caracterizan por un lado, porque el saber es generado por los individuos en el transcurso de las prácticas sociales que son consustanciales de la historia y la cultura, sin embargo la historia y la cultura no son considerados por algunas de estas perspectivas como principios operativos. Por otra parte, porque conciben que la producción del saber está orientada por las formas culturales de pensamiento (estético, político, científico matemático, etc.) que permiten a los individuos interpretar y modificar la realidad (Radford, 2011b).

En particular en la Teoría Cultural de la Objetivación, teoría que se ubica en las perspectivas socioculturales contemporáneas, el sujeto es concebido como un sujeto contextual, que piensa, siente y actúa dentro de la cultura en la cual se encuentra inmerso (Radford, 2000). Por esta razón, la formulación de proyectos y de significados está anclada a las posibilidades que la cultura le brinda por medio de las instituciones y las redes en las que se moviliza el poder y el saber (Radford, 2011b).

Un ejemplo de estas perspectivas socioculturales que han permitido una evolución de la educación matemática, es la Teoría Cultural de la Objetivación. Teoría histórico-cultural de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la cual se apoya en una concepción social

del aprendizaje, en el que se forman las capacidades intelectuales a la vez que se aprende a relacionarse con otros individuos, es decir se forman las capacidades humanas. Además, aboga por una concepción no mentalista del pensamiento, en la cual el pensamiento puede ser observado, dado que emerge a través de los gestos, del movimiento del cuerpo, la actividad perceptual, los artefactos y los signos utilizados por los individuos y no como algo inobservable, que únicamente ocurre en el plano mental.

Además, el pensamiento está enmarcado por significados culturales que orientan la actividad de los individuos y le da cierta forma. Forma que se ve reflejada en la manera de demostrar, argumentar y resolver problemas, puesto que esta tiene unos significados históricos culturales que la antecede, es decir, esta forma de actividad está subtendida por una superestructura simbólica que se ha denominado Sistemas Semióticos de Significación Cultural. Estos sistemas determinan las concepciones que se tienen de los objetos matemáticos, su existencia, la relación con el mundo concreto y los patrones sociales de producción de significados culturales (Radford, 2006a, p. 109). En este sentido, los sistemas afectan las estructuras psíquicas de los sujetos y transcinden al sujeto que piensa.

Esta teoría moviliza tres conceptos claves. El primero de ellos hace referencia al aprendizaje, el cual se concibe como el encuentro consciente con formas culturales e históricas de reflexión y acción. Este encuentro se da a través de procesos sociales, sensibles y materiales de objetivación (Radford, 2013c). El segundo, es el conocimiento, entendido como instanciación o actualización del saber (Radford, 2013c, p. 16). El tercer y último concepto clave de la teoría es el saber. Este se define como movimiento, además es configurado a partir de formas de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas que están en constante movimiento (Radford, 2013c).

La solidez y coherencia de la Teoría Cultural de la Objetivación (TCO) son sustentadas por principios fundamentales y operacionales que se articulan alrededor de cinco conceptos relacionados entre sí (Radford, 2006a). Estos conceptos hacen referencia al pensamiento, aprendizaje, posición ontológica (naturaleza de los objetos matemáticos), posición epistemológica (manera en que los objetos pueden llegar a ser conocidos) y objetivación. A continuación, se abordará el quinto concepto, objetivación, con el propósito de centrar la

atención en los procesos de objetivación, constructo teórico que es uno de los centros de interés de investigaciones desde esta perspectiva.

La objetivación expuesta en la teoría es uno de los constructos teóricos que permiten teorizar el crecimiento de las formas culturales de pensamiento y del ser. En este sentido, los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde esta perspectiva aparecen anclados al crecimiento de estas formas. No obstante, a este proceso, se añade el de subjetivación, los cuales están interrelacionados y son mediatizados por el cuerpo, el lenguaje, los signos, los artefactos y la interacción social.

“La objetivación se define como un proceso social de toma de conciencia progresiva de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente al mismo tiempo que la dotamos de sentido” (Radford, 2006a, p. 116). Este proceso requiere de acciones intencionadas y dirigidas a hacer visible algo (objetos culturales matemáticos y la lógica cultural de éstos), estas acciones se ven reflejadas en los gestos, en el movimiento kinestésico, en el uso de los signos y los artefactos, convertirse en acción reproducible que transforman al individuo y a su conciencia.

La teoría cultural de la objetivación añade a sus constructos teóricos los procesos de objetivación, entendidos, como los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes alcanzan una comprensión crítica de la lógica cultural con la que han sido dotados los objetos de conocimiento, y además, se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas (Radford, 2008b, 2011b). Para alcanzar esa comprensión crítica los procesos de objetivación son mediatizados por el cuerpo, los gestos, el lenguaje, los signos, los artefactos.

Entre los procesos de objetivación identificados por Radford y sus colaboradores se encuentran: la contracción semiótica y la iconicidad. El primer proceso consiste en la reducción de los medios semióticos movilizados por los estudiantes que conducen a una capa o estrato de inteligibilidad más profundo (Radford, 2008b). En esa idea de contracción semiótica la investigación muestra que los estudiantes al abordar tareas de generalización de patrones movilizan sincrónicamente varios medios semióticos de objetivación. Dicha movilización es denominada nodo semiótico, entendido como una pieza de la actividad

semiótica, más específicamente un segmento de la actividad en el cual los estudiantes utilizan varios medios semióticos de objetivación para objetivar el saber.

El segundo proceso, la iconicidad se entiende como aquella pieza de la actividad, en la cual los estudiantes utilizan las acciones pasadas para afrontar una nueva situación, permitiendo hacer una transición gradual de una capa menos inteligible a una más inteligible. Dentro este proceso de objetivación se da un subproceso denominado orquestación icónica, en el cual los estudiantes expresan y reformulan con sus propios gestos, movimientos, acciones, palabras y tonos la expresión de alguien. Esta orquestación es icónica, puesto que la formulación de la expresión del estudiante es similar al de otra persona. Por otro lado, es una orquestación, en el sentido de que es considerada más que una copia, dado que esta permite objetivar el saber, es decir volver aparente lo que en el mundo potencial es inaccesible.

Desde esta perspectiva, uno de los intereses de las investigaciones realizadas tanto a nivel internacional como nacional se centra en los procesos de objetivación, dado que, se pretende dar cuenta de la manera en que este proceso ocurre. En este sentido, se hace un esfuerzo por identificar las acciones de los estudiantes que los conducen a objetivar el saber y a posicionarse como individuos críticos, responsables y abiertos (Radford, 2011b). Dicha objetivación del saber está mediada por acciones intencionadas y dirigidas a hacer visible al objeto cultural matemático, entendido como “entidad estratificada en estratos de generalidad” (Santi, 2010, p. 69). Estos estratos de generalidad están caracterizados por una actividad reflexiva, la cual está determinada por la movilización de los medios semióticos de objetivación.

Por esta razón en estas investigaciones se recurre a la identificación, caracterización y evolución de los medios semióticos de objetivación que emergen en la actividad matemática, con el propósito de caracterizar el desarrollo del pensamiento matemático, en particular cuando resuelven tareas de generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas con estudiantes de diferentes edades. Sin embargo, los investigadores recientemente pretenden realizar dicha caracterización en otros pensamientos distintos al contexto de lo algebraico.

1.2 Antecedentes

1.2.1 Sobre la Teoría Cultural de la Objetivación y algunos de sus intereses de investigación

En las últimas décadas, la comunidad de investigadores en educación matemática ha centrado interés por indagar el desarrollo del pensamiento algebraico en adolescentes y en estudiantes de los primeros grados de escolaridad al resolver tareas de generalización de patrones. Dichas investigaciones (Gómez, 2013; Radford, 2010b, 2010d, 2011a, 2012b, 2012c; Vergel, 2014; Villanueva, 2012) identifican manifestaciones por parte de los estudiantes que reflejan formas de pensamiento algebraico, que no necesariamente están mediadas únicamente por el uso del lenguaje alfanumérico sino que también están influenciadas por medios materiales e intelectuales como: el uso de signos (escritos, verbales y gestuales), el movimiento corpóreo, la actividad perceptual, la ritmidad y los artefactos.

Estos medios materiales e intelectuales son denominados por Radford (2008b) medios semióticos de objetivación, entendidos como aquellos recursos a través de los cuales los sujetos organizan sus acciones en el tiempo y en el espacio, con el propósito de hacer presentes sus intenciones y adquirir formas estables de conciencia. Formas que son culturales e históricas, puesto que a través de los medios semióticos de objetivación se encuentra consignada la actividad reflexiva de generaciones pasadas. Por esta razón, en los resultados de estas investigaciones se resalta el papel que desempeñan los medios semióticos en el proceso de objetivación del saber y que poco son considerados en las aulas de matemáticas por los profesores.

Entre los trabajos que han abordado este interés y que están orientados por la Teoría Cultural de la Objetivación en el contexto nacional, se destaca la tesis doctoral de Vergel (2014). Investigación que tiene por objetivo estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones. A partir de la recolección de la información y del análisis multimodal se evidenció que las formas de

pensamiento algebraico temprano Factual y Contextual emergieron como posibilidades que los estudiantes materializaron y concretizaron en la actividad (Vergel, 2014).

Además, a través del análisis de los segmentos de la actividad se logró identificar el medio semiótico de objetivación “*la torre*”, el cual se instauró en la labor conjunta como un recurso semiótico que permitió organizar los actos y las intenciones de los estudiantes. De este modo, este medio semiótico condicionó las formas de interpretar, desarrollar y pensar la tarea propuesta por la profesora, ocasionando la emergencia de diversas instanciaciones del saber que iban logrando los estudiantes (Vergel, 2014).

En término generales, esta investigación aporta conocimientos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, más específicamente a las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver tareas de generalización de patrones y a la caracterización del desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de estas edades. Además, esta investigación contribuye a la reflexión acerca de la concepción que se tiene de que el aprendizaje de los estudiantes se debe únicamente a lo memorístico, mecánico, descontextualizado, estático (Vergel, 2014).

De este modo, se resaltar que en el aprendizaje de los estudiantes emergen manifestaciones (recursos semióticos) a través de la corporeidad de las acciones, los gestos y el uso de signos y artefactos. Manifestaciones que subyacen en el significado que los estudiantes van elaborando en su actividad matemática y que les permite objetivar el saber puesto en juego.

Arzarello (citado en Vergel, 2014) afirma que se hace necesario en la investigación detectar y analizar cómo emergen y evolucionan los medios semióticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, puesto que estos emergen en la actividad matemática como factores indispensables en la constitución y manifestación del pensamiento matemático. En este sentido, no reconocer estos medios implicaría desaprovechar un arsenal de aspectos matemáticos corpóreos que pueden brindar información sobre el desarrollo del pensamiento de los estudiantes (Vergel, 2014).

Por otro lado, se destaca la tesis de maestría de Villanueva (2012) cuyo objetivo general se centra en identificar, describir y analizar los medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar, cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias

figurales. De este modo, a través del análisis multimodal de las producciones de los estudiantes, de la identificación y evolución de los medios semióticos de objetivación utilizados, se resalta la potencialidad y ventajas que tiene estos en el proceso de objetivación del conocimiento sin necesidad de ir a lo puramente conductual (Villanueva, 2012).

Además, a partir de los resultados, reconoce la importancia de generar investigación en otros pensamientos distintos del algebraico, para observar y analizar la potencialidad de los medios semióticos (artefactos, gestos, palabras, símbolos) en el proceso de objetivación del saber, dado que en términos de Radford (2011a) no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de generaciones precedentes.

Por su parte, Gómez (2013) identifica, describe y analiza los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes de grado décimo de educación media y los procesos de objetivación que desarrollan cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas. A partir del análisis de las producciones del grupo focal con el cual se llevó a cabo la investigación y de los resultados obtenidos, se evidencia cómo el estudio de los medios semióticos y los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes posibilita una mayor comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico (Gómez, 2013).

Además, se resalta la importancia que tiene este tipo de investigaciones en la toma de conciencia de cómo los medios semióticos movilizados por los estudiantes pueden ser relevantes en el aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, de manera similar a las conclusiones reportadas en la investigación realizada por Villanueva (2012), durante el estudio también se pone en evidencia la necesidad de generar más investigaciones no solo relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico sino a otros pensamientos como el aleatorio, el geométrico y el estadístico.

Miranda (2009), centra su atención en la interpretación de gráficas cartesianas asociadas al movimiento lineal. Esta investigación doctoral tomando como referentes de análisis los

constructos teóricos propuestos en la Teoría Cultural de la Objetivación plantea como objetivo de estudio: analizar el proceso de producción de significados en la explicación del movimiento lineal de objetos llevada a cabo por estudiantes de bachillerato cuando interpretan gráficas cartesianas. A través del análisis y las producciones realizadas por cada uno de los equipos con los cuales se realizó la investigación y en especial por el equipo de Laura, se sugiere la necesidad de realizar otras investigaciones, con el propósito de comprender mejor la variedad de procesos de objetivación que surgen en el aula, dado que, se evidenció que estos no son únicos ni homogéneos dentro del salón de clases.

Además, se resalta que los movimientos gestuales realizados por integrantes del equipo de Laura desempeñaron un papel fundamental en la comprensión del concepto de distancia, puesto que, a través de estos movimientos animaron y sintieron los movimientos plasmados en las gráficas cartesianas (Miranda, 2009).

Así mismo, los resultados muestran que las interpretaciones de los estudiantes acerca de las gráficas no son producto de la espontaneidad sino de un proceso progresivo de toma de conciencia, conciencia que está mediada por los diferentes medios semióticos utilizados por los estudiantes (movimientos gestuales, el dibujo, las fórmulas matemáticas, el lenguaje verbal), dado que les permitió hacer visible y dotar de sentido la trayectoria de los sospechosos, la distancia, el punto de intercepción entre las dos rectas y origen del sistemas de coordenadas.

1.2.2 Sobre el pensamiento aditivo y la estructura aditiva

Por otra parte, los investigadores en educación matemática en el transcurso de los últimos años han mostrado un interés por realizar análisis teóricos relacionados con las estructuras aditivas y multiplicativas, de este manera han realizado estudios para investigar la adquisiciones de los conceptos y relaciones que se dan en dichas estructuras (Bonilla et al., 1999). En estos estudios y más específicamente los relacionados con la estructura aditiva (relación ternaria que solo está formada por sumas o restas) pretenden contribuir a la comprensión y reflexión por parte de los profesores de las dificultades y errores, las estrategias de solución, del tipo de problemas que se pueden implementar en el aula, así mismo como la posibilidad de diseñar tareas relacionadas con estos que potencien el aprendizaje significativo.

En este sentido, entre los autores que han centrado sus investigaciones en este análisis se encuentran (Bonilla et al., 1999; Castro, Rico, & Castro, 1995; Vergnaud, 1991). Cada uno de estos autores brinda conocimientos teóricos y prácticos que posibilitan identificar y clasificar en diferentes categorías las situaciones relacionadas con la estructura aditiva teniendo en cuenta: su estructura semántica, el tipo de incógnita por el que se esté indagando (estado inicial, transformación y estado final). Así mismo, permiten comprender e identificar los criterios a través de los cuales se pueden analizar los problemas de enunciado verbal, tomando como referencia las palabras utilizadas en el enunciado, el análisis sintáctico y semántico de estos.

Algunos de los resultados asociados a estos estudios han posibilitado la identificación sobre las dificultades que se presentan en la resolución de problemas asociados a la estructura aditiva. Dificultades que están mediados por el lenguaje utilizado en los enunciados, la posición de la pregunta en estos, el valor numérico de los números, la relación entre el orden de presentación de los datos en el enunciado y el orden en que se deben colocar para realizar la operación.

Sin embargo, como afirma Bonilla et al. (1999), dada la importancia que reviste la estructura aditiva en el desarrollo del pensamiento matemático escolar y en particular en la construcción del pensamiento numérico es indispensables generar conocimiento tanto teórico como práctico que permita por un lado a los profesores comprender cómo piensan los estudiantes y por el otro diseñar e implementar tareas que posibiliten la construcción del pensamiento numérico escolar.

En este sentido, a través de la teoría cultural de la objetivación, más específicamente desde los constructos teóricos asociados a los procesos y medios semióticos de objetivación, y tomando como referencia el pensamiento aditivo, se pretende dar cuenta de una aproximación a la caracterización de las formas de desarrollo del pensamiento asociadas a tareas de tipo aditivo. A través de los procesos de objetivación y los medios de expresión utilizados por los estudiantes, puesto que posibilitan reconocer la constitución y manifestación del desarrollo del pensamiento.

1.3 Delimitación del problema

Tomando como referencia los antecedentes y los intereses de investigación desde la perspectiva de la Teoría Cultural de la Objetivación, se reconoce la importancia de generar nuevas investigaciones en otros pensamientos, con el propósito de observar y analizar la potencialidad de los medios semióticos (artefactos, gestos, palabras, símbolos) en el proceso de objetivación del saber. Así mismo, se sugiere revisar el desarrollo del pensamiento matemático, en particular las formas de pensamiento asociados a lo aritmético, lo algebraico y lo geométrico.

Por esta razón, el interés de esta propuesta de investigación consiste en indagar el desarrollo conceptual de los estudiantes al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales. Desarrollo conceptual que está caracterizado por los medios semióticos de objetivación y los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes. De este modo, con esta propuesta de investigación, se pretende realizar una aproximación que contribuya a la caracterización del pensamiento aditivo, más específicamente a las tareas de tipo aditivo en los naturales, a través de los medios semióticos y los procesos de objetivación, aportando nuevos elementos teóricos al campo de la educación matemática que podrían redefinir el pensamiento aditivo desde las ideas teóricas que han surgido en la Teoría Cultural de la Objetivación.

Además, estos aportes pueden contribuir a la reflexión de las prácticas educativas realizadas por los profesores que enseñan los objetos matemáticos asociado a las tareas de tipo aditivo, permitiéndoles orientar y resignificar su accionar en el aula, con el propósito de que sus estudiantes doten de sentido estos objetos a través de la interacción social, el uso de medios semióticos y los diferentes procesos de objetivación.

Por otro lado, teniendo en cuenta los planteamientos propuestos en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (documento propuesto por el Ministerio de Educación Nacional en Bogotá-Colombia que ofrece lineamientos o directrices para que todos reciban una educación matemática de calidad y desarrollen las capacidades necesarias para enfrentar los retos del mundo contemporáneo) al terminar el tercer grado los estudiantes deben estar en la capacidad de resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Es por esta

razón que es pertinente enmarcar la propuesta de investigación en el grado tercero de primaria.

De este modo, tomando como marco de referencia la teoría cultural de la objetivación y la población seleccionada, la propuesta de investigación presentada se plantea con el propósito de dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de tercer grado de primaria y qué procesos de objetivación desarrollan cuando se enfrentan a tareas de tipo aditivo en los naturales?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Describir y analizar los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes de tercer grado de primaria y los procesos de objetivación que desarrollan al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales.

1.4.2 Objetivos específicos

Identificar y adaptar una serie de tareas de tipo aditivo en los naturales e implementarlas, bajo los principios de la teoría cultural de la objetivación, en estudiantes de tercer grado de primaria.

Describir los medios semióticos de objetivación que emergen en la actividad matemática de los estudiantes de tercer grado de primaria a partir de la implementación de las tareas de tipo aditivo en los naturales.

Analizar los medios semióticos de objetivación movilizados y los procesos de objetivación que desarrollan los estudiantes de tercer grado de primaria que desarrollan al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se describen y desarrollan los elementos teóricos que dan coherencia y sustento a la propuesta de investigación. En este sentido, en la primera sección se presentan algunas características asociadas al objetivo de la educación matemática desde la Teoría Cultural de la Objetivación, con el propósito de reconceptualizar la enseñanza y el aprendizaje en términos de labor conjunta. Luego, en la segunda sección se exponen dos constructos teóricos fundamentales de ésta teoría: los procesos de objetivación y los procesos de subjetivación, centrando la atención en los primeros.

A partir de las ideas expuestas del objetivo de la educación y de los procesos de objetivación, en la tercera sección, se desarrollan algunos elementos teóricos asociados a los medios semióticos de objetivación, los cuales desempeñan un papel fundamental en el desarrollo y manifestación del pensamiento matemático de los estudiantes. Para finalizar este capítulo, en la cuarta sección se plantean la idea de pensamiento aditivo.

2.1 Sobre el objetivo de la educación matemática desde la Teoría Cultural de la Objetivación

La Teoría Cultural de la Objetivación surge como una respuesta a la necesidad de replantear la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en términos distintos de aquellos propuestos por teorías individualistas, cuyo propósito fundamental consistía en la transmisión del saber (Radford, 2014). El cual se consideraba podía ser acumulado en la mente de los sujetos como si ésta se tratara de un contendor (Sfard, 1998, p. 3). Además, estas teorías centran su atención en la psicología de las estructuras mentales de los sujetos, considerados sujetos teóricos, epistémicos abstractos (Radford, 2013b).

Por esta razón, la Teoría Cultural de la Objetivación surge como alternativa que ofrece nuevas posibilidades para pensar de manera diferente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y así mismo el objetivo de la educación matemática desde una aproximación histórico-cultural. En este sentido, esta teoría se apoya en dos principios fundamentales de naturaleza ontológica y epistemológica y dos principios asociados a la finalidad de la

educación matemática uno educativo y otro ético (Radford, 2006a, 2013c, 2014). Estos principios posibilitan nuevas concepciones acerca de la finalidad de la educación, del aprendizaje, de los sujetos, del saber, de los objetos matemáticos, del pensamiento, entre otros.

En cuanto a los principios fundamentales de naturaleza ontológica y epistemológica, el fundamento ontológico plantea que los objetos matemáticos no son independientes de la actividad matemática y de la experiencia sensual de los sujetos, por esta razón, se considera que los objetos son generados por los sujetos en prácticas histórico culturales. De este modo, los objetos matemáticos “son patrones fijos de actividad reflexiva [...] incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatisada por los artefactos” (Radford, 2006a, p. 111).

A partir de esta posición ontología la Teoría Cultural de la Objetivación concibe el saber como movimiento, como pura posibilidad de algo que está allí (conceptos u objetos culturales) y que se presenta a los estudiantes como posibilidades para reflexionar que con la ayuda del profesor concretizan y materializan de manera particular en el aula. “El saber parece ser más bien algo que no está en nosotros, algo que debemos encontrar, algo que nos hace objeto (es decir, se nos opone)” (Radford, 2013c, p. 23). Este saber es constituido por formas que se encuentran siempre en movimiento, formas de acción, reflexión y expresión histórica y culturalmente codificadas (Radford, 2013c).

Por su parte, el fundamento epistemológico desde la teoría propone que el conocimiento de los objetos matemáticos es el resultado de acciones y reflexiones de los sujetos sobre el mundo que están orientadas por formas culturales e históricas, es decir, por formas de argumentar, probar, pensar y validar que están enmarcadas por la actividad de cada cultura según el momento histórico en el cual se encuentra inmersa ésta. Estas acciones y reflexiones son el resultado de prácticas sociales en las cuales no únicamente se forman capacidades intelectuales sino también humanas.

La Teoría Cultural de la Objetivación desde su principio ético reconoce el carácter histórico-cultural del sujeto, es decir, concibe y es consciente de la dimensión del ser, el cual no solo se reduce a un ser que piensa y produce sino como un sujeto que está inmerso

en un contexto social y cultural que orienta por un lado el desarrollo del saber en ciertas direcciones y por el otro, determina la formulación de proyectos y de significaciones (comunicación personal, 6 de enero de 2014).

El principio educativo permite establecer la enseñanza-aprendizaje como un trabajo conjunto, de cooperación, participación e interacción que no solo está orientado a la familiarización y adquisición de un contenido disciplinario (dimensión del saber) sino también a la dimensión ser (Radford, 2011b, 2013b, 2014). En efecto, desde este principio se asume que el ser se transforma en la interacción con el otro y al toparse con el objeto (aparición de la presencia), dado que aprenden a expresarse y posicionarse críticamente ante discursos y prácticas sociales asociadas a formas de expresión, acción y reflexión con las matemáticas.

La articulación de estos cuatro principios permite replantear el objetivo de la educación matemática. En este sentido, desde la teoría se plantea que la educación en general no solo debe tratar de saberes exclusivamente sino de saberes y seres. De manera más particular como afirma Radford (2014) “deben estudiarse tanto los conocimientos en juego, lo que ha denominado *conociendo* o *Knowing* como la formación del alumno en tanto que sujeto humano, es decir, volviéndose o *Becoming*, el cual consiste en la transformación perpetua del sujeto” (p.4).

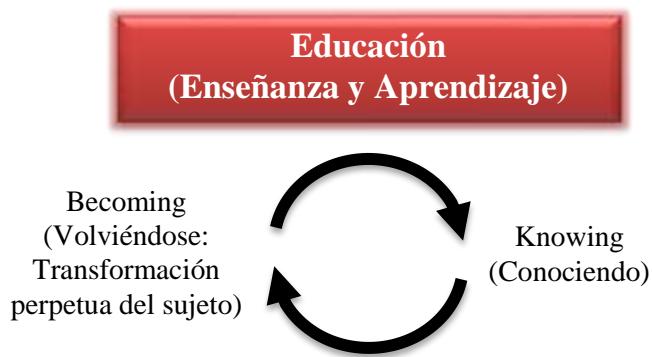


Figura 1. El fin de la educación en Radford (2014).

A partir de esta interrelación entre el *Becoming* y el *Knowing*, la Teoría Cultural de la Objetivación realiza una invitación a repensar la educación como una tarea centrada más allá de los saberes, en la cual el ser y el saber desde una concepción ontológica se encuentran en una relación dialéctica en la que uno no puede ocurrir sin el otro y sin que

uno sea reducido al otro (Radford, 2014). En términos generales Radford (2014, p. 4) “plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente”.

Esta creación de individuos críticos y reflexivos se da en el encuentro con el otro y con el mundo tanto en su dimensión conceptual como material, y que solo puede darse a través de una labor conjunta, en el sentido del materialismo dialectico hegeliano (Radford, 2014). Labor conjunta que posibilita que los individuos se transformen y se desarrollen constantemente en un espacio socio político en el que el conociendo (Knowing) y el volviéndose (Becoming) se encuentran y constituyen mutuamente posibilitando que los individuos se conviertan en lo que son: sujetos que son proyecto histórico social siempre inconcluso, que está en constante movimiento (Radford, 2013b).

La labor conjunta desde la teoría es conceptualizada como el trabajo conjunto sensible, material y conceptual de estudiantes y profesores que tiene como propósito alcanzar un objeto impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales que han sido constituidos histórica y culturalmente. Para alcanzar dicho objeto los individuos deben realizar determinadas acciones que serán mediatizadas por sistemas semióticos, en los cuales se encuentra consignada la historia cognitiva de generaciones pasadas (Radford, 2006b).

De esta manera concibiendo las matemáticas como una labor conjunta significa entenderla como acciones por y entre estudiantes y profesores que interactúan y reflexionan mutuamente hacia la constitución de una conciencia crítica de formas de acción, reflexión y expresión matemática que son guiadas como afirma Radford (2013b) por una normatividad histórico cultural. Labor conjunta en la que los sujetos muestran además apertura y sensibilidad hacia otras voces y otras conciencias en los diferentes debates y discusiones que se desarrollan en esta labor conjunta.

2.2 Sobre los procesos de objetivación

Con el propósito de identificar y comprender tanto las formas de reflexión matemática (formas de crecimiento culturales) como las formas de interacción y cooperación entre los

estudiantes (formas de crecimiento y transformación del ser) que emergen en labor conjunta, en este sentido la Teoría Cultural de la Objetivación moviliza dos constructos teóricos entrelazados. El primero de ellos, refiere a los procesos de objetivación y el segundo a los procesos de subjetivación.

En cuanto a los procesos de objetivación, éstos son entendidos como “procesos sociales, emocionales, sensibles,¹ corpóreos, simbólicamente mediados de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de acción, reflexión y expresión” (Radford, 2014, p. 10) asociadas a la lógica cultural con la que los objetos del saber han sido dotados y se familiarizan con formas de pensamiento históricamente constituidos (Radford, 2009, 2011b).

La objetivación desde un sentido Hegeliano hace referencia a ese proceso cuyo propósito tiene como finalidad hacer apparente algo que está allí (objeto cultural que objeta a la conciencia y que opone resistencia) y que se topa o coloca frente al sujeto (Radford, 2014). “Objetivar el saber es la acción de convergencia del signo y el pensamiento que lleva a hacer apparente lo que en el mundo conceptual se perfila como meramente potencial” (Radford, 2006b, p. 686).

Radford (2008b) a través del análisis semiótico de la actividad matemática de un grupo de estudiantes que abordaron tareas sobre generalización de patrones identificó dos procesos centrales de objetivación denominados: contracción semiótica e iconicidad. Los cuales son elementos teóricos que permiten analizar la actividad matemática de los estudiantes (Vergel, 2014).

Radford (2008b, 2010a), evidenció en la actividad matemática realizada por diferentes grupos de estudiantes al resolver tareas de generalización de patrones que recurrían a la reducción y refinamiento de medios semióticos, con el propósito de adquirir una mayor concentración de significados en la menor cantidad de signos o palabras. Esta reducción o economía es lo que se ha denominado desde la Teoría contracción semiótica. De esta manera, algunos gestos, por ejemplo, como señalamientos con los dedos, deslizamientos de

¹ Las palabras con énfasis son añadidas por el autor a la definición propuesta por Radford, dado que los sujetos que participan en ese proceso social son considerados sujetos concretos que viven, piensan, actúan, sienten y sufren en la interacción con el Otro y la cultura.

los dedos sobre las hojas de trabajo y la ritmicidad, son excluidos, para ser reemplazados por expresiones lingüísticas más sofisticadas o la utilización del lenguaje alfanumérico.

Esta economía da cuenta de la reorganización psíquica de los sujetos, que le permite de manera paulatina pero no homogénea una toma de conciencia progresiva del objeto cultural y de formas de pensamiento matemático que han sido constituidas histórico-culturalmente (Radford, 2013c; Vergel, 2014). Además de permitir un nivel más profundo de conciencia e inteligibilidad, como señala Radford (2012a), la contracción semiótica es evidencia de síntomas de aprendizaje y de desarrollo conceptual por parte de los estudiantes, puesto que promueve la elección por parte de éstos de lo que se considera relevante e irrelevante en las acciones a realizar en la actividad matemática.

Por otro lado, en la actividad matemática realizada por los estudiantes y más específicamente en una pieza de dicha actividad son movilizados sincrónicamente diferentes medios semióticos de objetivación (signos, gestos, cuerpo, artefactos, ritmicidad) con el propósito de objetivar el saber. Esta movilización sincrónica de medios semióticos es denominada por Radford (2008b) nodo semiótico.

A la idea de nodo semiótico, uno de los constructos teóricos de la Teoría Cultural de la Objetivación, se le atribuye su importancia en el análisis la actividad matemática porque da cuenta de la manera cómo los signos y los artefactos son utilizados por los estudiantes en los procesos de objetivación y subjetivación (Vergel, 2014). Por esta razón, el interés central del nodo semiótico consiste en observar y comprender cómo los signos, los gestos y los artefactos se convierten en mediadores de la toma de conciencia de formas de pensamiento, de expresión, acción y reflexión asociadas a las matemáticas.

Por su parte, la iconicidad, el otro proceso de objetivación identificado por Radford, hace referencia a aquella pieza de la actividad matemática, en la cual los estudiantes recurren a la utilización de formas de acción, expresión y reflexión pasadas para abordar una nueva tarea, puesto que los estudiantes se dan cuenta de rasgos similares entre las tareas, la similitud de las preguntas de éstas y los procedimientos que pueden ser utilizados para abordarlas. En este proceso de objetivación emerge un subproceso, orquestación icónica, en

el cual los estudiantes expresan y reformulan las acciones, gestos, signos, movimientos, palabras y tonos las expresiones e intenciones de alguien.

Esta orquestación es considerada icónica porque las formulaciones de las expresiones (verbales, escritas o gestuales) del estudiante presentan rasgos similares a los de otro o la misma profesora. De igual manera, es una orquestación, porque esta reformulación es considerada más allá de una simple copia, puesto que ésta posibilita objetivar el saber, hacer apparente el objeto cultural, con el cual se topa el sujeto.

Por otro lado, puesto que el sujeto, es un sujeto concreto que participa en las actividades sociales de su cultural, a través de las cuales se forma y constituye constantemente, interviene así el segundo constructo teórico, procesos de subjetivación, denominados como: procesos a través de los cuales por un lado los sujetos se positionen en las configuraciones de prácticas culturales y por el otro se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos, sujetos que se reconocen y son reconocidos como miembros de una comunidad sociocultural (Radford, 2011b, 2014).

2.3 Medios semióticos de objetivación

En los procesos de objetivación y subjetivación los estudiantes y el profesor recurren al cuerpo, a signos, artefactos y gestos para hacer apparente el objeto y alcanzar formas relativamente estables de conciencia de los significados culturales con que han sido dotados éstos, dado que los objetos no pueden ser expuestos totalmente en el mundo concreto. Estos recursos a los que se recurre en la actividad matemática se denominan medios semióticos de objetivación. En términos de Radford (2003, p. 41) los medios semióticos de objetivación se definen como:

“Todo los medios utilizados por los individuos que se encuentren en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones”.

Es a través de la movilización de los medios semióticos de objetivación en la actividad matemática escolar que se puede acceder a los objetos matemáticos, permitiendo así hacerlos presentes, dándole cierta forma tangible y corpórea al saber (Radford, 2003).

Como afirman Radford (2008a, 2010a, 2010d); Santi (2010) los medios semióticos de objetivación estratifican en estratos de generalidad a los objetos matemáticos de acuerdo a la actividad matemática que se realice con éstos. Además, éstos son utilizados para comunicar, hacer aparente y materializar una intención, contribuyendo así, a la organización de las acciones realizadas por los estudiantes y el profesor en un tiempo y espacio determinado (Miranda, Radford, & Guzmán, 2013).

Por otro lado, en los medios semióticos de objetivación se encuentra consignada la actividad cognitiva de generaciones precedentes, más específicamente, éstos son portadores de una conciencia histórica y cultural que ha sido resultado de la actividad reflexiva de individuos inmersos en prácticas sociales. Por ejemplo, la utilización de la regla de medir (objeto cultural) es el resultado de actividades históricas y culturales de reiteración de unidades de medida, de las subdivisión de éstas y la cuantificación del proceso de medición. Esta conciencia histórica y reflexiva depositada en los medios semióticos de objetivación como afirma Radford (2006b) además de brindar vías de desarrollo conceptual, altera el funcionamiento cognitivo de éstos.

La importancia de los medios semióticos de objetivación reside en reconocer el papel que desempeñan en el desarrollo y manifestación del pensamiento matemático, puesto que con y a través de éstos se piensa, convirtiéndose así en elementos constitutivos, no periféricos de la actividad reflexiva con formas culturales de pensamiento. Como señala Vergel (2014), estos medios han sido desapercibidos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por esta razón, se hace indispensable identificar y analizar cómo emergen y evolucionan en la actividad matemática realizada tanto por los estudiantes como por el profesor.

2.4 Sobre el pensamiento aditivo

El aprendizaje de las operaciones suma y resta de números naturales no debe plantearse únicamente en el sentido operacional, en la adquisición de las habilidades y destrezas numéricas y en la aplicación de los algoritmos, sino en desarrollar el pensamiento aditivo de los estudiantes, lo anterior con el propósito de que puedan operar aditivamente, hacer juicios matemáticos, proponer y desarrollar estrategias de manera creativa y genuina para dar solución a situaciones problema que se resuelven a través de la suma y la resta de número naturales (García, 2007; Secretaría de Educación Distrital, 2007).

En este sentido, el pensamiento aditivo como afirma Secretaría de Educación Distrital (2007) sería:

‘eso’ que finalmente va surgiendo en el pensamiento del niño, a medida que va construyendo la operación adición en diferentes situaciones que requieren de las operaciones aditivas. Se trata de la apropiación del conocimiento de tal forma que permita pensar de manera genuina, de forma personal, creativa, crítica y con cierta flexibilidad. (p.55)

No obstante, la anterior definición de pensamiento aditivo deja como tarea precisar que sería eso que va surgiendo en el pensamiento del niño. Por esta razón en esta propuesta de investigación se pretende plantear una definición de pensamiento aditivo que intente hacer esta precisión. Para ello, será utilizada la definición de pensamiento propuesta en la Teoría Cultural de la Objetivación.

En este sentido, desde la Teoría el pensamiento es considerado una actividad reflexiva y sensible de una realidad (formas de acción, reflexión y expresión) constituida histórica y culturalmente, que es modificada de acuerdo a las interpretaciones y sentidos subjetivos de los individuos. Dicha actividad es plasmada a través de la corporeidad de las acciones, de signos (escritos, verbales o gestuales) y artefactos, por esta razón el pensamiento es observable y puede materializarse en la actividad desarrolladas por los individuos.

Tomando como referencia esta definición de pensamiento, el pensamiento aditivo puede definirse como la actividad reflexiva y sensible en torno a formas de acción, reflexión y expresión asociadas a las significaciones culturales e históricas con que han sido dotados de significado los objetos matemáticos² suma y resta, significaciones que son resultado de la actividad matemática realizada por generaciones pasadas.

Estas formas de acción, reflexión y expresión no necesariamente están asociadas al uso de la suma y de la resta sino que también pueden estar relacionadas con el uso del conteo, la comparación de cantidades, la agrupación no posicional y posicional, la equivalencia entre las unidades de primer nivel, las unidades de segundo nivel y cada una de las unidades de

² En esta propuesta de investigación se asume la definición de objeto matemático propuesta tanto en la Teoría Cultural de la Objetivación, Radford (2006a) como en las ideas propuestas en Santi (2010).

niveles superiores, a procesos de agregación y diferencia con objetos concretos, entre otras. Formas que emergen y se materializan en la actividad matemática cuando los estudiantes se enfrentan a tareas en las que pueden operar aditivamente con los números naturales.

En este sentido, es posible identificar a través de estas formas y de los medios semióticos de objetivación manifestaciones del desarrollado y evolución del pensamiento aditivo de los estudiantes al resolver tareas que requieren de las operaciones suma y resta. Lo anterior, permite dar cuenta de ‘eso’ que va surgiendo en el pensamiento de los estudiantes y lo cual se consideraba no podía ser observable.

Capítulo 3

Metodología

En este tercer capítulo se informa acerca de la manera como se diseñó y desarrolló la investigación. Se describe el enfoque y el ciclo de investigación utilizados, los cuales permiten direccionar el estudio. La fase de pilotaje es presentada en la primera sección, allí se hace un breve análisis de las tareas que se propusieron en esta y algunas de las decisiones que se tomar en relación con el diseño de las tareas a implementar posteriormente en la investigación.

En la segunda sección de este capítulo se describe el diseño y justificación de las tareas que fueron propuestas en la investigación. La población, la naturaleza de las sesiones de trabajo y el proceso de recolección de la información se describen en la tercera sección. En la última sección, se presenta la constitución del dato de investigación y la manera como serán analizados éstos a través de una concepción multimodal del pensamiento.

El estudio se enmarca en un enfoque de investigación de tipo cualitativo, descriptivo e interpretativo (Ernest, 1991), puesto que, desde este enfoque se construye una rica descripción del problema didáctico bajo estudio, es decir, de las formas de acción, expresión y reflexión asociadas al desarrollo del pensamiento aditivo de los estudiantes de grado tercero al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales, utilizando como unidad de análisis la actividad matemática que desarrollan los estudiantes.

De este modo, para direccionar el proceso de investigación se toma como referencia el ciclo o enfoque (ver Figura 1) inspirado en Radford (2010d), puesto que se pretende estudiar el desarrollo conceptual de los estudiantes al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales. Sin embargo, en esta propuesta el enfoque difiere del original en el tercer y cuarto paso (en el enfoque propuesto por Radford el tercer paso consiste en la interpretación de los datos y el cuarto paso hace referencia a la generación de teoría).

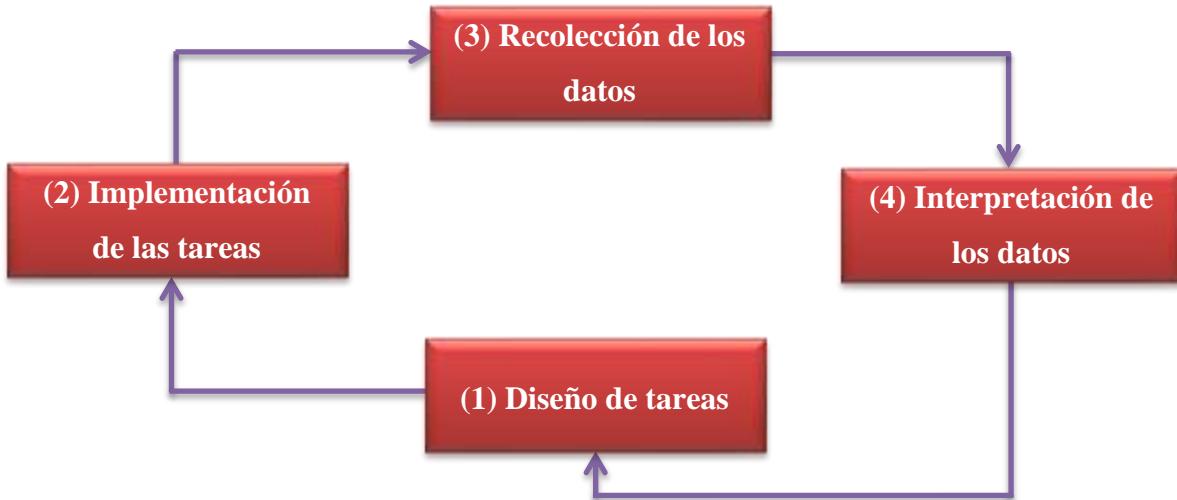


Figura 2. Diseño metodológico.

Desde la perspectiva de Goetz & LeCompte (1988), para establecer la credibilidad, fiabilidad y validez del estudio, se proporciona información suficiente en relación con: las tareas de tipo aditivo a través de las cuales se desarrolla la experiencia, la selección de la población (estudiantes de grado tercero de primaria de un colegio privado de la ciudad de Bogotá, Colombia), los métodos e instrumentos de recolección de los datos y el análisis de los mismos.

Ésta información será articulada en cuatro secciones que se organizan de la siguiente manera: en la primera sección, se presenta un breve análisis de las tareas que se propusieron en la fase de pilotaje, lo que permitió tomar decisiones en relación con el diseño e implementación de las siguientes tareas. El diseño y justificación teórica de las tareas que fueron implementadas se exponen en la segunda sección. En la tercera sección se puntualizan algunos aspectos relacionados con la población, la naturaleza de las sesiones de trabajo y el proceso que se llevó a cabo en la recolección de la información. Finalmente, en la cuarta sección se presenta la manera como se constituyeron los datos y un breve ejemplo de la descripción del análisis de los mismos.

3.1 Fase de pilotaje

El pilotaje se llevó a cabo en el mes de agosto de 2013 en el colegio Liceo Hermano Miguel de la Salle con un grupo de 12 estudiantes de tercero de primaria, los cuales prestaron su colaboración para realizar algunas tareas de tipo aditivo en los naturales. Las tareas tenían

como propósito que los estudiantes en pequeños grupos discutieran los diferentes ítems que se proponían en cada una de éstas y así dieran a conocer los procesos a través de los cuales los estudiantes se apoyaban mutuamente para alcanzar su respectiva solución. En este pilotaje se pretendía observar la emergencia de algunos medios semióticos de objetivación por parte de los estudiantes, además refinar y verificar la pertinencia de las preguntas que eran planteadas.

Las tareas que se plantearon a los estudiantes estaban relacionadas con la agrupación en decenas de un rebaño de ovejas y un corral de cerdos. A continuación se presentan un ejemplo de las tareas propuestas:

AGRUPA LAS OVEJAS EN DECENAS

¿Cuántas ovejas hay en el rebaño? ¿Cuántas decenas de ovejas se formaron?
¿Cuántas unidades sueltas de ovejas quedaron? ¿Cuántas unidades se deben agrupar para representarlas en una decena?

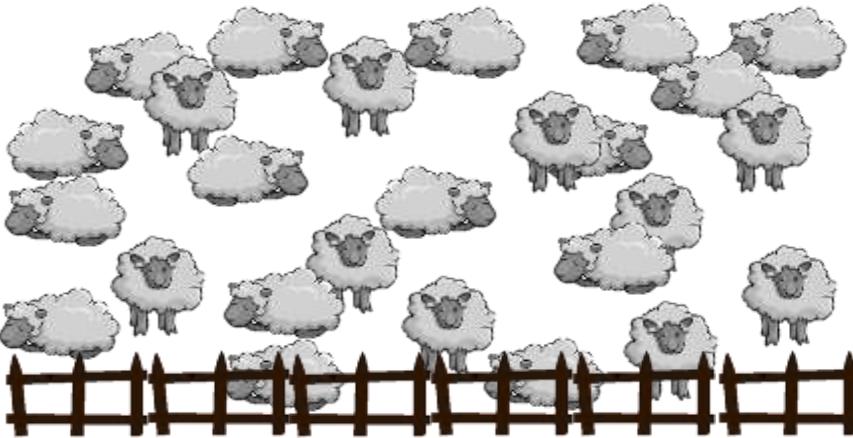
An illustration showing a group of approximately 25 sheep scattered across a white surface. Below them is a simple black wooden fence. The sheep are grey with dark faces and legs.

Figura 3. Tarea número 1 propuesta en la fase de pilotaje.

AGRUPA LOS CERDOS EN DECENAS

- ¿Cuántos cerdos hay en el corral? ¿Cuántas decenas de cerdos se formaron?
- ¿Cuántas unidades sueltas de cerdos quedaron? ¿Cuántas animales hay en total en la granja?
- ¿Cuántas decenas se formaron entre las ovejas y los cerdos?
- ¿Cuántas decenas y unidades hacen falta para formarse una centena?

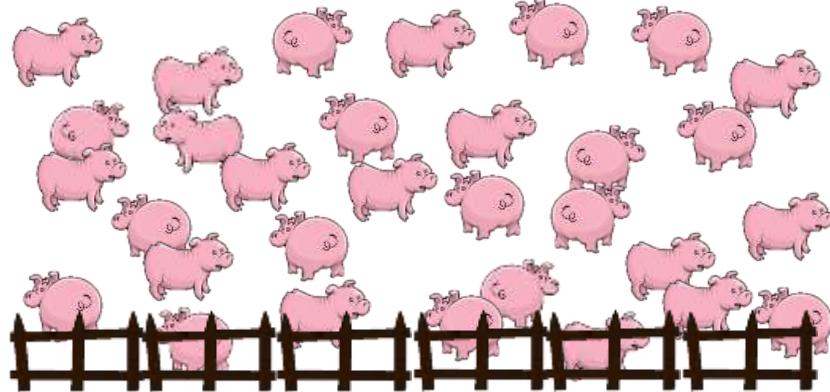


Figura 4. Tarea número 2 propuesta en la fase de pilotaje.

Algunos de los resultados que se obtuvieron luego de la implementación de las tareas en la fase del pilotaje son los siguientes:

3.1.1 Emergencia de medios semióticos de objetivación

Uno de los estudiantes para explicar la manera como se deben agrupar las ovejas en decenas, recurre a la utilización de señalamientos con sus dedos de cada una de las ovejas contadas simultáneamente que utiliza las palabras numéricas para contarlas. Una vez que señala la oveja diez y pronuncia la respectiva palabra que refiere a este número, hace explícito que las agrupa, lo cual acompaña simultáneamente con un gesto en el aire, el cual describe la trayectoria de una circunferencia, como se ilustra en las siguientes imágenes.

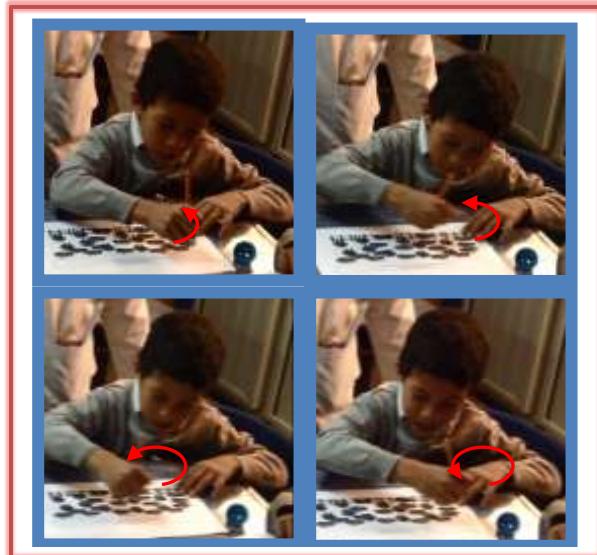


Figura 5. Coordinación multimodal de medios semióticos de objetivación movilizados por Jesús al agrupar en decenas el rebaño de ovejas.

A partir de las tareas planteadas y más específicamente de la instrucción dada de agrupar en decenas tanto las ovejas como los cerdos fue posible observar la movilización de medios semióticos de objetivación como: señalamientos con los dedos y el lápiz, encerrar, tachar, describir por medio de gestos la trayectoria de circunferencias, utilización de expresiones lingüísticas verbales y escritas. Por otro lado, uno de los elementos constitutivos de las tareas que posibilitó la emergencia y la movilización de medios semióticos fue el apoyo gráfico del rebaño como del corral.

Estas tareas que inicialmente permitieron a los estudiantes movilizar medios semióticos de objetivación parecen ser buenas candidatas para implementar en el trabajo de campo, puesto que la movilización de estos medios toma vital importancia en el contexto de la investigación y posibilita tomar decisiones en relación con el tipo de tareas que se deben proponer.

3.1.2 Pertinencia y reformulación de las preguntas planteadas.

Algunas de las preguntas que se plantearon en las tareas no permitieron que los estudiantes comunicaran sus ideas o estrategias para dar solución a cada uno de los ítems, puesto que éstos no exigían que discutieran acerca de la manera como se podría llegar a la respuesta, ni se cuestionaran acerca de las respuestas obtenidas. Lo anterior, dado que las preguntas indagaban por aspectos matemáticos muy concretos como por ejemplo, determinar la

cantidad de unidades sueltas de ovejas que quedaron en el rebaño después de ser agrupadas en decenas.

De este modo, algunas de las preguntas propuestas en la fase del pilotaje fueron rediseñadas, por un lado, con el propósito de que éstas exigieran a los estudiantes validar afirmaciones, hacer explícitas las estrategias utilizadas para dar solución a determinados ítems, realizar cálculos matemáticos, entre otros aspectos, por otro lado, para hacer más claras y puntuales algunas preguntas que no fueron tan comprensibles al inicio por los estudiantes. Algunas preguntas que fueron reformuladas y que se diseñaron son las siguientes:

| Preguntas propuestas en la fase de pilotaje | Preguntas reformuladas para las tareas |
|---|--|
| ¿Cuántas unidades sueltas de ovejas quedaron? | Juliana afirma que si se tuvieran ochenta y nueve ovejas en el rebaño, se obtendría 9 decenas y 8 unidades sueltas de ovejas. ¿Es verdadera o falsa la afirmación de Juliana? ¿Por qué? |
| ¿Cuántas animales hay en total en la granja? | ¿Cuántos animales hay en total en la granja entre cerdos y ovejas? Explícale a uno de tus compañeros qué fue lo que hiciste. |
| ¿Cuántas decenas y unidades hacen falta para formarse una centena? | ¿Cuántas decenas y unidades de cerdos hacen falta para formarse una centena de cerdos en total? Explica cómo obtuviste el resultado. |
| ¿Cuántas decenas de cerdos se formaron? | Juliana necesita tener 190 cerdos en su granja. Si ella dispone de 36 cerdos, ¿cuántos cerdos le hacen falta? Explica la manera cómo llegaste al resultado. Encuentra otra manera de obtener el mismo resultado. |

Tabla 1. Contraste entre las preguntas propuestas en la fase de pilotaje y las preguntas reformuladas para las tareas a implementar en el trabajo de campo.

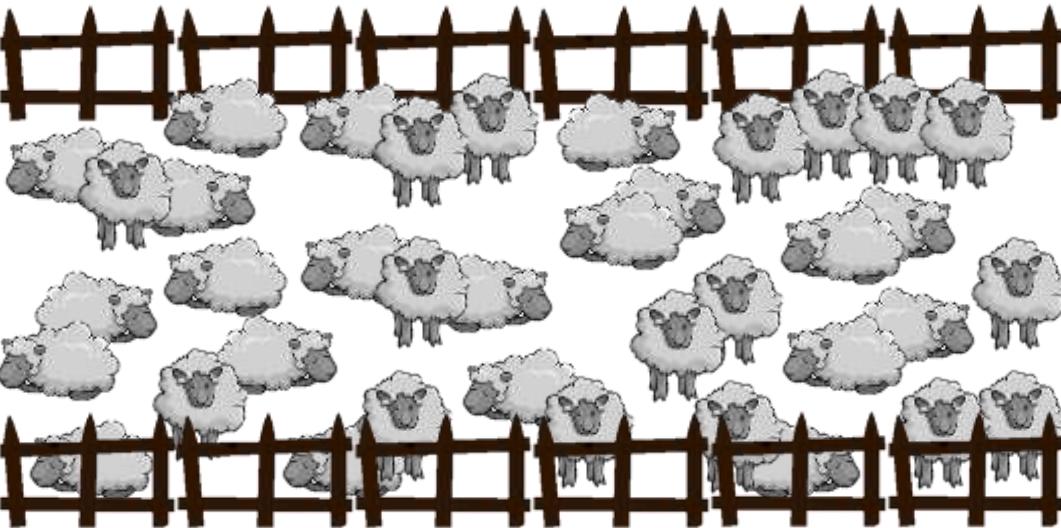
3.2 Diseño y justificación de las tareas

Las tareas que se presentan a continuación pretenden que en el trabajo de campo se generen espacios en los cuales los estudiantes desarrollen trabajo individual como en pequeños grupos. En el trabajo individual se espera que los estudiantes hagan sus primeras interpretaciones y den a conocer sus soluciones, las cuales serán compartidas y discutidas con los demás compañeros en el trabajo en pequeños grupos.

De este modo, en la primera tarea se pretendía que los estudiantes realizaran conteos para determinar la cantidad de ovejas que se encontraban en el rebaño, lo anterior con el

propósito de evidenciar estrategias sistemáticas de conteo como: tachar, colorear, encerrar, formar agrupaciones de dos, tres o cuatro elementos teniendo en cuenta la disposición espacial en la que se encuentran las ovejas en el rebaño, contar con unidades de conteo simples o complejas, entre otras. Además, se les solicita agrupar en decenas para que establecieran la equivalencia entre las unidades sueltas y las unidades de primer orden.

TAREA 1



1. ¿Cuántas ovejas hay en el rebaño?

2. Agrupa las ovejas en decenas.

3. ¿Cuántas unidades se deben agrupar para representarlas en una decena?

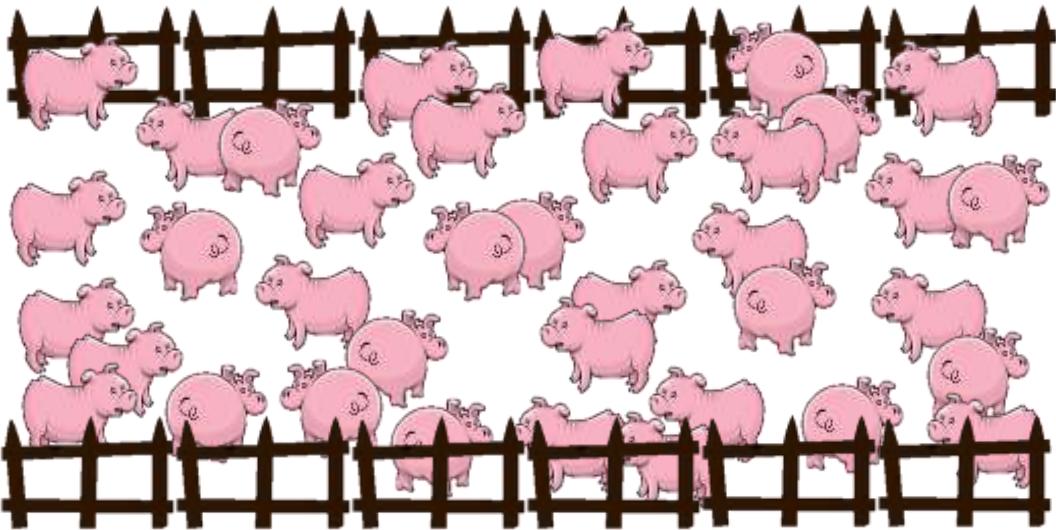
4. Dibuja las ovejas que hacen falta para formar cuatro decenas.

5. Juliana afirma que si se tuvieran ochenta y nueve ovejas en el rebaño, se obtendría 9 decenas y 8 unidades sueltas de ovejas. ¿Es verdadera o falsa la afirmación de Juliana?
¿Por qué?

Figura 6. Tarea 1. Agrupación en decenas del rebaño de ovejas.

A partir del establecimiento de la equivalencia entre las unidades y decenas se pretendía que los estudiantes adquirieran argumentos para que lograran discutir de manera individual como en pequeños grupos el ítem cinco de la tarea 1, en el cual debían validar la afirmación de Juliana. En esta afirmación se pretendía que los estudiantes utilizaran el valor posicional y las reglas que rigen el sistema de numeración base diez para lograr justificar si ésa era verdadera o falsa.

TAREA 2



1. ¿Cuántos cerdos hay en el corral?

2. Explica el procedimiento o estrategia utilizada para determinar cuántos cerdos hay en el corral. Nombra otra estrategia distinta a la propuesta que también puedes ser utilizada.

3. ¿Cuántas decenas y unidades de cerdos hacen falta para formarse una centena de cerdos en total? Explica cómo obtuviste el resultado.

4. ¿Cuántas decenas de cerdos son necesarias para formar una centena?

5. ¿Cuántos animales hay en total en la granja entre cerdos y ovejas? Explícale a uno de tus compañeros qué fue lo que hiciste.

6. Juliana necesita tener 190 cerdos en su granja. Si ella dispone de 36 cerdos, ¿cuántos cerdos le hacen falta? Explica la manera cómo llegaste al resultado.

7. Encuentra otra manera de obtener el mismo resultado.

Figura 7. Tarea 2. Agrupación del corral de cerdos en decenas.

En la tarea 2 se les propuso a los estudiantes contar los cerdos que había en el corral para verificar si se utilizaban las mismas estrategias sistemáticas de conteo o si emergían nuevas estrategias en comparación con la primera tarea. Estas estrategias desde la teoría de la objetivación pueden ser consideradas medios semióticos de objetivación puesto que son partes constitutivas y consustanciales del pensamiento de los estudiantes (Radford, 2006a).

Por otro lado, en el ítem 2 se les solicitó a los estudiantes que explicaran el procedimiento o estrategia utilizada para contar los cerdos, así mismo que propusieran otra diferente. De este modo, a partir de las reflexiones producidas por los estudiantes se pretendían que

intercambiaron ideas y las discutieran con otros, puesto que a través de la interacción social se favorecen procesos de toma de conciencia de formas de acción, expresión y reflexión que han sido constituidas histórica y culturalmente (Radford, 2006a, 2013c).

En los ítems 5 y 6 de la tarea 2 que consisten en determinar tanto la cantidad de animales que había en total en la granja entre cerdos y ovejas como la cantidad de cerdos que le hacían falta a Juliana para completar un corral con 190 cerdos se pretendían que los estudiantes se enfrentaran a situaciones concretas, inscritas en contextos con sentido para ellos en las cuales se requería de la operaciones aditivas. Lo anterior con el propósito de que pensaran aditivamente, es decir, pensaran de manera genuina, de forma personal, creativa, crítica y con cierta flexibilidad a medida que se van construyendo las operaciones de adición en diferentes situaciones.

La tercera tarea procuraba que los estudiantes utilizaran sumas para obtener cada una de las cantidades o valores dados, se tenía la conjectura de que los estudiantes utilizaran primero los billetes de mayor denominación para obtener la agrupación de mayor nivel (4.000), por ejemplo con dos billetes de 2.000, luego utilizaran los billetes o monedas de mayor denominación para obtener el 700. De este modo, los estudiantes que llegaran a proceder de esta manera estarían centrando la atención en el valor posicional de cada una de las cifras, así mismo estarían haciendo compensaciones, es decir, reconocer que el 700 se puede obtener como el resultado de la siguiente suma $200 + 200 + 200 + 100$ o como el resultado de $500 + 200$.

TAREA 3

1. Encontrar cinco maneras distintas de obtener 4.700 pesos, utilizando monedas con las siguientes denominaciones: 50, 100, 200, 500, 1.000 y billetes con los siguientes valores: 1.000, 2.000 y 5.000.

2. Explica la estrategia utilizada para encontrar las distintas maneras de obtener 4.700 pesos.

3. ¿Es posible encontrar otras maneras distintas a las anteriores de obtener 4.700 pesos, utilizando tanto las monedas como los billetes? ¿Qué se debe tener en cuenta para encontrar cada una de estas maneras?

4. Utilizando las monedas con las siguientes denominaciones: 50, 100, 200, 500, 1.000 o los billetes con los siguientes valores: 1.000, 2.000, 5.000, 10.000, 20.000 y 50.000 encontrar tres maneras distintas de obtener 45.750 pesos. Explica el procedimiento utilizado para encontrar cada una de las distintas maneras.

5. ¿Es posible a través de una manera de obtener 45.750 pesos encontrar las otras maneras de obtener el mismo valor? Explícale a tus compañeros porque es posible o porque no.

Figura 8. Tarea 3. Billetes y monedas.

En los ítems 3 y 5 se solicitó a los estudiantes que escribieran varias maneras de obtener el mismo resultado, con el propósito de que lograran establecer relaciones entre los sumandos de cada una de las maneras, por ejemplo una de las maneras de obtener el 4.700 sería a partir de los siguientes sumandos: $2.000 + 1.000 + 1.000 + 500 + 200$, de este modo, para encontrar otra manera ellos podrían descomponer uno de los billetes de 2.000 en dos de 1.000 y mantener los otros billetes y monedas, estableciendo así una relación entre los sumandos de las dos maneras de obtener el mismo valor numérico.

En el ítem 4 se pretendía observar si al aumentar el valor numérico a obtener los estudiantes abandonaban el uso tanto de los billetes como de las monedas para dar solución a la tarea, centrándose la atención únicamente en la utilización del lenguaje simbólico y de las operaciones aditivas. Lo anterior, posibilita que los estudiantes reduzcan la utilización de medios semióticos o por lo menos con menos intensidad que cuando trabajan con material concreto, como en este caso, los billetes y las monedas.

Esta reducción de medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes conducen a una capa o estrato de generalidad más profunda, lo que es denominado contracción semiótica (Radford, 2008b). La contracción semiótica dado que es uno de los

procesos de objetivación que se quieren indagar en esta investigación cobra vital importancia para dar respuesta a la pregunta de investigación propuesta.

TAREA 4

Esteban ahorra 1.800 pesos cada viernes y ese mismo día su abuela Teresa le regala 2.400 pesos para aumentar la cantidad de dinero ahorrado.

1. ¿Cuánto dinero ha logrado ahorrar Esteban hasta el tercer viernes?

2. ¿Al llegar el décimo viernes es posible que Esteban tenga ahorrado un valor superior a 50.000 pesos? Explica cómo hiciste para verificar la cantidad de dinero ahorrada por Esteban.

3. ¿Cuánto dinero le hace falta para alcanzar los 50.000 pesos? ¿Si ahorra una semana más será suficiente para alcanzar los 50.000 pesos?

Figura 9. Tarea 4. El ahorro de Esteban.

La cuarta tarea que fue implementada en el trabajo de campo, surgió a partir de la adaptación de una tarea propuesta por Radford en uno de sus trabajos (véase, Radford, 2008b), la cual tenía como contexto el ahorro semanal por parte de Marc y en la que se indaga por el dinero ahorrado en la tercera, quinta y centésima semana. La tarea propuesta por Radford difiere de la propuesta en esta investigación en el valor constante que se le va añadiendo al dinero ahorrado por Esteban y que corresponde al dinero que le regala su abuela Teresa.

Con esta tarea se busca que los estudiantes encuentren el dinero ahorrado por Esteban hasta el tercer y décimo viernes. Así mismo que verifiquen y justifiquen si el dinero ahorrado hasta el décimo viernes es superior a 50.000 pesos o por el contrario Esteban debe ahorrar durante más semanas.

3.3 Población, naturaleza de las sesiones de trabajo y proceso de recolección de la información

La investigación se desarrolló en el colegio Liceo Hermano Miguel de la Salle ubicado en la localidad de Barrios Unidos de la ciudad de Bogotá (Colombia). Este colegio hace parte de la Congregación de los Hermanos de las Escuelas Cristianas, es un colegio de carácter privado y tiene jornada única. El estudio se realizó con un grupo de 16 estudiantes de tercero de primaria, durante 12 sesiones de aproximadamente 1 hora cada una.

Las sesiones fueron dirigidas por una profesora externa al colegio³, mientras que el autor del presente estudio estuvo realizando las diferentes grabaciones en video de las sesiones de trabajo. La organización de las sesiones de trabajo con los niños se orientó desde los planteamientos propuestos por Vergel (2014). En este sentido, las sesiones estuvieron precedidas por socializaciones permanentes con la profesora en las cuales se analizaban y discutían aspectos asociados a las tareas tales como: la estructura, la pertinencia de éstas y la posible actuación en ellas por parte de los estudiantes.

La estructura de las sesiones, en general, (Radford, 2013c; Vergel, 2014) estuvo direccionada por los siguientes momentos, inicialmente la profesora hacía una pequeña contextualización de la actividad, seguido los estudiantes abordaban la actividad de manera individual, luego ellos trabajaban en grupos (cuatro estudiantes por grupo), con el propósito de realizar una discusión en pequeños grupos y finalmente, en la medida de lo posible se realizaba una discusión general con el grupo, la cual era dirigida por la profesora.

La profesora visitaba a cada uno de los pequeños grupos con el fin de hacer partícipes a algunos de los integrantes, solicitándoles exponer las soluciones a las diferentes tareas propuestas, confrontar las ideas entre los propios integrantes, además de cuestionar y hacer las aclaraciones necesarias. El interés central de la participación de la profesora en cada uno de los pequeños grupos consistía en fomentar el intercambio de ideas, la socialización de

³ La profesora es magistra en docencia de la matemática. Su tesis de maestría asumió como marco teórico la teoría cultural de la objetivación. De este modo, ella estaba familiarizada con algunas herramientas analíticas de la teoría, lo que le permitió disponer de algunos elementos teóricos para plantear sus propias preguntas e indagar por los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes al abordar cada una de las tareas propuestas.

las soluciones, la discusión entre los integrantes de los grupos y la formulación de preguntas por parte de ella y de los mismos estudiantes.

El diseño de las preguntas, la organización de las sesiones y de la interacción de los estudiantes constituyen un elemento fundamental en la teoría cultural de la objetivación (Miranda et al., 2013). Puesto que, el diseño de las preguntas y la organización interaccional son las bases de la actividad a través de la cual las formas de acción, expresión y reflexión asociadas al desarrollo del pensamiento aditivo van a desvelarse en la conciencia de los estudiantes.

La recolección de la información fue precedida por el diseño previo de las tareas de tipo aditivo en los naturales. El acopio se realizó en cuatro fases, siguiendo las orientaciones de Miranda, Radford & Guzmán (2007). Las cuáles fueron:

Fase 1: Grabación en video de las actividades de clase. Esta grabación se realizó únicamente con una cámara que capturó, en algunos momentos, la clase completa, y en otros, las discusiones de algunos de los pequeños grupos al momento de resolver las tareas propuestas.

Fase 2: Obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante. Si al finalizar la sesión la tarea propuesta no había sido terminada, las hojas de trabajo se recogían para digitalizarlas y se entregaban nuevamente en la siguiente sesión.

Fase 3: Transcripción de los videos correspondientes a las sesiones de trabajo. Se realizó la transcripción del discurso de los estudiantes durante la solución de las diferentes tareas propuestas.

Fase 4: Análisis de los videos y de las hojas de trabajo en las cuales se encontraron evidencias de la interacción social y de los procesos de resolución de las tareas de tipo aditivo en los naturales.

A partir de las cuatro fases y de sus respectivos análisis se pretendía estudiar los procesos que desarrollaban los estudiantes, más que en valorar las respuestas correctas o incorrectas (Goldin, 2000). De este modo, el interés se centró en detectar la emergencia de medios semióticos de objetivación y cierta evolución en éstos, con el propósito de dar cuenta de la

manera cómo unos eran sustituidos por otros, así mismo, en la identificación de elementos o indicios relacionados con las formas de acción, expresión y reflexión asociadas al desarrollo del pensamiento aditivo.

3.4 Constitución de los datos y descripción del análisis

Para la constitución de los datos de investigación se tomó como referencia el abordaje metodológico propuesto por (Soneira, 2006). De este modo el primer conjunto de datos está constituido por las diferentes transcripciones de los videos correspondientes a las 12 sesiones y las hojas de trabajo de cada uno de los estudiantes. La reducción y análisis de los datos fue orientado permanentemente por el foco teórico (Vergel, 2014), criterio fundamental a través del cual siempre estuvo presente tanto la pregunta de investigación como el objetivo propuesto en ésta, además de las herramientas analíticas de la teoría cultural de la objetivación. Lo anterior posibilitó separar aquello que realmente era pertinente de lo que no lo era.

En este sentido, a partir de la observación de las grabaciones en video y con el fin de realizar una reducción y selección rigurosa de los datos, se construyó una tabla (ver Tabla 2) para identificar aquellos segmentos de la actividad matemática realizada por los estudiantes en la cual se movilizaban medios semióticos de objetivación o se detectaban indicios relacionados con las formas de acción, expresión y reflexión asociadas al desarrollo del pensamiento aditivo.

En la tabla se utilizaron básicamente seis columnas, la primera de ellas para establecer el número de la sesión y la tarea que fue implementada, la segunda para delimitar el intervalo de tiempo en la grabación de video, la tercera se utilizó, con el propósito de hacer una pequeña contextualización e interpretación de lo que estaba sucediendo en el segmento de la actividad. Por su parte la cuarta columna se destinó para categorizar si la información correspondía a un proceso de objetivación, de lo contrario, si la información correspondía a la movilización de medios semióticos de objetivación se categoriza en la quinta columna y finalmente en la sexta se presenta la transcripción del segmento de la actividad. A continuación se presenta un breve ejemplo de la manera como se organiza la información en la tabla.

| Organización y sistematización del primer conjunto de datos | | | | | |
|---|---------------------|--|---|---|---------------|
| Nº de la sesión | Intervalo de tiempo | Contextualización Interpretación | Proceso de objetivación | Medios semióticos | Transcripción |
| Nº de la tarea | | | | | |
| Sesión 1 | 8:05 – 9:22 | Samuel Cabezas para explicar a la profesora como puede desarrollar la tarea propuesta describe a través de un movimiento la trayectoria de un círculo simultáneamente que utiliza la expresión aquí podría hacer un círculo. | No se evidencia proceso de objetivación | Movimiento del lápiz (Gesto indexical espacial). La expresión utilizada para comunicar la manera como se puede hacer el agrupamiento. La inscripción en el papel. | |
| Tarea 1 | | | | | |

Tabla 2. Ejemplo de la organización y sistematización de los datos.

Una vez organizados y sistematizados los segmentos de la actividad en la tabla, se inició la consolidación de los datos de investigación, los cuales son analizados desde las herramientas analíticas de la Teoría Cultural de la Objetivación y contribuyen a dar respuesta a la pregunta de investigación propuesta en este estudio. Los datos están constituidos por un segmento de la transcripción de la grabación en video, acompañado por una o varias imágenes del video que pretenden describir los medios semióticos movilizados por los estudiantes. Así mismo, por imágenes de las hojas de trabajo, las cuales son evidencia de la actividad matemática realizada por ellos. Por otro lado, el dato está acompañado por el respectivo análisis de los medios semióticos movilizados y su evolución, así mismo como los procesos de objetivación desarrollados desde las herramientas analíticas de la teoría cultural de la objetivación.

La manera como el dato es constituido y se realiza su respectivo análisis en la investigación está justificado teóricamente desde una concepción multimodal del pensamiento (Arzarello, 2006; Miranda, Radford, & Guzmán, 2007; Vergel, 2014) dado que el análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes sistemas semióticos movilizados en la actividad matemática (el sistema semiótico del lenguaje escrito, el del lenguaje hablado, el de los gestos, el de las acciones, etc.). Es por esta razón, que ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes será analizado de manera aislada, en consecuencia a partir de

los videos, se pretende dar cuenta de los procesos de objetivación y los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes.

La constitución del dato y el análisis de un ejemplo de éstos no serán presentados, puesto que este corresponde al siguiente capítulo.

Capítulo 4

Análisis multimodal

En este capítulo se presenta el análisis de las formas de acción, expresión y reflexión asociadas al desarrollo del pensamiento aditivo de los estudiantes de grado tercero al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales. De este modo, dada la naturaleza de la investigación y la pregunta formulada, la atención se centrará en la interacción discursiva de los estudiantes a través de las transcripciones de las videogramaciones, así mismo, en las producciones de la actividad matemática registradas en las hojas de trabajo. En concordancia con la perspectiva de la Teoría Cultural de la Objetivación (Radford, 2006a, 2013c) el análisis de los datos está basado en una concepción multimodal del pensamiento humano (Arzarello, 2006).

Esta concepción multimodal del pensamiento humano plantea que el análisis de los datos debe tener en cuenta la relación entre los diferentes sistemas semióticos movilizados por los estudiantes en el transcurso de la actividad (el sistema semiótico del lenguaje escrito, el del lenguaje hablado, el de los gestos, el de las acciones, etc.). Es por esta razón, que ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gestuado por los estudiantes es analizado de manera aislada, por el contrario, estas formas de reflexión, expresión y acción son estudiadas como partes constitutivas de los procesos de objetivación.

De este modo, no solo se tendrá en cuenta lo que expresan los estudiantes a través de lo que dicen o escriben sino que éstos serán acompañados de los recursos físicos, perceptuales, de la corporeidad de las acciones y los gestos cuando los estudiantes trabajen con las ideas matemáticas, puesto que es importante la inclusión del cuerpo en el acto de conocer.

En la siguiente sección se presentarán algunos episodios de la discusión de los estudiantes al abordar las diferentes tareas propuestas en la investigación.

Episodio 1. Tarea 1. Agrupación de unidades sueltas de ovejas en decenas.

L1: Profesora: Ah listo perfecto entonces otra vez. Entonces a ver, ¿aquí tú qué hiciste? Entonces, tú colocaste todos los números y las contaste. [*Desliza su dedo índice sobre la hoja de trabajo de un lado al otro*]. Listo, entonces ahorita me dices que tienes que

agruparlas en decenas. [Señala con su dedo índice el enunciado del ítem dos de la tarea]
Entonces hazlo, agrúpalas en decenas. Agrupa diez.

L2: Samuel: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. [Señala con el lápiz cada una de las ovejas contadas simultáneamente que nombra cada palabra que refiere a cada número].

L3: Profesora: ¿Y cómo haces para las otras? [Refiriéndose a las demás ovejas que conforman el rebaño].

L4: Samuel: En grupos. Puede ser [Describe la trayectoria de una circunferencia en el aire con su lápiz].

L5: Profesora: ¿En grupos? ¿Cómo sería en grupos?

L6: Samuel: Pues en círculos podría ser.

L7: Profesora: Bueno enséñame, enséñame, enséñame. ¿Cómo sería?

L8: Samuel: Aquí podría hacer un círculo y escribir. [Describe la trayectoria de una circunferencia sobre la hoja de trabajo con su lápiz]. Hacer una flecha y arriba de la flecha escribir grupo 1. [Mientras que Samuel dice lo que puede hacer, simultáneamente lo acompaña de diferentes gestos que manifiestan las acciones que va enunciando].

L9: Profesora: Esa idea está muy buena

L10: Samuel: Luego con las ocho que me quedarían cómo hago.

L11: Profesora: Pues ahora agrúpalas con las que sí se pueden. Listo. Así como me dijiste, pero dale. [Simultáneamente Samuel cuenta una decena de ovejas del rebaño] [La profesora se retira].

L12: Samuel: Entonces voy a hacer de a grupos [Dibuja una circunferencia en su hoja de trabajo].

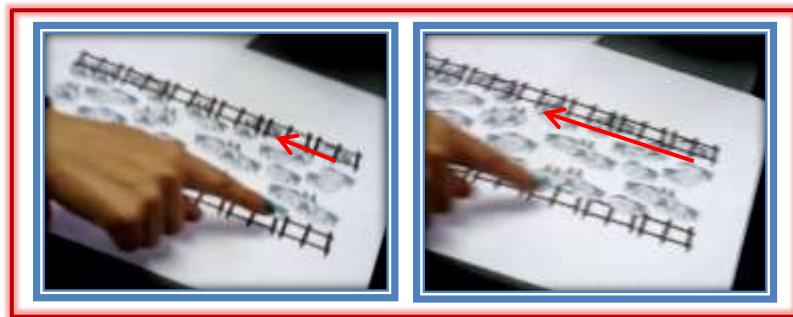


Figura 10. Gesto utilizado por la profesora para llamar la atención de Samuel acerca de la forma sistemática como ha contado las ovejas.

En una labor conjunta en la actividad de enseñanza y aprendizaje (Radford, 2013b, 2013c) la profesora a través del gesto utilizado y la coordinación de éste con las expresiones lingüísticas utilizadas (L1), tiene como intención que Samuel tome conciencia de la forma sistemática como ha contado las ovejas. De este modo, ella pretende que Samuel centre la atención en las ovejas y en la manera como fue numerada cada una de ellas, dado que la manera como las ha contado es una instancia del saber asociada al conteo, más específicamente a la utilización de estrategias sistemáticas de conteo, que le posibilitan diferenciar los objetos contados de aquellos que no lo han sido y además le permiten determinar el cardinal de las ovejas contadas en cualquier momento, sin tener la necesidad de recurrir o retomar el conteo desde el inicio.

Esta estrategia sistemática de conteo utilizada por Samuel y la manera como ésta contribuye a determinar con facilidad el cardinal de ovejas contadas en cualquier momento en la realización del conteo desde la Teoría Cultural de la Objetivación son consideradas formas de acción, reflexión y expresión (Radford, 2011b, 2013c). Formas que han sido codificadas en la cultura, es decir, se han convertido en patrones fijos de acción que son reproducibles de una cultura a otra en la actividad laboral y la experiencia sensual de los individuos (Radford, 2006a).

Además, la diferenciación entre las ovejas contadas de las no contadas (diferenciación entre las ovejas numeradas de las que no habían sido numeradas), le ha posibilitado a Samuel por un lado orientarse en el espacio (rebaño de las ovejas) erradicando que se pierda en el conteo que está realizando y que por el otro organice sus acciones, puesto que así puede

determinar qué ovejas hacen falta por contar sin importar el orden en que estas sean contadas.

La profesora luego de retomar la manera cómo había contado las ovejas Samuel, le pide que agrupe diez de las ovejas que se encuentran en el rebaño (L1). Dada la sugerencia de la profesora, Samuel cuenta diez de éstas asignando cada palabra que hace alusión a cada número simultáneamente que señala con el lápiz cada una de éstas (L2). A través del gesto realizado (señalamiento con el lápiz), de las expresiones lingüísticas utilizadas y de la actividad perceptual realizada por Samuel se puede inferir que está movilizando sincrónicamente en su actividad matemática varios medios semióticos de objetivación. Desde la Teoría Cultural de la Objetivación esta sincronización es denominada nodo semiótico (Radford, 2008b).

Una vez contadas las diez ovejas, la profesora pregunta a Samuel acerca de la manera cómo puede agrupar las que hacen faltar (L3), a lo que responde que en grupos. En la intervención de la profesora se puede inferir que ella pretende que Samuel replique la acción que fue realizada con anterioridad y que está asociada al agrupamiento de las ovejas en decenas, puesto que la profesora conoce que se pueden formar en total 3 decenas (agrupaciones de diez ovejas) y sobran 8 unidades. De este modo, a través de la discusión entre la profesora y Samuel se puede sugerir que está emergiendo en la labor conjunta indicios del proceso de objetivación denominado iconicidad (Radford, 2008b), puesto que Samuel más adelante utilizará esta acción para afrontar la tarea propuesta por la profesora.

Por otro lado, ella con la pregunta planteada a Samuel quiere hacer aparecer una forma de reflexión y acción asociada al agrupamiento de unidades sueltas en unidades de orden superior en el sistema de numeración base diez. Forma que la profesora quiere que sea interiorizada por Samuel con el propósito de que adquiera un grado de integibilidad y de conciencia más profunda (Radford, 2006a, 2008b). En este sentido, puede delimitarse que el agrupamiento de unidades sueltas en unidades de orden superior es considerado uno de los vectores que caracterizan el desarrollo del pensamiento aditivo y dan cuenta de la manifestación de éste.

Dada la inquietud de la profesora de cómo sería en grupos, Samuel complementa su intervención afirmando que se puede agrupar en círculos, (L3 – L5). Sin embargo, antes de que explicara que se pueden agrupar en círculos, Samuel describe a través de un gesto la trayectoria de una circunferencia en el aire (L4). Esta acción semiótica le permite tomar conciencia de algo que es diferente a lo que está dibujado en la hoja de trabajo porque al encerrar la decena de ovejas en un círculo como Samuel lo propone le permite capturar la idea de agrupamiento, puesto que el rebaño de ovejas ya no es un puchado de ovejas sueltas sino una agrupación de varias decenas y algunas unidades sueltas.

Obsérvese que la forma de mirar el conjunto de ovejas por parte de Samuel es más refinada, al parecer él hace un trabajo en el terreno fenomenológico el cual le permite agrupar de una cierta manera. En términos Radford (2010c), hay evidencia de una serie de determinaciones sensibles las cuales sugieren una domesticación del ojo. En efecto, puede plantearse que el ojo se va convirtiendo progresivamente en un órgano teórico. Vale la pena destacar aquí que este proceso progresivo está influenciado por la tarea y la actividad conjunta o labor que promueve la profesora con el estudiante.

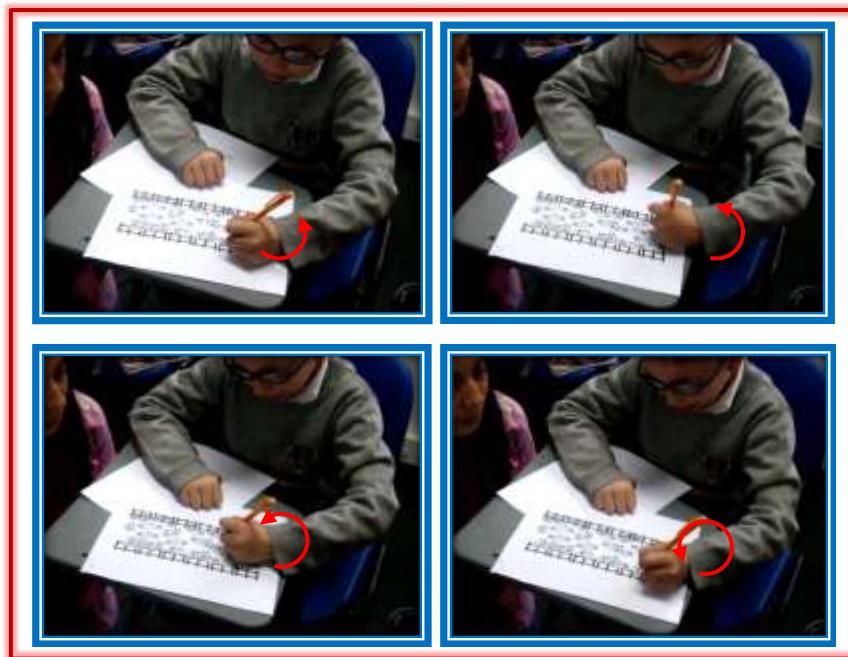


Figura 11. Gesto realizado por Samuel Cabezas en el cual describe la trayectoria de una circunferencia para explicar la manera cómo se pueden agrupar en decenas las ovejas.

Además, este gesto realizado por Samuel hace parte de su planeación conceptual dado que le permite organizar tanto su pensamiento como sus acciones en el tiempo y en el espacio. Lo anterior se evidencia cuando él organiza las acciones que pretende desarrollar luego de la petición de la profesora de cómo sería el agrupamiento de las ovejas en círculos (L6). Esta organización de las acciones es dada a conocer a la profesora a través de la sincronización entre lo que dice utilizando el lenguaje hablado y los diferentes gestos que acompañan estas expresiones lingüísticas, los cuales no son plasmadas en el papel de manera inmediata (L7). Como afirman Miranda et al. (2013) los gestos utilizados por los estudiantes en la actividad matemática de manera deliberada les permite organizar sus acciones en un tiempo y en un espacio determinado.

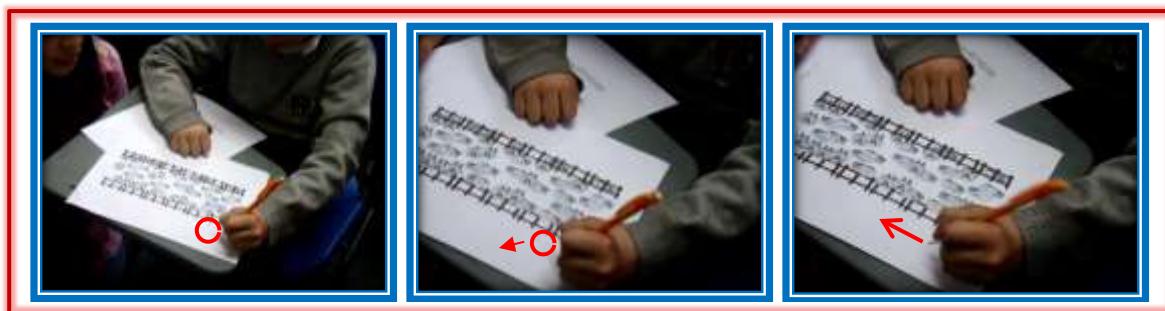


Figura 12. Gestos que acompañan las expresiones lingüísticas utilizadas por Samuel para explicar cómo se pueden agrupar las ovejas en decenas.

En este sentido, estos gestos y expresiones lingüísticas son realizados para él y para la profesora con el propósito de comunicar una intención que posteriormente se convertirá en acción reproducible, dado que será plasmada en la hoja de trabajo, en la actividad matemática que desarrollará más adelante Samuel (L12). Como se puede observar en la Figura 12, Samuel al dar solución al ítem 2 de la tarea recurre al encerramiento de diez ovejas y a la asignación de un nombre a cada agrupación formada (grupo 1, grupo 2 y grupo 3). De este modo en términos matemáticos, se está estableciendo una función entre la cantidad de ovejas del grupo y el número del grupo (i.e., para un grupo de diez ovejas se asigna el grupo número uno), asignación que establece por medio de una flecha tal cual como se lo había explicado a la profesora (L7).

Así mismo recurre a la elaboración de dibujos (i.e., circunferencias) para representar cada una de las decenas de ovejas formadas. Estas acciones utilizadas por Samuel para representar y formar las diferentes decenas hacen que en la actividad matemática se

instancie una forma de acción, expresión y reflexión asociada al agrupamiento, la cual que le permite dotar de sentido este concepto matemático. De este modo, se reconoce que esta idea de agrupamiento funge como una característica fundamental del pensamiento aditivo, forma de pensamiento que ha sido codificada histórica y culturalmente.

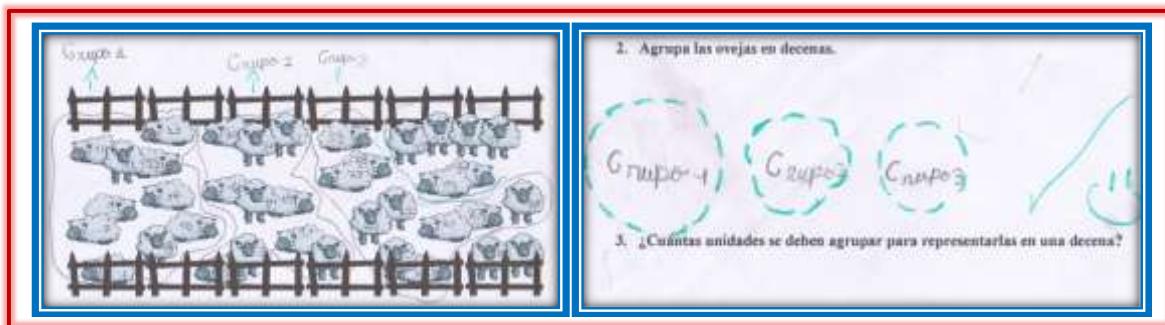


Figura 13. Producción de Samuel sobre el agrupamiento de las ovejas decenas

Episodio 2. Tarea 1. ¿9 decenas y 8 unidades o 8 decenas y 9 unidades?

L1. Profesora: Me van a ayudar con esto [refiriéndose al ítem cinco de la tarea número 1].

L2. Mariana: Esa es la que yo tengo la duda.

L3. Profesora: Miren, vamos a hacer lo siguiente. Esto dice Juliana pero vamos a suponer que no es Juliana sino que soy yo. Vale. Johanna afirma que si se tuvieran ochenta y nueve ovejas en el rebaño, se obtendría 9 decenas y 8 unidades. ¿Eso está bien o eso está mal? Yo les digo tengo ochenta y nueve ovejas y eso equivale a 9 decenas y 8 unidades [*Desliza en el aire su dedo índice primero de derecha a izquierda y luego de izquierda a derecha para retomar su posición inicial*].

L4. Alberto: Está mal.

L5. Profesora: ¿Por qué está mal?

L6. Valentina: Porque cada unidad de diez, porque cada decena representa... [*Interrumpe la profesora*].

L7. Profesora: ¿Cada decena?

L8. Valentina. O sea cada grupo. Cada grupo se debe formar con diez. Entonces ochenta y nueve sería ocho y además no alcanza porque faltaría un número.

L9. Profesora: Bien. ¿Quién más me dice porque está mal?

L10. Samuel: Porque ahí dice que son ochenta y nueve. Y es falso porque si dice que hay ochenta nueve sería ocho decenas y nueve unidades [*Simultáneamente que habla moviliza su mano de izquierda a derecha*].

L11: Profesora: Bien, Me van a comprobar esto. Es que yo todavía no lo entiendo [*Interrumpe Valentina*].

L12: Valentina: Yo ya lo comprobé [*Levanta su hoja de trabajo para mostrársela a la profesora*]. Yo ya lo comprobé.

L13: Profesora: Ven. Esperen un momento. Miremos lo que hizo Valentina. Bueno explícanos Valentina. Cuéntanos.

L14: Valentina: Ahí van los números [*Desliza su dedo índice sobre la hoja de trabajo de izquierda a derecha*] hasta ochenta y nueve [*Señala con su dedo índice de la mano izquierda el número ochenta y nueve que se encuentra escrito en su hoja de trabajo*]. Aquí hay una agrupación de diez [*Señala el número uno que representa la primera agrupación de números*]. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho [*Señala cada uno de los números escritos en la hoja de trabajo, los cuales representan a cada una de las agrupaciones formadas*].

L15: Profesora: Ocho porque tengo ochenta y nueve [*Señala el número ocho que representa la octava agrupación formada*]. Cierto. ¿Y me sobran cuántas?

L16: Mariana: Ocho. Sobran ocho ovejas.

L17: Profesora: No porque tengo ochenta y nueve. Esteban. Mira lo que hizo Valentina. ¿Ella armó cuántos grupos de diez?

L18: Alberto: Ocho.

L19: Profesora: Escribió todos los números hasta el ochenta y confirmó que había ocho grupos [*Desliza su dedo índice sobre la hoja de trabajo, describiendo la trayectoria de una*

circunferencia] ¿Estamos de acuerdo? ¿Todo mundo está de acuerdo con lo que hizo Valentina?

L20: Mariana: Sí.

La profesora, con el propósito de generar la discusión en el grupo en relación con el ítem cinco de la tarea 1, realiza un mayor acercamiento a éste, asumiendo el papel del personaje nombrado allí (L3). De este modo, realiza la lectura del ítem, para luego preguntar acerca de la validez de la afirmación realizada por Johanna (L3), a lo que Valentina responde que está mal porque cada grupo se debe conformar con diez, entonces ochenta y nueve sería ocho grupos y faltaría un número (i.e., una unidad) para completar otro grupo (i.e., decena) (L8). Como se puede observar, en la intervención realizada por Valentina se puede evidenciar la movilización del medio semiótico del lenguaje hablado, a través del cual hace explícito los significados que ha elaborado en relación con las agrupaciones de primer nivel y las unidades sueltas (i.e., decenas y unidades) dadas las expresiones lingüísticas utilizadas por ella para referirse a éstas tales como: grupo de diez, faltaría un número.

Una vez expuesta la respuesta de Valentina en relación con la pregunta, la profesora solicita a alguien más explicar por qué está mal la afirmación de Johanna, con el propósito de generar la discusión en el grupo. De este modo, Samuel toma la palabra para dar a conocer que la afirmación está mal porque allí se plantea que son ochenta y nueve ovejas, lo que equivale a decir que son ocho decenas y nueve unidades (L10). Esta justificación realizada por Samuel es acompañada sincrónicamente por el uso de gestos, más específicamente por el movimiento de su mano de izquierda a derecha, movimiento que es realizado en el aire y a través del cual hace visible y dota de significado la posicionalidad de cada una de las unidades de orden superior del número ochenta y nueve.

A través de este gesto, Samuel está instanciado una forma de expresión, acción y reflexión asociada al valor posicional de cada una de las cifras que componen el número 89, puesto que la posición en la cual se encuentra la mano; determina la diferencia entre las agrupaciones de primer nivel (i.e., decenas) y las unidades sueltas, y a su vez asigna el correspondiente valor posicional de cada cifra.

En esta pieza de la actividad el gesto aparece como consecuencia de una imaginación productiva (Kant, 2007), es decir una creación por parte de Samuel que media la actividad y más específicamente la significación con la que ha denotado a las decenas y a las unidades. Como afirma Wertsch (citado en Radford, 2006b) los signos y artefactos no son considerados simplemente como elementos periféricos de la actividad, ni hacen que la actividad se realice de manera más fácil sino que se convierten en parte consustancial de la actividad.



Figura 14. Gesto utilizado por Samuel para significar el valor posicional de cada una de las unidades de orden superior del número ochenta y nueve.

Valentina al darse cuenta que la profesora no comprendía las intervenciones de los integrantes del grupo acude a la presentación de su producción matemática consignada en su hoja de trabajo con bastante insistencia (L12). De este modo, ella para comunicar la solución al ítem recurre a la movilización de varios medios semióticos de objetivación. Inicialmente, ella recurre al desplazamiento de su dedo índice de la mano derecha sobre la hoja de trabajo de un lado a otro para capturar la secuencia de números escritos allí, con la intención de hacer visible a la profesora y a los demás integrantes del grupo la manera como la tarea estaba siendo abordada por ella.

Este gesto indexical espacial utilizado por Valentina es acompañado con la expresión lingüística ahí van los números (L14). Simultáneamente que termina de hacer el deslizamiento y utilizar la expresión lingüística, señala el número ochenta y nueve con el dedo índice de su mano izquierda, con el propósito de marcar la cardinalidad del conjunto de números escritos en su hoja de trabajo.

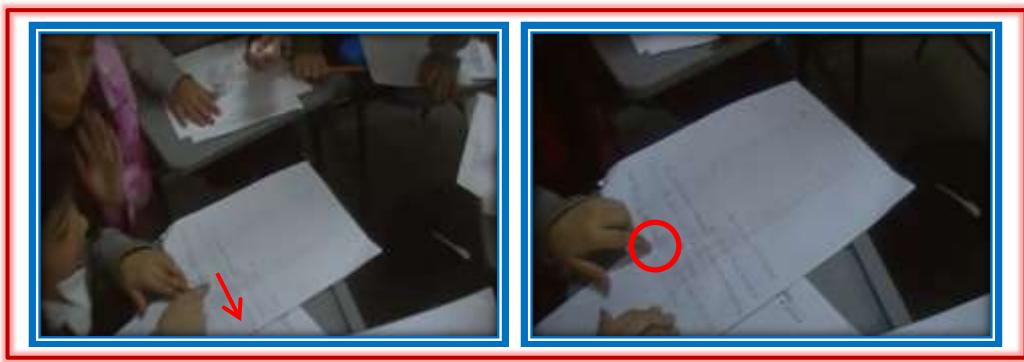


Figura 15. Secuencia de gestos realizados por Valentina para mostrar la secuencia de números escritos en la hoja de trabajo y el cardinal de ésta.

Continuando con su intervención, Valentina señala con su dedo índice el número uno (i.e., cardinal) que representa la primera agrupación formada con los diez primeros números escritos simultáneamente que dice aquí hay una agrupación de diez. La palabra aquí, utilizada hace visible una coordinación entre lo que quiere comunicar por medio del lenguaje hablado y lo que quiere comunicar a través del gesto utilizado. Gesto que es plasmado en la realidad, puesto que pretende comunicar la manera como ella percibe las diferentes agrupaciones de diez números que se pueden formar. Esta coordinación entre los gestos realizados y las expresiones lingüísticas utilizados dan cuenta de un nodo semiótico (Radford, 2008b).

De manera similar, continuando con su intervención, señala con su dedo índice cada uno de los cardinales que representan a cada una de las agrupaciones formadas (i.e., agrupación de una decena de números escritos en la hoja de trabajo) simultáneamente que nombra la palabra que refiere a cada número y que está asociada a cada agrupación (L14). Aquí la coordinación de gestos y palabras utilizadas junto con la actividad perceptual constituye un nodo semiótico (Radford, 2008b), actividad semiótica que le permite evocar y hacer presente las formas de acción, reflexión y expresión utilizadas por ella para alcanzar las metas propuestas por la profesora en relación con la solución del ítem cinco de la tarea 1. En este sentido los gestos y las expresiones lingüísticas movilizadas por Valentina son hechos para ella, para los otros integrantes del grupo y para la misma profesora.

Estos medios semióticos de objetivación movilizados en la labor conjunta que se despliega en la actividad matemática desarrollada por Valentina se convierten en elementos

constitutivos y mediadores de la actividad reflexiva que está realizando ella porque está pensado con ellos y a través de ellos. Como afirma Geertz (citado en Radford, 2006a) el cerebro humano es completamente dependiente de recursos culturales para su propia operación, por esta razón no pueden concebirse como simples objetos añadidos a la actividad mental sino como elementos constituyentes de ésta.

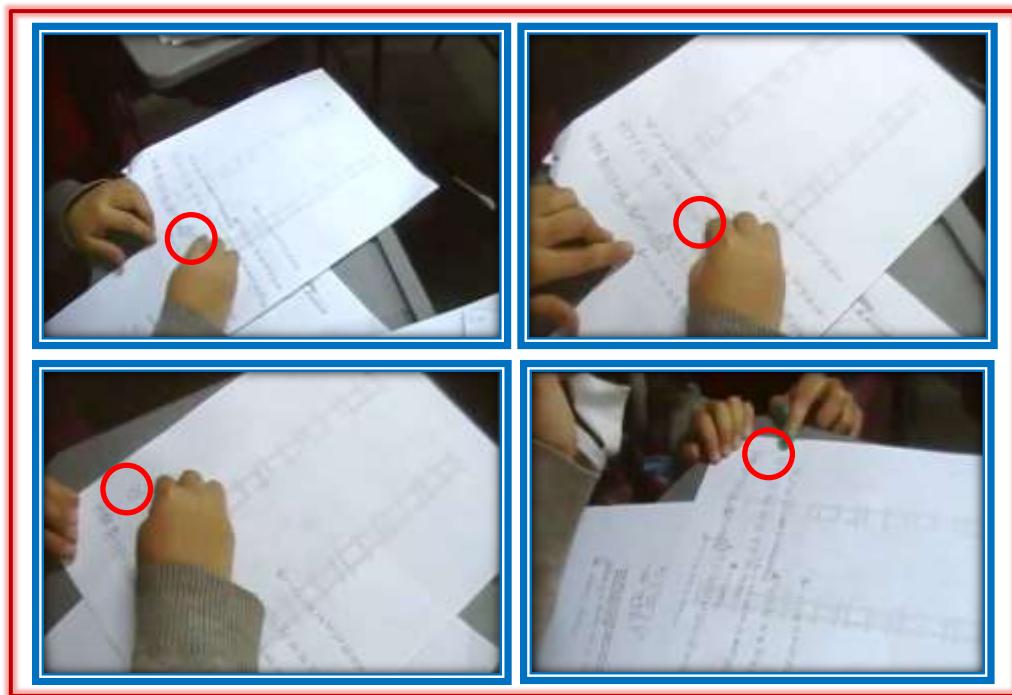


Figura 16. Señalamiento de cada una de las agrupaciones formadas en la hoja de trabajo.

No obstante, en su actividad reflexiva Valentina establece un criterio espacial para organizar cada uno de los grupos (i.e., agrupación de una decena de números), puesto que cada grupo está escrito solamente en una línea y no como una secuencia de números seguidos unos de otros hasta el número ochenta y nueve. Esta disposición espacial utilizada por Valentina para organizar los números hasta el ochenta y nueve pretende hacer visible una nueva forma de percibir las decenas construidas, que se constituye en un elemento importante del proceso de objetivación de la decena.

Además, a cada uno de estos grupos asigna su respectivo cardinal para comunicar cada uno de los grupos que se pueden formar, posibilitando que no se requiera del conteo para establecer la cantidad de grupos formados. Sin embargo, a la última agrupación formada no

le asignó un cardinal puesto que no se completaba una decena de números en el grupo (L14), aun así ella toma conciencia de que se requiere de un número más (i.e., una unidad) para formar otra decena y así completar otra agrupación de diez (L8).

En síntesis, la actividad perceptual, los gestos y las expresiones lingüísticas utilizadas por Valentina intentan comunicar y hacer visible a los ojos y a la conciencia de los demás integrantes del grupo y de la misma profesora las formas de acción, expresión y reflexión utilizadas por ella para dar solución al ítem cinco de la tarea propuesta. Así mismo, la profesora con el propósito de promover la toma de conciencia y la capacidad para discernir de manera crítica por parte de los demás integrantes del grupo, las formas utilizadas por Valentina para abordar la tarea desliza su dedo índice sobre la hoja de trabajo (L18). Lo anterior para capturar la manera cómo Valentina organizó en la hoja de trabajo la secuencia de números y los diferentes grupos de diez que le fue posible conformar.

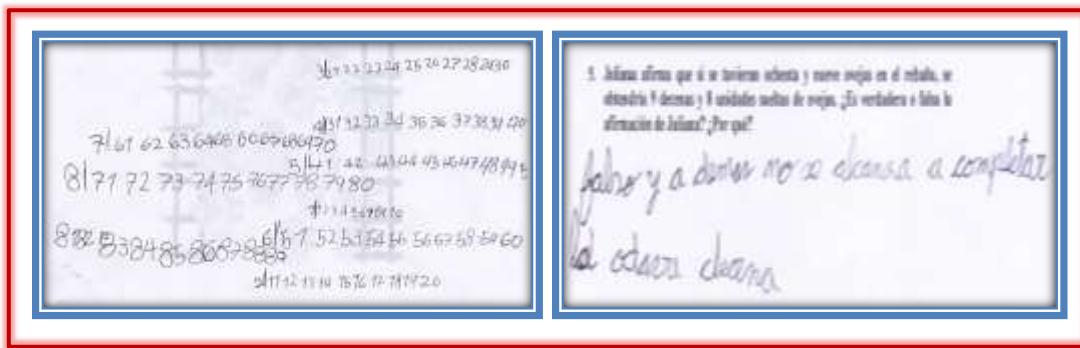


Figura 17. Producción de Valentina sobre las agrupaciones formadas con decenas de números y su respectiva conclusión.

Esta movilización de medios semióticos de objetivación por parte de Valentina y de la profesora hace posible que Mariana, otra de las integrantes del grupo, modifique la duda que tenía en relación con la solución del ítem cinco, puesto que ella inicialmente presentó cierta inconformidad con el ítem propuesto en la tarea (L2), pero a medida que Valentina comunicaba su solución, empezó a discutir resolviendo algunas de las preguntas planteadas por la profesora (L16) hasta el punto de afirmar que estaba de acuerdo con lo que hizo Valentina (L20).

En este sentido, en la labor conjunta que se da en el proceso de aprendizaje y enseñanza entre el grupo de trabajo y la profesora emerge un proceso de objetivación, en términos de Radford (2014) es denominado un proceso social, sensible y emocional de toma de

conciencia de formas de expresión, acción y reflexión constituidas histórica y culturalmente y que son mediatizadas por el uso de artefactos, lenguajes, gestos y movimientos corpóreos. Como afirma Leontiev (citado en Radford, 2014) la actividad del sujeto es fuente consustancial de su conciencia y así mismo de la realización de éste, puesto que la conciencia es una relación entre mundo y la experiencia social.

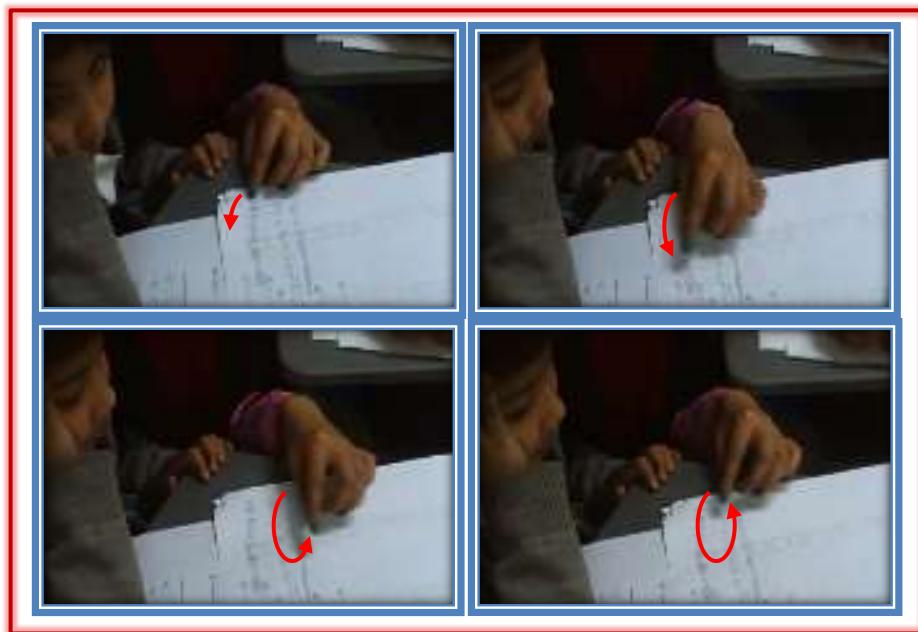


Figura 18. Gestos realizados por la profesora para llamar la atención de los estudiantes del grupo en relación con las formas de reflexión, expresión y acción utilizadas por Valentina para abordar la tarea.

Episodio 3. Tarea 2. Contando de diez en diez para llegar a ciento noventa.

L1: Profesora: Muy bien, ahora el sexto [Refiriéndose al ítem número seis de la tarea dos]. Quiero que hagan el sexto. Todo el mundo hace el sexto. ¿Cómo hacen el sexto? Entonces, primero Valentina lo lee. Vamos a escuchar. Valentina léelo.

L2: Valentina: Juliana necesita tener 190 cerdos en su granja. Si ella dispone de 36 cerdos. ¿Cuántos cerdos le hacen falta? Explica la manera cómo llegaste al resultado. Encuentra otra manera de obtener el mismo resultado.

L3: Alberto: Es setenta y cuatro.

L4: Profesora: Setenta y cuatro. Explícanos por qué.

L5: Alberto: Porque a treinta y seis le faltan setenta y cuatro para llegar a ciento noventa.

L6: Profesora: Setenta y cuatro. ¿Sí? ¿Estamos todos de acuerdo? Ella tiene treinta y seis cerdos. ¿Sí? A ver. Treinta y seis cerdos. Tu qué dices [*Dirigiéndose a Samuel quien se encuentra contando con sus dedos*].

L7: Samuel: Estoy contando

L8: Profesora: Estás contando. ¿Cómo estás contando?

L9: Samuel: Estoy contando de diez en diez pero con el seis adicionarlo y después el número que me dé en las manos entonces le quito los seis.

L10: Profesora: ¡Uy! Eso está muy chévere. Hazlo con tus manos. Pero hazlo con tus manitas. ¿Cómo? ¿Cómo lo sumas de diez en diez?

L11: Samuel: Ahí hay treinta y seis cerdos [*Señala el número treinta y seis que aparece en el enunciado de ítem número seis*] cuarenta y seis, cincuenta y seis, setenta y seis, ochenta y seis, noventa y seis, ciento seis, ciento dieciséis, ciento veintiséis, ciento treinta y seis, ciento cuarenta y seis, ciento cincuenta y seis, ciento sesenta y seis, ciento setenta y seis, ciento ochenta seis, ciento noventa y seis [*Al mismo tiempo que flexiona cada uno de sus dedos oraliza la palabra que refiere a cada número, así mismo cada vez que utiliza por completo los dedos de sus manos cierra éstas*]. [*La profesora complementa simultáneamente algunos de los resultados nombrados por Samuel, además los tres primeros de éstos los sincroniza con el señalamiento de cada uno de los dedos levantados por Samuel con su dedo índice*].

L12: Profesora: ¿Y cuántas? [*Refiriéndose a la cantidad de decenas que añadió*].

L13: Samuel: Me dio dieciséis. Entonces como ahí hay treinta y seis [*Observa y señala con su lápiz el numero treinta y seis que aparece en el enunciado del ítem número seis*]. Habían seis unidades, entonces voy a poner las que faltan que serían diez.

L14: Profesora: Diez y entonces en total cuántos [*Interrumpe Samuel*].

L15: Samuel: Digo cuatro, cuatro, cuatro.

L16: Profesora: Y en total entonces cuántos.

L17: Samuel: Sería ciento sesenta y cuatro.

Luego de ser leído el ítem 6 de la tarea número 2 por Valentina, Alberto interviene para dar a conocer la respuesta encontrada por él, afirmando que hacen falta setenta y cuatro cérdos (L3). Dada la respuesta, la profesora interviene para solicitarle que explique por qué setenta y cuatro, a lo que responde que para llegar a ciento noventa le hacen falta setenta y cuatro a treinta y seis. No convencida con la explicación de Alberto pregunta a los demás integrantes del grupo si están de acuerdo con la respuesta. Sin embargo, ella al notar que Samuel estaba contando con sus dedos le solicita que dé a conocer su punto de vista, quien hace explícito que está contando (L6 – L7).

De este modo, la profesora le solicita que explique cómo está contando, a lo que Samuel le responde que está contando de diez en diez, adicionando las seis unidades del número treinta y seis, para luego restarle esas misma seis unidades al resultado obtenido en sus manos (i.e., resultado del producto entre el número de veces que levanta los dedos Samuel y el número diez que representa cada dedo levantado). Con el propósito de generar la discusión en el grupo y resaltar la forma de acción, reflexión y expresión utilizada por Samuel para abordar el ítem 6 la profesora solicita con bastante insistencia que sume de diez en diez con sus dedos (L10).

Por otro lado, la profesora a través de su intervención quiere hacer explícito a los demás integrantes del grupo la toma de conciencia de Samuel en relación con la manera cómo está haciendo el conteo a través de la utilización de sus dedos, puesto que para la profesora la utilización de los dedos tiene una intención y más aún, una manera de comunicar y de materializar lo que está pensando Samuel, es decir la manera como está reflexionando y expresando la posible solución al ítem 6 de la tarea propuesta.

Samuel inicia su explicación levantando con su dedo pulgar de la mano izquierda su dedo meñique de la mano derecha, simultáneamente que nombra el resultado que se obtiene al añadir la primera decena al número treinta y seis. En este sentido, establece una coordinación entre la actividad perceptual, los gestos realizados y las elocuciones, permitiendo en términos matemáticos establecer una función biunívoca entre la decena

añadida al número treinta y seis y el dedo utilizado para representar dicha decena. Así mismo, al tocar con su dedo pulgar de la mano izquierda su dedo meñique de la mano derecha está haciendo visible a sus demás compañeros y a la misma profesora la decena de cerdos que fue añadida a los treinta y seis que se tienen.

Samuel al pronunciar el resultado de la decena añadida a los treinta y seis cerdos es complementado por la profesora quién reitera la expresión utilizada por él, no obstante la profesora sincroniza la expresión señalando con su dedo índice el dedo levantado por Samuel para representar la decena añadida. Esta movilización de gestos, de actividad perceptual y de las expresiones lingüísticas utilizadas por ambos, dan evidencia de la manera como ambos se implican en la actividad y más específicamente en la labor conjunta.

En esta labor la manera de interactuar y responder uno al otro, permiten dar cuenta de las relaciones y modos de producción que están emergiendo en la actividad y así mismo los medios materiales e intelectuales que están puestos en juego en esta producción. Como afirma Marx (citado en Radford, 2014), las relaciones de producción y los modos de producción se constituyen en elementos característicos de la labor que permite dar cuenta de la manera como actuamos con los otros y la manera como los saberes son conceptualizados.

Estás formas de acción, reflexión y expresión utilizadas tanto por Samuel como por la profesora son reiteradas tres veces en el transcurso de la actividad, hasta el momento en que es añadida la tercera decena de cerdos a los treinta y seis que se tenían inicialmente. En estas formas, surge además como medios semiótico de objetivación la ritmicidad de manera colectiva, pues ambos sujetos de manera sincrónica pronuncian los resultados obtenidos de añadir cada una de las decenas; cuarenta y seis, cincuenta y seis, sesenta y seis (L11).

Esta ritmicidad es acompañada por la actividad perceptual y la movilización de gestos como el señalamiento y el tocar con el dedo pulgar cada uno de los dedos que representan las decenas añadían, en este sentido, puede inferirse que en la labor conjunta está emergiendo un nodo semiótico colectivo, en el cual los gestos realizados por un sujeto son complementados por otro para objetivar el saber puesto en juego en la actividad.

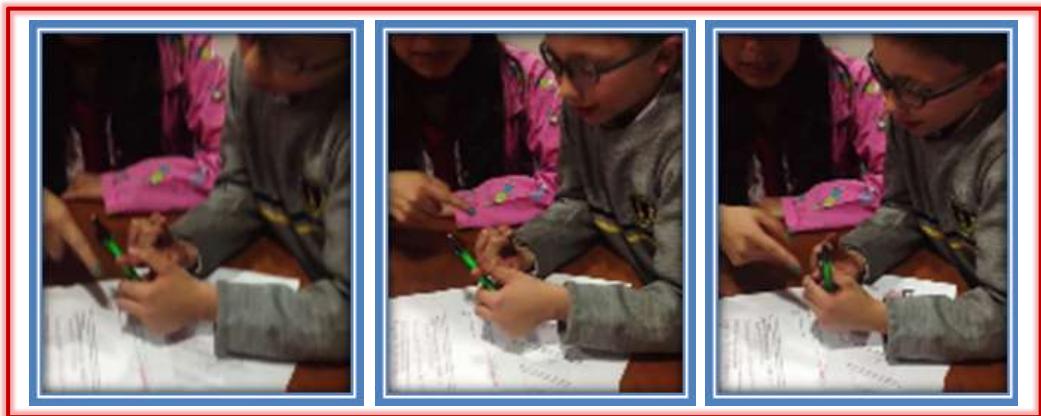


Figura 19. Gestos movilizados por Samuel y la profesora en una labor conjunta.

Continuando con su explicación Samuel toca con su dedo pulgar de la mano izquierda el anular y meñique de su mano derecha para añadir respectivamente la cuarta y quinta decena al corral de cerdos. Una vez que termina de utilizar los dedos de su mano derecha cierra la mano para capturar el número de decenas (i.e., cardinal) que añadió al número treinta y seis. Seguido continua el conteo utilizando los dedos de su mano izquierda, de este modo cada vez que Samuel levanta un dedo simultáneamente nombra el resultado que obtiene de añadir otra decena a la cantidad nombrada anteriormente.

A diferencia de la manera como añadió las cinco primeras decenas a las treinta y seis ovejas con su mano derecha, en su mano izquierda él no tocó ninguno de los dedos (i.e., decenas añadidas), dado que sus dedos de la mano derecha estaban cumpliendo la función de capturar el cardinal de decenas que ya habían sido añadidas. En este sentido en la actividad realizada por Samuel hubo un refinamiento en los medios semióticos de objetivación utilizados, puesto que redujo el medio semiótico de tocar (Samuel no tiene necesidad de tocar el dedo añadido) que le permitía establecer la función biunívoca entre la decena añadida y el dedo utilizado para representar dicha decena, sin embargo, no quiere decir que el establecimiento de esta función haya desaparecido sino que se exprese o evidencie con un nivel de integibilidad más profunda entre la actividad perceptual y la palabra que refiere a cada número mencionada (noventa y seis, ciento seis, ciento dieciséis, ciento veintiséis, ciento treinta y seis).

En términos de Radford (2008b), en la actividad matemática está emergiendo el proceso de objetivación denominado contracción semiótica, puesto que en la actividad de Samuel se

están reduciendo los medios semióticos de objetivación utilizados por él, conduciéndolo a una capa de integibilidad más profundo de la manera como está añadiendo y contabilizando las diferentes decenas a los treinta y seis cerdos. Desde la Teoría Cultural de la Objetivación el proceso de objetivación denominado contracción semiótica es uno de los constructos teóricos que permite analizar la actividad matemática desarrollada por los estudiantes. Como afirma Radford (citado en Vergel, 2014) este proceso brinda información acerca de la toma de conciencia progresiva del objeto cultural por parte de los estudiantes, la cual da evidencia de aprendizaje y desarrollo conceptual de formas de pensar históricamente constituidas que han sido codificadas en la cultura.

Samuel en la manera como nombra cada una de las palabras que refieren a cada número se desvela una ritmidad que además de permitirle establecer una función matemática entre las decenas añadidas (nombradas) y los dedos para representar cada una de éstas, está instanciando una forma de añadir en decenas sin necesidad de tener diez elementos o en este caso diez dibujos de los cerdos, de este modo, él está recurriendo a un símbolo o referente concreto para representar la decena y así diferenciarla de la unidad, es decir está instanciando una forma de pensamiento asociada al agrupación no posicional en base diez entre las unidades de primer nivel y las unidades sueltas.

Al utilizar Samuel todos sus dedos de la mano izquierda reitera el gesto utilizado en su mano derecha cerrando ahora su mano izquierda, capturando así que ha añadido diez decenas al número treinta y seis. En este sentido, él está replicando una acción realizada con anterioridad para continuar afrontando la tarea propuesta por la profesora, en este sentido en la actividad matemática desarrollada por Samuel está emergiendo el proceso de objetivación denominado iconicidad (Radford, 2008b).

Continuando con su explicación Samuel reitera las mismas acciones (levantar cada uno de sus dedos de la mano derecha y encerrarla para continuar el conteo con su mano izquierda) hasta pronunciar el número ciento noventa y seis simultáneamente que levanta su dedo meñique de su mano izquierda. El gesto de encerrar la mano le permite a Samuel tomar conciencia de la cantidad de decenas que ha añadido puesto que el en ningún lado registra esta información y sin inconvenientes y de manera inmediata le da respuesta a la pregunta planteada por la profesora en relación con cuántas decenas ha añadido (L13).

Esta manera de utilizar los dedos para añadir las decenas de cerdos que hacen falta para completar los ciento noventa que se requieren en la tarea y de cerrar la mano para representar el cardinal de las decenas añadidas, le permite a Samuel instanciar formas ideales de pensamiento aditivo. En este sentido las formas ideales asociadas a la adicción se están materializando en la actividad conjunta entre Samuel y la profesora a través de los gestos utilizados, la actividad perceptual, la ritmidad y las expresiones lingüísticas utilizadas. Como afirma Radford (2013c), el ideal solo puede existir en el mundo material a través de la actividad, en este sentido las formas ideales existen en la materialidad sin embargo no son la materialidad.

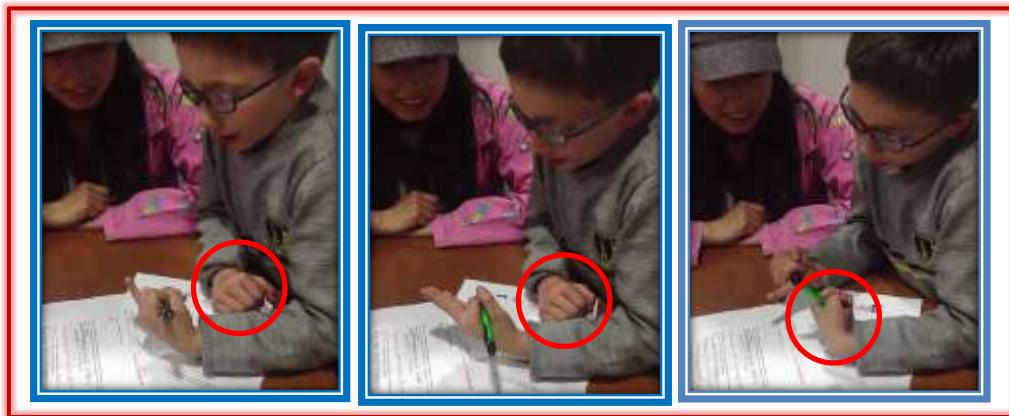


Figura 20. Uso de los dedos de las manos para el conteo en decenas y el encerrar las manos para representar el cardinal de decenas añadidas.

Los dedos de Samuel desde la Teoría Cultural de la Objetivación se convierten en un artefacto que media la actividad matemática tanto de él como de sus compañeros de grupo, puesto que con los dedos él pretende visibilizar sus intenciones y organizar sus acciones con el propósito de manifestar y materializar su desarrollo del pensamiento matemático a sus demás compañeros, quienes posteriormente validaran crítica y reflexivamente la manera de acción de Samuel para dar solución a la tarea propuesta. Como afirma Vygotsky, Kozulin & Abadía (1995) ciertos desarrollos o manifestaciones del pensamientos se dan a través componentes ideacionales (i.e., desarrollos conceptuales) y componentes materiales (i.e., artefactos) que se convierten finalmente en una unidad de pensamiento.

Episodio 4. Tarea 2. Otras formas de acción para abordar y dar solución a la tarea.

L1: Profesora: Escribe ahí el resultado ¿Valentina tu cómo lo harías? ¿Tú qué dices? ¿Qué dices? Estamos de acuerdo. ¿Cómo lo harías Valentina? Mira, son ciento noventa y tengo treinta y seis ¿Cómo harías para hacer cuántas nos hacen falta?

L2: Valentina: Pues, yo aquí en la hoja pondría más números [*Coloca su dedo índice sobre la hoja de trabajo y lo desplaza hacia la derecha golpeando en varias ocasiones ésta*] hasta llegar al ciento noventa [*Deja de desplazar su dedo índice para cambiarlo por su dedo corazón y así golpear la hoja de trabajo*] y cuando llegue al ciento noventa cuento cuantos números puse [*Desplaza el dedo corazón hacia la derecha golpeando varias veces la hoja de trabajo*].

L3: Profesora: O sea que dibujarías más cerditos de estos [*Señala el corral de cerdos que se encuentra en la hoja de trabajo*].

L4: Valentina: No, números [*Señala con su índice de la mano izquierdo su hoja de trabajo*].

L5: Profesora: Enséñame cómo lo harías [*Simultáneamente Valentina empieza a escribir los números en su hoja de trabajo de uno en uno a partir del 36*].

L6: Samuel: Pero se va demorar mucho [*Se dirige a la profesora*].

L7: Profesora: Pero mira lo que dice Samuel. Samuel dice que te vas a demorar muchos. ¿Ustedes qué piensan niños? ¿Qué Valentina se va a demorar mucho? Si te vas a demorar mucho [*Valentina sacude la cabeza en varias ocasiones para afirmar que si es muy demorado simultáneamente que sonríe*]. Busquemos otra forma.

L8: Alberto: Contando de cinco en cinco.

L9: Profesora: Contando de cinco en cinco. ¿Cómo? Enséñame.

L10: Alberto: Poniendo los números de cinco en cinco y cuando llegue a ciento noventa cuento los números.

L11: Profesora: Esa también está muy chévere porque miren lo que está diciendo Alberto. Alberto dice: Yo cuento. En lugar de colocar como tiene Valentina de uno en uno yo cuento de cinco en cinco pero creo que sigue siendo demorado. ¿Cierto? Sigue siendo demorado. Busquemos otra forma más fácil de hacerlo. Por ejemplo, a mí me gusta la de Samuel pero todos entendimos la de Samuel [*Valentina mueve su cabeza para decir que no*]. La de Samuel es contar de diez en diez.

Luego de que Samuel comunicara y compartiera a sus compañeros la solución al ítem número 6 de la tarea 2, la profesora pregunta a Valentina cómo haría para determinar cuántos cerdos hacen falta (L1), a lo que responde Valentina movilizando varios gestos coordinados con las expresiones lingüísticas utilizadas y la actividad perceptual; inicialmente ella golpea su hoja de trabajo para indicar que allí registraría la información (L2). Al golpear la hoja de trabajo ella sincrónicamente utiliza la expresión yo aquí en la hoja pondría más números.

Ese aquí que utiliza junto con el gesto que realiza ponen en evidencia que su intención de comunicar lo que está pensando está dirigido hacia alguien, puesto que en términos de L.S. Vygotsky (citado en Radford, 2006c) la aparición del gesto indicativo pone en evidencia el papel social en la génesis de la significación. Además, la utilización de la expresión aquí posibilita que la actividad gestual realizada por Valentina se vuelva más compleja porque aparece en la actividad matemática otra forma indicativa diferente, en este caso lingüística, en la cual el signo se moviliza en una capa de significación auditiva o escrita, dando lugar a una deixis compleja (Radford, 2002).

Continuando con su intervención desplaza su dedo índice hacia la derecha de la hoja golpeándola en reiteradas ocasiones. Cada golpe realizado por Valentina representa cada uno de los números que escribiría en la hoja. De este modo, ella quiere hacer visible tanto a sus compañeros como a la profesora el orden como escribiría los números sobre la hoja de trabajo, orden que puede determinar la manera de contar el total de números escritos, occasionando el surgimiento de estrategias sistemáticas de conteo, como por ejemplo, el agrupamiento de los números en decenas, de cinco en cinco o el conteo de uno en uno de los números escritos.

Seguido intercambia su dedo índice por su dedo corazón golpeando nuevamente la hoja de trabajo, pero esta vez con una intensión totalmente diferente, puesto que el hecho de cambiar del dedo índice al dedo corazón y movilizar sincrónicamente tanto la percepción como sus elocuciones al hacer explícita la frase hasta llegar al ciento noventa (L2) está dotando de significado el número (i.e., cardinal del conjunto de números) hasta el cual debe escribir la lista de éstos en la hoja de trabajo. Además, la coordinación entre las expresiones lingüísticas utilizadas, la percepción y los gestos movilizados se convierten en un nodo semiótico (Radford, 2008b). Estos medios semióticos que se complementan unos a otros generan una toma de conciencia de la manera en que la tarea puede ser abordada desde el conteo de números, más específicamente el conteo múltiple utilizando la secuencia numérica escrita.

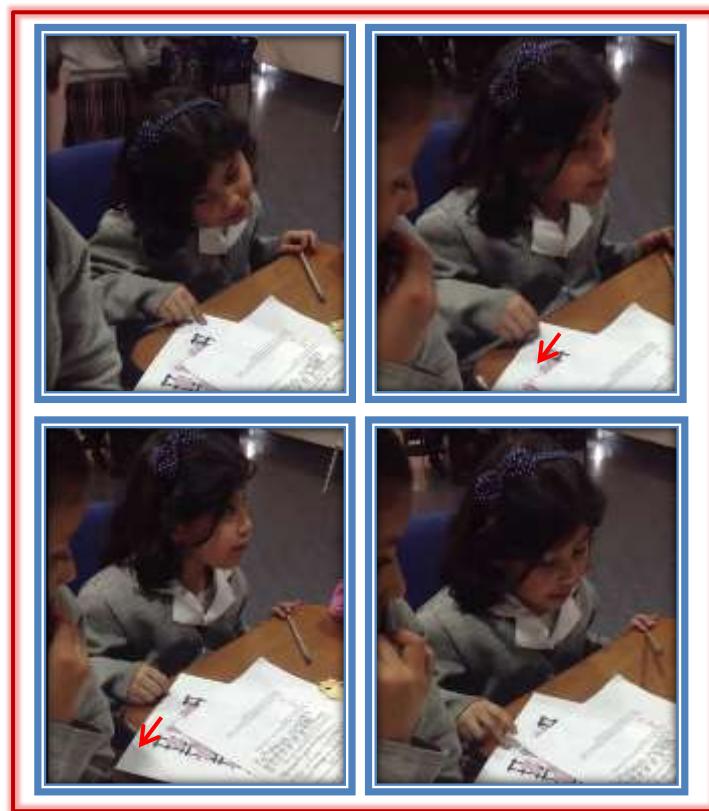


Figura 21. Secuencia de gestos utilizados por Valentina para abordar el ítem seis de la tarea número dos.

Estos gestos utilizados por Valentina además de ser elementos fundamentales que constituyen su planeación conceptual, se convierten en mediadores que le ayudan a realizar una actividad reflexiva de lo aditivo, puesto que éstos son portadores de convenciones y

formas culturales de significación que contienen patrones históricos de actividad cognitiva, como por ejemplo, el contar uno a uno los elementos de un conjunto o agrupación de cosas o el asignar una marca o trozo por cada objeto contado como ella lo evidencia al golpear en reiteradas ocasiones la hoja de trabajo para establecer la correspondencia uno a uno con cada uno de los números que escribiría en ésta.

Esta forma de acción, reflexión y expresión utilizada por Valentina al abordar la tarea propuesta es semejante a la forma de acción, reflexión y expresión empleada en el ítem cinco de la tarea número 1 (ver páginas 64 a la 66), puesto que ella recurre a la secuencia numérica y a la utilización de gestos indexicales espaciales (ahí y aquí respectivamente para la tarea 1 y la tarea 2) para comunicar y volver aparente lo que está pensando y lo cual se consideraba inaccesible. Sin embargo, las formas de expresión no son del todo similares puesto que en la tarea 2 ella no consigna en el papel lo que está pensando sino que va reproduciendo a través de la movilización de su cuerpo, la coordinación entre las expresiones lingüísticas utilizadas y la actividad perceptual los procesos psíquicos que se están desvelando en su mente y pensamiento.

Además, al recurrir a la utilización de la secuencia numérica y a la utilización de gestos indexicales espaciales Valentina está recurriendo a acciones pasadas que fueron utilizadas en la tarea 1 para abordar la nueva tarea que ha sido propuesta por la profesora, en este sentido está emergiendo en la labor conjunta el proceso de objetivación iconicidad (Radford, 2008b).

Por otro lado, no obstante a través de la movilización de diferentes medios semióticos de objetivación por Valentina para comunicar la manera como puede dar solución a la tarea, la profesora no logra reconocer la intención de lo que pretende comunicar ella puesto que la cuestiona si se deben dibujar más cerdos en la hoja de trabajo (L3), expresión lingüística que es acompañada sincrónicamente con el señalamiento del corral de cerdos que se encuentran en la hoja de trabajo. A partir de la inquietud de la profesora Valentina afirma que dibujaría más números, expresión que también es acompañada con el señalamiento de la hoja de trabajo en la cual escribiría los números (L4). De este modo, la profesora solicita a Valentina que le muestre como lo haría, con el propósito de que materialice en el papel la manera como ella abordaría y daría solución a la tarea propuesta.



Figura 22. Izquierda y medio, la profesora y Valentina señalan la hoja de trabajo. Derecha Valentina consigna en su hoja de trabajo algunos de los números inmediatamente consecutivos al número 36.

Una vez Valentina comienza a registrar en su hoja de trabajo algunos de los números inmediatamente consecutivos al treinta y seis. Samuel se dirige a la profesora para dar a conocer su postura crítica frente a la manera como Valentina está abordando la tarea propuesta, puesto que él siente y es consciente que se demoraría muchísimo tiempo en determinar cuántos cerdos hacen falta para completar los 190 que se requieren (L6). La profesora aprovechando la intervención de Samuel hace explícito al grupo si están de acuerdo con lo que está proponiendo Samuel, a lo que responde Valentina con una sonrisa y sacudiendo simultáneamente en varias ocasiones su cabeza para afirmar lo que está diciendo Samuel.

En este punto vale la pena resaltar que en la labor conjunta que se desvela entre los integrantes del grupo y la profesora, Samuel se implica en las acciones realizadas por Valentina reconociendo y valorando tanto sus ideas como sus formas de expresión, acción y reflexión utilizadas. En este sentido, los integrantes del grupo están aprendiendo a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, en pocas palabras, a ser con otros (Radford, 2006a).

La profesora con el propósito de involucrar a los demás integrantes del grupo propone que se busque otra forma de abordar y dar solución a la tarea. De este modo, interviene Alberto proponiendo que se puede contar de cinco en cinco, más específicamente escribiendo de cinco en cinco los números hasta llegar al ciento noventa y así luego contar los números escritos (L8-L10). En la intervención de Alberto puede observarse como emerge en la labor

conjunta el proceso de objetivación iconicidad (Radford, 2008b) y más específicamente el subproceso denominado orquestación icónica, puesto que Alberto reformula y expresa de manera similar con sus propias acciones, gestos y palabras las acciones propuestas por Valentina para dar solución a la tarea.

Esta orquestación icónica le permite a Alberto objetivar el saber puesto en juego por Valentina. Este subproceso de orquestación icónica es compartido por la profesora a los demás integrantes del grupo, puesto que ella hace explícito que Alberto en lugar de colocar como tiene Valentina de uno en uno los números, él los va a contar de cinco en cinco. De este modo, ella pone en discusión si la forma de acción propuesta por Alberto es demorada o no, a lo que ella misma responde que sí (L11).

Episodio 5. Tarea 2. El tres es como el treinta pero más un cero.

L1: Profesora: Miremos el tercer punto. ¿Cuántas decenas y unidades de cerdos hacen falta para formarse una centena de cerdos en total? Explica cómo obtuviste el resultado.

L2: Nicolás: setenta y cuatro.

L3: Profesora: ¿Seguro?

L4: Luisa: Sí.

L5: Profesora: ¿Una centena son cuántas unidades?

L6: Luisa: Cien [*Los demás integrantes responden de manera rítmica cien*].

L7: Profesora: Cien. ¿Y tengo cuántos? [*Señala el número treinta y siete que se encuentra escrito en la hoja de trabajo de Luisa*] [*Luisa y los demás integrantes del grupo centran su actividad perceptual en la hoja de trabajo*].

L8: Luisa: Treinta y siete.

L9: Profesora: Treinta y siete. ¿Por qué dicen que setenta y cuatro?

L10: Samuel: Porque es que tres. Yo lo hice así, porque es que el tres es como el treinta [*Representa el número tres con sus dedos de la mano derecha simultáneamente que dice*

porque es que tres, seguido representa el número treinta con sus dedos de la mano izquierda simultáneamente que dice es como el treinta].

L11: Profesora: ¡Tres es treinta! Listo.

L12: Samuel: Pero treinta tiene más un cero. Entonces yo cogí un número que me diera del tres [*Levanta sus manos y las coloca en el aire. Simultáneamente coloca su mano derecha encima de los tres dedos que se encuentran estirados*] hasta el diez [*Aleja su mano derecha de su mano izquierda en sentido horizontal*].

L13: Profesora: ¿Qué número es ese?

L14: Samuel: El siete.

L15: Profesora: El siete. Pero, entonces miren lo que dice Samuel [*Coge la hoja de trabajo de Samuel y señala el corral de cerdos con su dedo índice*]. Si él tuviera treinta cerditos solamente, le faltarían. ¿Cuántos dijiste? Setenta. O sea siete decenas. ¿Cierto? Es decir, [*Levanta siete de sus dedos para representar las siete decenas, simultáneamente desplaza sus manos hacia delante y hacia atrás sin dejar de levantar sus siete dedos*] Pero allá tiene más de treinta [*Señala la hoja de trabajo de Samuel*] ¿Tienes cuántas? Tienes treinta y siete. Entonces, ¿cuántas necesitarías?, porque se pasaría. ¿No se pasaría?

L16: Samuel: Sí [*Simultáneamente Luisa dice sí*].

L17: Profesora: O sea tienes treinta y siete y si tú le sumas setenta o siete decenas, ¿cuántas quedarían?

L18: Luisa: Cien.

L19: Samuel: Sí. No, no, me darían [*Se queda pensando la respuesta*].

Luego de hacer lectura del ítem 2 de la tarea 2 la profesora dio inicio a la socialización de las respuestas encontradas por los diferentes integrantes del grupo. Nicolás responde de manera instantánea que setenta y cuatro cerdos, sin embargo la profesora cuestiona si está seguro de la respuesta dada. De este modo, interviene Luisa para dar validez a lo propuesto por Nicolás afirmando que sí. Dado que la profesora conoce que setenta y cuatro no es la

solución, pregunta a los estudiantes cuántas unidades equivalen a una centena, a lo que responde de manera inmediata Luisa que cien, simultáneamente que sus demás compañeros pronuncian de manera rítmica la palabra cien (L6).

Una vez resuelta la pregunta planteada, la profesora formula una nueva pregunta en relación con la cantidad de cerdos que se tienen en el corral, acompañando ésta última intervención oral con la movilización de un medio semiótico de objetivación, en este caso, el señalamiento del número treinta y siete que se encontraba consignado en la hoja de trabajo de Luisa. Gesto que le ayuda a los integrantes del grupo y en particular a Luisa tomar conciencia de la cantidad de cerdos que se encuentran en el rebaño, puesto que ella responde de manera inmediata treinta y siete.

En este sentido, la profesora a través de las preguntas planteadas al grupo y de los medios semióticos movilizados (expresiones lingüísticas, señalamiento con su dedo índice y actividad perceptual) pretendía que los estudiantes verificaran la respuesta que había sido compartida por Nicolás y que Luisa validó sin mayor inconveniente, así mismo que tomaran conciencia que para llegar a los cien cerdos que se requerían a partir de los treinta y siete que se tenían no se necesitan setenta y cuatro, aspecto que fue resaltado a través de las expresiones lingüísticas utilizadas por ella al formular la pregunta ¿Por qué dicen que setenta y cuatro? (L9).

De este modo, interviene Samuel para argumentar a través de la movilización de varios medios semióticos de objetivación qué el tres que se encuentra en la posición de las decenas del número treinta y seis es un treinta. En su explicación a medida que utiliza la expresión lingüística porque es que el tres, ésta es acompañada con la representación del número tres con tres de sus dedos de la mano izquierda, seguido cuando utiliza la expresión lingüística es como el treinta sincrónicamente representa el número treinta con tres de sus dedos de la mano derecha sin dejar de representar el número tres con su mano izquierda.



Figura 23. Parte superior, Samuel representa con sus dedos de la mano izquierda el número tres, luego representa el número treinta con los dedos de su mano derecha. Parte inferior Samuel desplaza su mano derecha en el aire desde su mano izquierda hacia la derecha de ésta.

En términos matemáticos Samuel está materializando a través de sus dedos la equivalencia entre las unidades sueltas y las agrupaciones de primer nivel (i.e., decenas), dado que cada dedo de su mano izquierda está representando una decena mientras que cada dedo de su mano derecha está representando una agrupación de diez unidades sueltas. En este sentido, él está instanciando una forma de reflexión, acción y expresión asociada al conteo y al agrupamiento posicional de unidades sueltas en decenas, puesto que cada dedo dependiendo de la mano en que haya sido levantado representa una unidad de orden posicional diferente.

Estas formas que han sido constituidas histórica y culturalmente están emergiendo en la actividad matemática de los estudiantes, más específicamente en la labor conjunta que se despliega en ésta. Es por esta razón, que el conocimiento matemático es configurando estrechamente por la cultura, es decir, la cultura aparece aquí como fuente consubstancial de las formas de conciencia que se despliegan en la actividad.

Continuando con su explicación, Samuel hace explícito que buscó un número que le diera del tres hasta el diez, esta expresión lingüística fue acompañada con un gesto, en el cual, inicialmente con su mano derecha toca los tres dedos de su mano izquierda (i.e., los cuales

representan las tres decenas) para luego desplazar su mano derecha en el aire de manera horizontal alejándola de la mano izquierda. La acción lingüística-gestual realizada por él se constituye en un nodo semiótico (Radford, 2013a) posibilitando una toma de conciencia de la manera como la tarea está siendo abordada en términos aditivos.

Más específicamente, Samuel está instanciando a través de la movilización gestual la idea de complemento (i.e., lo cual consiste en igualar una cantidad mayor añadiendo una cantidad desconocida a la cantidad menor), en este sentido, está instanciando una forma prototípica de acción y reflexión como lo es el pensamiento aditivo. Además, este segmento de actividad semiótica (nodo semiótico) sugiere que Samuel está materializando la recta numérica real puesto que está reconociendo y comunicando que el diez está a la derecha de tres y que para llegar a éste a partir del tres se debe agregar un número de unidades determinadas, en este caso siete.

Una vez Samuel hace explícito que el número que se debe añadir es el siete, la profesora llama la atención de los demás integrantes del grupo, con el propósito de resaltar y visibilizar la cantidad de cerdos que se encuentra en el corral y que ha sido modificada por Samuel, puesto que él considera que se encuentran treinta. Para ello, ella recurre al señalamiento del corral de cerdos que se encuentran en la hoja de trabajo con su dedo índice (L15).

A través de este gesto movilizado por la profesora los demás integrantes del grupo centran su actividad perceptual en la hoja de trabajo de Samuel, posibilitando que tomen conciencia de la cantidad de cerdos que realmente se debe considerar para abordar y dar solución a la tarea. En este sentido, el gesto aparece como el medio semiótico a través del cual se vuelve aparente a los estudiantes la cantidad de cerdos que se encuentran en el rebaño, aspecto que modificaría y determinaría las acciones realizadas por el grupo en el tiempo y en el espacio (Miranda et al., 2013).

Además, la profesora a través de su intervención tanto lingüística con gestual busca compartir a los demás integrantes del grupo la manera como Samuel está abordando la tarea, con la intención de que reconozcan que esta manera es muy útil siempre y cuando únicamente en el corral se tuvieran treinta cerdos, de este modo, resalta que faltarían siete

decenas, lo cual acompaña a través de la representación del número siete con siete de sus diez dedos (L15).

Este gesto utilizado para representar el número siete es una reformulación y expresión similar de las acciones y gestos realizados por Samuel, puesto que él había representado a través de sus dedos el número tres. En este sentido, a través del gesto realizado por la profesora en la labor conjunta que se despliega en la actividad matemática emerge el proceso de objetivación iconicidad, particularmente lo que Radford (2008b) ha denominado orquestación icónica.



Figura 24. Representación de siete decenas a través de los dedos de las manos, deslizamiento de las manos hacia adelante y hacia atrás.

Por otro lado, a través del gesto la profesora está haciendo una reproducción de las intenciones y sentidos subjetivos de Samuel quien reinterpretó la tarea y más específicamente los cerdos que debían ser añadidos por medio de sus dedos. No obstante cada dedo levantando por la profesora representaba una decena de cerdos, mientras que para Samuel, dependiendo de la mano en la que fuera levantado el dedo, representaba una unidad suelta o una decena. Además, la profesora al representar las siete decenas con sus dedos recurrió al desplazamiento de éstos y sus manos hacia adelante y hacia atrás con la intención de visibilizar e implicar a los demás integrantes del grupo en la manera como se estaba abordando la tarea y a la solución a la que se había llegado, quienes a través de su actividad perceptual lograron vincularse y hacer parte de la discusión que se estaba dando entre la profesora y Samuel.

Capítulo 5

Discusión

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera de ellas se describen, caracterizan y presentan algunas evidencias empíricas de los vectores que emergieron y fueron identificados a través del análisis de los datos. Vectores que se considera caracterizan el desarrollo y evolución del pensamiento aditivo de los estudiantes. En la segunda sección, se presentan un breve análisis, el cual se considera ofrece indicios de dos formas de pensamiento aditivo asociadas al vector conteo simple, con el propósito de sugerir una tipología de formas de pensamiento aditivo ligada a cada uno de los vectores. Tipología que se establece en analogía a la tipología de formas de pensamiento algebraico propuestas en el contexto de lo algebraico.

5.1 Sobre algunos vectores qué están en la base del pensamiento aditivo desde este estudio.

A partir del análisis de los diferentes datos de investigación y en particular de las evidencias empíricas suministradas en el capítulo anterior, es posible sugerir la aparición de manera no exhaustiva de algunos vectores que caracterizarían el desarrollo y evolución del pensamiento aditivo. Vectores que han sido establecidos teniendo en cuenta la reiteración de formas de reflexión, acción y expresión utilizadas por los diferentes estudiantes al abordar y dar solución a cada una de las tareas reportadas.

Algunos de los vectores que han sido identificados son los siguientes: *conteo simple*, *conteo múltiple*, *agrupación no posicional* y *agrupación posicional*. A continuación, se caracterizarán cada uno de los vectores a través de algunos elementos teóricos, con el propósito de comprender su evolución. Así mismo, se presentan algunas evidencias que dan cuenta de cada uno de los vectores y sus diferentes manifestaciones en este estudio.

El primer vector, conteo simple, consiste en determinar el cardinal de una colección o conjunto de objetos contándolos uno a uno, acción que exige establecer una relación o correspondencia biunívoca entre cada uno de los objetos que se pretende contar (concretos o imagen de éstos) y un conjunto de objetos más abstractos (palabras que refieren a cada

uno de los números de la secuencia numérica o representaciones escritas de los números de ésta). Esta correspondencia biunívoca que se establece entre el conjunto de objetos a contar y la recitación de la serie numérica como sugiere Vergnaud (1991) es acompañada de gestos corpóreos (señalamientos con los dedos o con un objeto auxiliar, desplazamientos de los objetos, tachar, encerrar, entre otros) y actividad perceptual, acciones que muestran una de las primeras funciones numéricas que pueden establecer los estudiantes.

No obstante, en el proceso de conteo simple se suelen cometer varios errores, resultado de la disposición espacial de los objetos, de la accesibilidad y de la cantidad de éstos. Errores que están asociados a: recitar dos veces una palabra numérica a dos objetos distintos, omitir alguno o varios de los objetos a contar, saltarse uno de los números de la secuencia numérica en la recitación de éstos o contar dos veces un mismo objeto. Con el propósito de omitir este tipo de errores en el proceso de conteo los estudiantes recurren a la utilización de estrategias sistemáticas de conteo, tales como: señalar los objetos, trasladar los objetos que son contados del monto de los que no han sido contados, girarlos, alinearlos para luego desplazar hacia arriba o hacia abajo los que han sido contados, encerrarlos o tacharlos si los objetos a contar son imágenes (Cid, Godino, & Batanero, 2003). Sin embargo, una de las estrategias más sofisticadas y que determina mayores garantías de éxito en el proceso de conteo, consiste en la asignación de las representaciones escritas de los números de la secuencia numérica a cada uno de los objetos a contar de una colección o conjunto.

Algunas evidencias identificadas en las producciones de los estudiantes y que se encuentran asociadas al vector conteo simple son reportadas en el episodio uno, sin embargo se muestra una síntesis en la Figura 25. En la primera foto de izquierda a derecha es posible identificar como uno de los estudiantes recurrió a trazar marcas (rayas) en cada una de las ovejas a medida que iban siendo contadas. De manera similar en la segunda foto se recurrió a la asignación de un punto en cada oveja contada, mientras que en la última foto, en cada oveja se escribió el número correspondiente al número enunciado en ese instante en el proceso de conteo del rebaño.

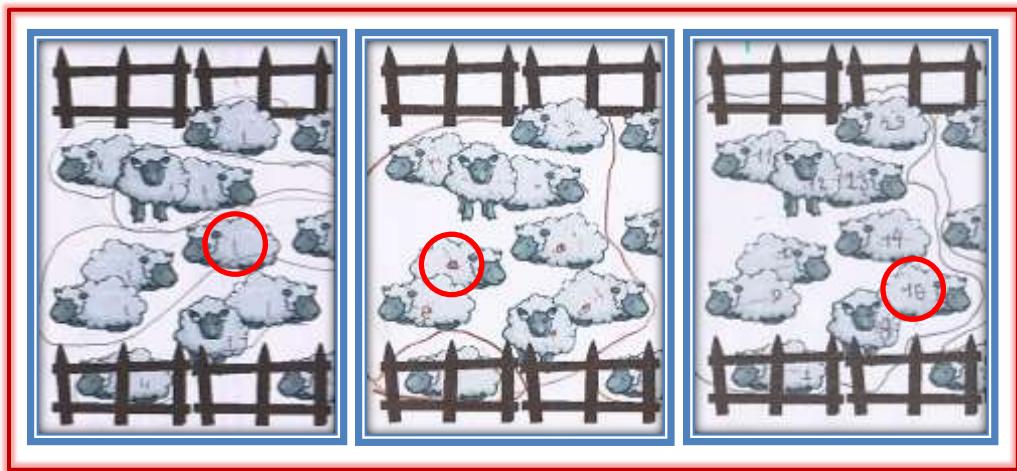


Figura 25. Diversidad de maneras de realizar el conteo de las ovejas, evidenciadas en las hojas de trabajo de los estudiantes.

Aun así el conteo simple presenta inconvenientes cuando se tienen que contar grandes cantidades de objetos, debido a que implica establecer adecuadamente y un número bastante considerable de veces la correspondencia biunívoca, ocasionando que el proceso de conteo se haga extenso y que se cometan errores en la determinación del cardinal de la colección a contar. No obstante, el conteo de grandes cantidades de objeto puede simplificarse y optimizarse a través de la creación de agrupamientos con la misma cantidad de objetos, dando así lugar al segundo vector denominado conteo múltiple (conteo por grupos), el cual consiste en formar grupos con la misma cantidad, para luego añadir tantas veces el cardinal de cada uno de estos grupos como indique la cantidad de grupos formados en total.

El conteo múltiple surge de la capacidad de reconocer a simple vista la cantidad de objetos que se encuentran en colecciones con un número pequeño de elementos sin recurrir al uso del conteo uno a uno. Esta capacidad es denominada por Chamorro (2005) y Dickson, Gibson, & Brown (1991) subitizing o subitización de la cantidad. El conteo múltiple suele hacerse de dos en dos, de tres en tres, cinco en cinco o de diez en diez. Como afirman Obando & Vásquez (2008), este tipo de conteo es de vital importancia porque constituye un elemento fundamental en la iniciación del aprendizaje de las operaciones básicas, más específicamente las correspondientes a la estructura aditiva, en las cuales por un lado, una cantidad denominada todo, se compone a partir de dos o más cantidades nombradas partes o por otra parte para descomponer una cantidad (todo) en una o más partes no necesariamente iguales.

En las evidencias reportadas en esta investigación, el vector conteo múltiple emerge a través de la utilización de los dedos, los cuales se convierten en un artefacto que permite a los estudiantes contar de diez en diez, puesto que cada dedo, en este caso, desempeña el papel de representar una decena de cerdos. Algunos ejemplos de este vector se muestran en la Figura 26. De este modo, en la foto de la izquierda, Samuel utiliza cada uno de sus dedos para añadir varias decenas al número 36, con el propósito de hallar el complemento que le hace falta al 36 para obtener el 190. Por otro lado, en la foto de la derecha, Luisa de manera similar a Samuel recurre a cada uno de sus dedos para encontrar la cantidad que se debe añadir al número 37 para obtener el número 100, añadiendo una decena al número 37 por cada dedo estirado.



Figura 26. Utilización de los dedos para representar cada una de las decenas que pueden ser añadidas a determinada cantidad.

Un nivel de integibilidad más profundo en el uso del conteo múltiple y de la necesidad de registrar el cardinal de grandes cantidades de objetos, hace que emerja la agrupación no posicional. Se considera este como el tercer vector que caracteriza el desarrollo y evolución del pensamiento aditivo. La agrupación no posicional consiste en formar grupos con la misma cantidad de objetos, y a cada uno de estos asignar un símbolo escrito o concreto (otro objeto distinto al que se pretende contar). Este nuevo símbolo, por un lado desempeña la función de representar la cantidad de objetos que conforman determinado grupo y por otra parte permite abreviar el proceso de conteo, puesto que ya no se requiere contar los objetos de uno en uno sino contar los símbolos u objetos que representan a cada uno de los grupos formados.

La agrupación no posicional puede realizarse en diferentes bases (agrupaciones de a dos, tres, cinco o diez objetos). El trabajo con diferentes bases permite comprender con mayor facilidad la obtención y equivalencia entre los diferentes niveles de agrupación, es decir, la obtención de decenas a partir del agrupamiento de unidades, la obtención de centenas a partir de decenas, así mismo la cantidad de cada una de estas que se requieren para obtener los demás niveles de agrupación.

Una de las evidencias reportadas en este estudio y que da cuenta del vector agrupación no posicional se muestra en la Figura 26. En esta es posible observar como Samuel recurre al agrupamiento del rebaño de ovejas en decenas a través de lo que él ha denominado grupo 1, grupo 2 y grupo 3, los cuales han sido formados cada uno con diez ovejas y representados a través del trazo del lápiz. Esta manera de representar los grupos a través de dibujos, en este caso circunferencias puteadas y a la asignación escrita dentro de éstas del respectivo grupo formado, sugiere que Samuel está utilizando un nuevo símbolo para diferenciar las decenas (i.e., agrupación de primer nivel) de las unidades, puesto que las ovejas restantes al no completar una decena no fueron encerradas quedando por completo sueltas en el rebaño.

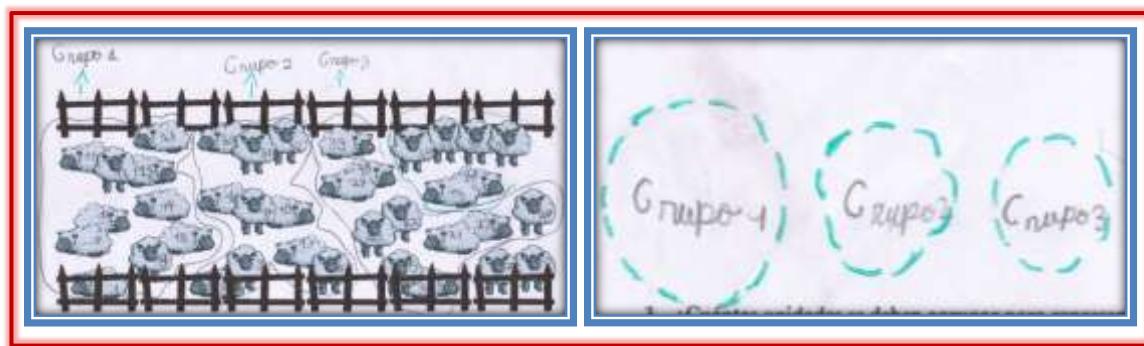


Figura 27. Producciones asociadas a la agrupación no posicional en decenas.

No obstante, la agrupación no posicional presenta inconvenientes para registrar el cardinal de grandes cantidades de objetos, pues ello exige la utilización de una gran variedad de símbolos para diferenciar con facilidad los diferentes niveles de agrupación, por esta razón, surge la necesidad de emplear cada vez menos símbolos y hacer más práctico y funcional tanto el proceso de conteo como el registro escrito del resultado de este proceso. Esta necesidad es resuelta a través de la consolidación de diferentes sistemas de numeración posicionales y más específicamente de la agrupación posicional.

La agrupación posicional es considerada el cuarto vector. Este consiste en realizar diferentes agrupamientos para obtener diferentes unidades de orden superior (i.e., diferentes niveles de agrupamiento), de esta manera una agrupación de objetos no es representada con un nuevo símbolo u objeto sino que es representada con un mismo objeto de los utilizados para conformar dicha agrupación, no obstante su valor no depende de la forma del símbolo sino de la ubicación espacial que tiene éste en relación con los demás.

Una evidencia del vector agrupación posicional se encuentra registrada en el episodio dos, en el cual Samuel recurre a la movilización de un gesto, más específicamente al movimiento de su mano de izquierda a derecha, movimiento que es realizado en el aire y a través del cual hace visible y dota de significado la posicionalidad de cada una de las unidades de orden superior del número ochenta y nueve. Obsérvese que al nombrar ocho decenas, él dispone su mano al lado izquierdo de su cuerpo, desplazándola posteriormente hacia la derecha a medida que enuncia nueve unidades.



Figura 28. Gesto asociado a la agrupación posicional.

5.2 Sobre una posible tipología de formas de pensamiento aditivo

A manera de ejemplo se presenta un breve análisis, tomando como referencia el episodio uno reportado en este estudio, el cual se considera ofrece indicios de dos formas de pensamiento aditivo asociados al vector conteo simple. En el episodio uno y en su respectivo análisis es posible evidenciar dos maneras distintas en que fue realizado el conteo de las ovejas por parte de Samuel.

En la primera de ellas, recurrió a la numeración de las ovejas a contar, asignando únicamente una representación escrita (signos numéricos) de cada uno de los números a

cada una de éstas. Esta atención en los signos, le permite determinar con facilidad el cardinal del conjunto de ovejas o rebaño y diferenciar aquellas que han sido contadas de aquellas que no, olvidándose así por completo de las imágenes de las ovejas que se encuentran en la hoja de trabajo. La utilización de los signos numéricos da cuenta de la nueva manera como Samuel designa las ovejas, las cuales dejan de ser imágenes de objetos concretos para convertirse en signos numéricos.

En la segunda, a través de un segmento de actividad semiótica, Samuel al mismo tiempo que señalaba con su lápiz cada oveja pronunciaba el número. Esta actividad semiótica la lleva a cabo con el propósito de diferenciar aquellas ovejas que ya habían sido señaladas (i.e., contadas) de aquellas que no. Los medios semióticos de objetivación movilizados recaen sobre la imagen de las ovejas que se encuentran en la hoja de trabajo y la actividad reflexiva realizada por Samuel se despliega sobre acciones concretas con estas ovejas.

Vale la pena destacar que en los demás episodios reportados en este estudio y en su respectivo análisis, se encuentran evidencias de formas de pensamiento aditivo asociadas a los otros vectores. Sin embargo, con este volumen de datos no es posible garantizar la existencia un pensamiento aditivo factual, contextual y simbólico para cada uno de los vectores establecidos porque no se cuenta con suficientes evidencias empíricas que garanticen que los cuatro vectores que están en la base del pensamiento aditivo como componentes analíticos emergan en cada de las formas de pensamiento aditivo.

Sin embargo, se quiere destacar que las dos maneras de realizar el conteo simple descritas anteriormente invitan a pensar en llevar a cabo una labor conjunta de enseñanza y aprendizaje que haga aparecer o produzca los otros tres vectores que se han definido como componentes analíticos en el pensamiento aditivo. De esta manera se podría estar hablando de una serie de estratos en esta forma de acción y reflexión que ha quedado codificada histórica y culturalmente, como lo es el pensamiento aditivo.

Tomando como referencia los planteamientos propuestos por Radford (2010a) en relación con los constructos teóricos asociados a las formas de pensamiento algebraico, se sugiere de manera no exhaustiva la siguiente tipología de formas de pensamiento aditivo.

| Tipología de formas de pensamiento aditivo | | |
|--|---|---|
| Pensamiento Aditivo Factual | Pensamiento Aditivo Contextual | Pensamiento Aditivo Simbólico |
| En esta tipología de pensamiento aditivo los cuatro vectores aparecen de manera intuida a través de la movilización de medios semióticos de objetivación (primarios) como actividad perceptual, gestos, ritmo. | En esta forma de pensamiento aditivo los cuatro vectores son explícitos y los medios semióticos de objetivación movilizados son fundamentalmente recursos lingüísticos. | Los cuatro vectores aparecen pero el lenguaje utilizado es numérico (signos numéricos). |

Tabla 3. Tipología y caracterización de las formas de pensamiento aditivo.

En síntesis, valdría la pena abordar un estudio más sistemático y riguroso en relación con esta hipótesis de trabajo que se propone sobre los estratos de generalidad en el dominio del pensamiento aditivo.

Capítulo 6

Conclusiones

En el siguiente capítulo se aborda inicialmente la respuesta a la pregunta de investigación planteada en esta propuesta, la cual se responde a través de la comprensión de algunos de los elementos teóricos propuestos en la Teoría Cultural de la Objetivación y de la toma de conciencia del pensamiento multimodal de los estudiantes. Posteriormente, se exponen algunas consideraciones relacionadas con algunas posibilidades de investigación que se desprenden de este trabajo.

6.1 Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación que fue planteada es la siguiente:

¿Cuáles son los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de tercer grado de primaria y qué procesos de objetivación desarrollan cuando se enfrentan a tareas de tipo aditivo en los naturales?

A partir de los diferentes análisis y de las producciones en cada una de las tareas propuestas, se puede afirmar que en la labor conjunta en el proceso de enseñanza y aprendizaje tanto los estudiantes como la profesora lucharon por comunicar sus intenciones y organizar sus acciones en el tiempo y en el espacio a través de la movilización de recursos o medios semióticos de objetivación, algunos de éstos que emergieron en la actividad matemática son los siguientes:

Conteo escrito

Con el propósito de determinar la cantidad de objetos que conforman un grupo o colección (i.e., cardinal), en la actividad matemática emergió el medio semiótico de objetivación que se ha denominado conteo escrito, a través del cual se asigna a cada objeto a contar únicamente una representación escrita de cada uno de los números. Este medio, además de posibilitar que se pueda diferenciar con facilidad los objetos contados de aquellos que no lo han sido, permite a los sujetos orientarse en el espacio de trabajo, brindando una trayectoria o camino a seguir en el conteo que garantiza que en cualquier momento de esta acción sea posible determinar el cardinal de objetos contados sin ningún inconveniente.

Señalamientos con el lápiz

Este medio semiótico de objetivación consiste en señalar con el lápiz cada uno de los objetos a contar, permitiendo así establecer una correspondencia uno a uno entre cada objeto señalado y la elocución de cada palabra que refiere a cada número utilizado en el conteo. A diferencia del medio semiótico conteo escrito, en esta manera de realizar el conteo puede presentarse mayor posibilidad de cometer errores y así obtener cardinales totalmente diferentes a la cantidad de objetos que se tienen realmente, puesto que no es posible diferenciar con certeza aquellos objetos que han sido contados de aquellos que no. Diferencia que es posible a través de la realización de marcas o de las mismas representaciones escritas de los números en cada uno de los objetos a contar.

Es por esta razón, que en esta investigación se puede afirmar que el medio semiótico de objetivación conteo escrito es evidencia de una forma más estable de conciencia asociada al vector conteo simple y a las estrategias sistemáticas de éste en comparación con el medio semiótico de objetivación señalamiento con el lápiz, puesto que, por un lado se recurre a estrategias de conteo más sofisticadas que brindan mayores garantías de éxito en el proceso de conteo y en la obtención del cardinal de un conjunto de objetos. Por el otro lado, estratifican el objeto matemático conteo en un estrato de generalidad superior, puesto que se recurre a la representación escrita de los números, lo que permite expresarlos como una secuencia de números.

Agrupamiento en el aire (signo escrito en el aire)

Este gesto consiste en describir la trayectoria de una circunferencia en el aire para representar la agrupación de diez unidades y así materializar la equivalencia entre éstas y la decena. Aquí la circunferencia desempeña el papel de diferenciador perceptual entre las unidades de primer nivel (i.e., unidades sueltas) y las unidades de segundo nivel (i.e., decenas). Este medio de objetivación en esta investigación es evidencia de uno de los recursos que permiten organizar el pensamiento y las acciones de los estudiantes en el tiempo y en el espacio, puesto que este gesto es una producción de la imaginación y del pensamiento que toma más adelante forma concreta y material en la actividad matemática.

Agrupamiento en el aire, señalamiento y registro escrito en el aire

Este medio semiótico de objetivación es una sucesión coordinada de gestos que se sugiere se convierten en una unidad, puesto que da cuenta de la manera como una acción implica la realización de otra, totalmente ligada a la anterior, con el propósito de llegar o alcanzar una meta. Este medio está constituido por la articulación de tres gestos, el primero de ellos consiste en describir la trayectoria de una circunferencia en el aire, a partir de ésta se recurre a describir la trayectoria de una flecha, segundo gesto de la unidad y el tercero y último, está relacionado con la escritura de lo que representa la circunferencia, que para este ejemplo, hace referencia a la agrupación o grupo número uno, compuesto por diez unidades sueltas.

Movimiento horizontal en el aire de izquierda a derecha de las manos

En la actividad matemática realizada por los estudiantes emergió el medio semiótico de objetivación denominado desplazamiento en el aire, medio a través del cual los estudiantes materializan con una de sus manos y la posición que ocupa ésta en el aire el valor posicional de cada uno de los dígitos que conforman un número. De este modo, para representar las decenas (i.e., agrupaciones de primer nivel) se recurre a dejar en el aire al lado izquierdo del cuerpo una de las manos para posteriormente desplazarla en el aire de manera horizontal hacia la derecha y así representar las unidades (i.e., unidades sueltas).

Deslizamientos de los dedos sobre la hoja de trabajo

Con el propósito de hacer visibles las formas de abordar las tareas y los signos consignados en las hojas de trabajo, los estudiantes recurrieron a la movilización del medio semiótico deslizamiento, gesto indexical espacial, el cual tiene como propósito capturar a través del deslizamiento de los dedos sobre la hoja de trabajo los signos y la actividad matemática consignada allí. Lo anterior, para atraer la atención perceptual de los demás sujetos involucrados en la labor conjunta en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Expresiones lingüísticas asociadas a la ubicación espacial

Entre las expresiones lingüísticas utilizadas por los estudiantes para complementar y sincronizar los gestos indexicales espaciales, emergieron tres expresiones lingüísticas en particular: *ahí, hasta y aquí*. El *ahí* es empleado por los estudiantes para indicar un signo en particular que se encuentra consignado en la hoja de trabajo, que para esta investigación,

hace referencia al lugar a partir del cual se inicia la escritura de la secuencia numérica, es decir, el primer número de la secuencia que es utilizado, que en la mayoría de los casos no siempre es el uno.

La segunda expresión *hasta* tiene como propósito resaltar el cardinal de números utilizados de la secuencia numérica, de este modo, el cardinal del conjunto no solo se hace visible a los ojos de los estudiantes sino también a través de su canal auditivo. La tercera y última expresión lingüística utilizada en la actividad matemática es el *aquí* que tiene como propósito hacer visibles cada una de las agrupaciones de diez números que se pueden formar empleando los números del uno al ochenta y nueve. Ese aquí además de atraer la atención perceptual y auditiva de los estudiantes, pretende centrar la atención en la distribución y organización de las agrupaciones en el espacio, es decir, en la hoja de trabajo, la cual determina un papel fundamental en la manera como se está objetivando y materializando el concepto de decena.

Señalamientos con los dedos

Uno de los roles que desempeñaron los dedos de las manos en la labor conjunta en el proceso de enseñanza y aprendizaje consiste en el señalamiento de signos, representaciones gráficas de objetos físicos, conceptos o procedimientos matemáticos consignados en las hojas de trabajo. El señalamiento como medio semiótico de objetivación consiste en indicar aquellos signos que son utilizados por los estudiantes para abordar y dar solución a las tareas propuestas, los cuales desempeñan un papel fundamental en la manera como están interpretando, reflexionando y materializando la actividad matemática realizada en torno a las tareas propuestas.

Por ejemplo, en esta investigación el medio semiótico de objetivación señalamiento con los dedos, permitió atraer la atención de los estudiantes y de la misma profesora a través de su canal visual, ocasionando que la actividad perceptual de los demás se convirtiera en el medio a través del cual se puede acceder a las formas de acción, reflexión y expresión utilizadas por algunos estudiantes o la profesora. De esta manera una de las estudiantes señaló cada uno de los cardinales que representaban a cada una de las agrupaciones formadas (i.e., agrupación de una decena de números escritos en la hoja de trabajo), con el

propósito de comunicar la cantidad de agrupaciones que eran posibles formarse con los números del uno al ochenta y nueve.

Conteo múltiple a través de los dedos

En la actividad matemática realizada por los estudiantes emergió el medio semiótico de objetivación conteo múltiple a través de los dedos, los cuales desempeñaron el rol de artefactos que permitieron mediatizar la actividad y hacer visibles las intenciones de los estudiantes, en este sentido los dedos fueron utilizados para representar cada una de las decenas que debían ser añadidas a determinada cantidad, con el propósito de encontrar el complemento, es decir, igualar una cantidad mayor añadiendo una cantidad desconocida a la cantidad menor que es dada en la tarea. Esta cantidad añadida para este caso fue siempre la decena. Decena que fue materializada a través de cada uno de los dedos utilizados.

Además, los dedos como artefacto, desempeñaron el papel de ser el nuevo símbolo u objeto que permite representar las agrupaciones de primer nivel (i.e., decenas), con el propósito de diferenciarlas de las unidades sueltas, en este sentido, a través de este gesto emerge el vector que se ha denominado agrupación no posicional, el cual caracteriza el desarrollo y manifestación del pensamiento aditivo de los estudiantes.

Cerrar la mano

Una vez que eran utilizados los dedos de una de las manos para representar cada una de las decenas añadidas a los treinta y seis cerdos que se tenían en el corral, se recurría a cerrar la mano, con el propósito de representar y capturar el cardinal de decenas añadidas hasta el momento a los treinta y seis cerdos. Este medio semiótico de cerrar la mano fue reiterado en varias ocasiones tanto con la mano derecha como con la izquierda hasta lograr llegar a la cantidad que era requerida en la situación.

De este modo, para encontrar el complemento (i.e., cantidad desconocida para igualar una cantidad mayor a partir de una cantidad conocida) se recurría por un lado al producto entre el número de veces que fueron levantados los dedos de las manos y el número diez que representa cada dedo levantado.

Ritmidad colectiva

En la labor conjunta en el proceso de enseñanza y aprendizaje emergió el medio semiótico de objetivación denominado ritmidad colectiva, el cual consiste en pronunciar de manera sincrónica las palabras que refieren a los resultados de añadir cada una de las decenas al número treinta y seis por dos o más sujetos de manera simultánea. Este medio semiótico de objetivación es evidencia de la manera de interactuar y responder uno al otro, puesto que permite dar cuenta de las relaciones y modos de producción que están emergiendo en la actividad y así mismo de los medios materiales e intelectuales que están puestos en juego en esta producción del saber.

Golpes reiterados sobre la hoja de trabajo

En vez de recurrir a la escritura de la secuencia numérica en la hoja de trabajo los estudiantes utilizaron sus dedos para representar cada uno de los números de ésta a través de un leve golpe en la hoja de trabajo. De esta manera, cada golpe es realizado de izquierda a derecha, con el propósito por un lado, de hacer visible el orden de la secuencia numérica y por el otro de hacer concreto cada número utilizado de la secuencia numérica.

Este medio semiótico puede considerarse un recurso indispensable en la manifestación y evolución del desarrollo del pensamiento aditivo en estudiante que presentan discapacidad visual, puesto que a través de este medio pueden dar cuenta del proceso de conteo y la determinación del cardinal de una colección de objetos sin la necesidad de recurrir a la representación escrita de los números. Además, a través de este medio semiótico pueden dar cuenta de una forma más estable de conciencia asociada al vector conteo simple y a la recta numérica positiva.

Golpe marcación cardinal

Luego de ser utilizado el dedo índice para representar cada uno de los números de la secuencia numérica que podían ser escritos en la hoja de trabajo, se recurre a la utilización del dedo corazón para visibilizar y materializar el cardinal del conjunto de números que debían ser escritos en la hoja. Este gesto de golpear la hoja de trabajo con el dedo corazón tiene como propósito hacer visible una intención totalmente diferente a la que se tenía con el dedo índice, puesto que con éste se está visibilizando el número o la cantidad hasta la cual se debe llegar a partir de una cantidad dada.

Complemento en el aire

Para materializar y visibilizar a través de un gesto el complemento (i.e., cantidad desconocida para igualar a una cantidad mayor a partir de una cantidad menor conocida en la tarea) en la actividad matemática emergió el medio semiótico denominado complemento en el aire, el cual consiste en deslizar horizontalmente de izquierda a derecha la mano derecha, inicialmente tocando con la mano derecha la cantidad de dedos representados en la mano izquierda (i.e., cantidad menor conocida) para luego ser alejada horizontalmente de ésta y así representar la cantidad mayor.

Derecha-Izquierda

Con el propósito de hacer visible y materializar la equivalencia entre las unidades de primer nivel (i.e., decenas) y las unidades sueltas emergió en la actividad matemática el medio semiótico denominado derecha-izquierda, el cual consiste en representar con cada dedo de la mano izquierda cada una de las decenas que se requieran y simultáneamente con la mano derecha representar con cada uno de los dedos cada agrupación de diez unidades sueltas equivalentes a la cantidad que representa cada uno de los dedos de la mano izquierda. De este modo, en la actividad matemática se materializó la equivalencia entre tres decenas y treinta unidades.

Se quiere resaltar un hallazgo más en relación con la categoría nodo semiótico. En efecto, en la actividad matemática realizada por los estudiantes se movilizaron sincrónicamente varios medios semióticos de objetivación que permitieron dar cuenta en términos matemáticos de la función biunívoca que se estableció entre cada una de las decenas añadidas al número treinta y seis y cada uno de los dedos utilizados para representar éstas.

Esta función biunívoca se hace visible y se materializa a través de la actividad perceptual, el contacto entre el dedo pulgar de la mano izquierda y cada uno de los dedos de la mano derecha y la pronunciación de las palabras que refieren a cada uno de los resultados de añadir cada una de las decenas al número treinta y seis. Actividad perceptual, gestos y expresión lingüísticas que son utilizadas simultáneamente y se convierten en mediadores en el proceso de toma de conciencia de formas de pensamiento aditivo.

Proceso de objetivación contracción semiótica

Inicialmente en el establecimiento de la función biunívoca se recurrió a la movilización sincrónica de tres medios semióticos de objetivación; la actividad perceptual, el gesto de tocar con el dedo pulgar de la mano izquierda cada uno de los dedos de la mano derecha y la utilización de expresiones lingüísticas para referirse a cada uno de los resultados de añadir las diferentes decenas a los treinta y seis cerdos.

No obstante, a medida que se desarrollaba la actividad matemática se evidenció un refinamiento en los medios semióticos de objetivación, dado que se redujo la utilización del gesto tocar, con el propósito de evidenciar un nivel de integibilidad más profunda en relación con la función biunívoca, puesto que ésta se empezó a establecerse únicamente entre la actividad perceptual y las palabras que refieren a cada uno de los números mencionados, desapareciendo por completo la necesidad de tocar cada uno de los dedos de la mano derecha (i.e., decenas añadir al número treinta y seis) con el dedo pulgar de la mano izquierda.

Proceso de objetivación iconicidad

Con el propósito de capturar la cantidad de decenas añadidas al número treinta y seis emergió en la labor conjunta en el proceso de enseñanza y aprendizaje el medio semiótico de objetivación cerrar la mano, el cual fue materializado inicialmente con la mano derecha pero posteriormente fue reiterado con la mano izquierda, en este sentido se están reiterando las acciones pasadas para afrontar la tarea propuesta, expresado a través de los mismos gestos y acciones las intenciones y la manera como se está reflexionando.

Además, al ser propuesta y abordada la tarea dos se evidenció formas de acción, reflexión y expresión asociadas a la utilización tanto de la secuencia numérica como de gestos indexicales espaciales (ahí y aquí) que habían sido empleadas en acciones pasadas al afrontar la tarea uno, en este sentido en la actividad matemática está emergiendo el proceso de objetivación iconicidad, puesto que se recurre a acciones, gestos y formas de reflexionar que habían sido utilizadas al abordar y dar solución a tareas pasadas.

No obstante, a pesar de utilizarse formas de acción y reflexión similares, las formas de expresión no fueron del todo similares porque en la tarea uno se consignó en la hoja de

trabajo la secuencia numérica y lo que se estaba pensando mientras que en la tarea dos se materializó a través de la movilización del cuerpo, la coordinación entre las palabras lingüísticas utilizadas y la actividad perceptual, dando así cuenta de la manifestación y desarrollo del pensamiento como de los procesos psíquicos de la estudiante.

Subproceso de orquestación icónica

En la manera de abordar la tarea propuesta por la profesora, uno de los estudiantes reformuló y expresó de manera similar la forma como había sido comprendida y abordada la misma tarea por una de sus compañeras. En efecto, él a través de sus propios gestos, acciones y expresiones lingüísticas planteó una estrategia similar a la propuesta por ella para dar solución a ésta. Por esta razón, en la actividad matemática realizada por los estudiantes emergió el subproceso denominado orquestación icónica.

6.2 Síntesis y observaciones finales

A través de los datos seleccionados y analizados en esta investigación es posible evidenciar como la manifestación y evolución del pensamiento aditivo se concretiza y materializa no únicamente a través de los diferentes signos que se consignan en las hojas de trabajo, ni de las expresiones lingüística verbales utilizadas por los estudiantes sino también a través de otros recursos como: gestos, el movimiento corpóreo, la actividad perceptual, la ritmidad y el uso de artefactos como los dedos de los mismos estudiantes.

Recursos que pasan a ser completamente desapercibidos por los profesores y que realmente dan cuenta de la manera como ellos están interpretando y solucionando las tareas propuestas y que permiten a su vez, predecir las formas de actuar de los estudiantes, puesto que a través de estos recursos es posible comprender lo que en sus mentes está emergiendo, la manera como están reflexionando e instanciado formas de pensamiento matemático que han sido constituidas histórica y culturalmente por generaciones pasadas.

Esta investigación además permite afirmar que el cuerpo y la mente en el proceso de enseñanza y aprendizaje no están completamente aislados sino que se encuentran en una relación dialéctica en el que uno no puede desarrollarse sin el otro y sin que uno sea totalmente reducido al otro. En este sentido, en los procesos de enseñanza y aprendizaje no solo debe centrarse la atención en la formación de las capacidades intelectuales sino también

en las capacidades humanas, en el reconocimiento de que los actos del conocer y del ser están mediados por el cuerpo.

A su vez, es necesario destacar que el análisis realizado tanto a la actividad matemática como a las diversas producciones de los estudiantes permitió identificar algunos vectores que caracterizan el desarrollo y evolución del pensamiento aditivo. Vectores que están asociados al conteo simple, al conteo múltiple, a la agrupación no posicional y posicional, los cuales están relacionados con la evolución del pensamiento numérico a través de la historia y de las formas de reflexión, acción y expresión que han emergido en la actividad matemática de las diferentes generaciones.

No obstante, es necesario investigar con mayor profundidad la evolución de estos vectores, con el propósito de identificar las formas de pensamiento aditivo asociadas a cada uno de éstos y su respectiva evolución. De este modo, surge la necesidad de hacer un análisis más riguroso de los medios semióticos de objetivación, con el propósito de identificar y caracterizar la transición entre una forma de pensamiento y otra. Esta identificación de las formas posibilitaría establecer una aproximación a una génesis del pensamiento aditivo que a su vez ayudaría a la creación y consolidación de currículos.

En este contexto, es necesario investigar acerca de la toma de conciencia por parte de los estudiantes de formas de pensamiento aditivo más sofisticadas, puesto que las formas de acción, reflexión y expresión estuvieron asociadas al conteo simple, al conteo múltiple, a la agrupación no posicional y posicional, desapareciendo por completo el uso de la suma y la resta como estrategia para dar solución a tareas de tipo aditivo en los naturales, las cuales exigían el uso de estos algoritmos.

Como resultado de este estudio podemos afirmar que el proceso de objetivación contracción semiótica en esta investigación pone en evidencia acercamientos a los significados institucionales que están plasmados en la semiótica aditiva, es decir que el proceso de contracción semiótica es un acercamiento al pensamiento aditivo y a la instanciación de formas culturales de reflexión, acción y expresión que han quedado codificadas en la cultura.

Además, es posible afirmar que las formas de acción, reflexión y expresión asociadas al conteo, a los medios utilizados para este fin, a las diferentes agrupaciones formadas y a la manera en que éstas fueron realizadas por los estudiantes están impregnadas de significaciones histórico-culturales que han sido constituidas en la actividad laboral y la experiencia sensual de las generaciones pasadas. Es en este sentido, que los Sistemas Semióticos de Significación Cultural adquieren un papel fundamental en las formas de conocer y conceptualizar de los estudiantes, puesto que éstos dan directrices en los modos de producción y las relaciones de producción.

De este modo, a través de las tareas propuestas a los estudiantes se pueden observar instanciaciones del saber que evidencian ciertas maneras de observar, contar, agrupar, determinar el complemento que se debe añadir a una cantidad menor para igualarla a una cantidad mayor. Instanciaciones que han sido materializadas y concretizadas en la labor conjunta en el proceso de aprendizaje y enseñanza entre los diferentes sujetos implicados, estudiantes y profesor.

En términos generales, esta investigación aporta nuevos elementos teóricos y didácticos que por un lado posibilitan realizar una aproximación a la caracterización del desarrollo y manifestación del pensamiento aditivo y por otra parte replantear el proceso de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos asociados al pensamiento aditivo, con el propósito de que se desarrollos currículos en los cuales se tome conciencia de los aspectos corpóreos que guían las formas de acción, reflexión y expresión al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales.

Referencias bibliográficas

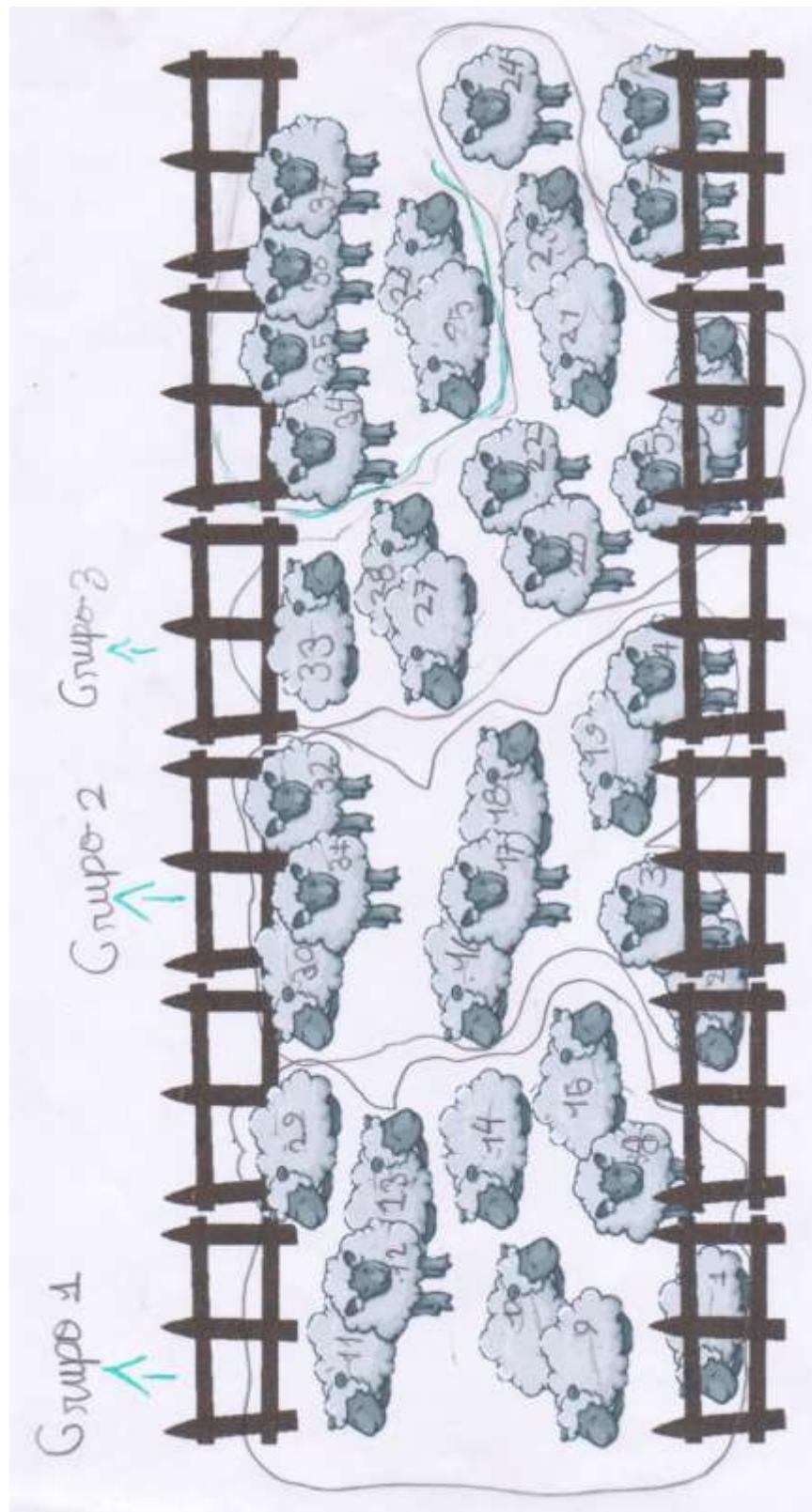
- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, 16(3), 5-28.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 267-300.
- Bonilla, M., Sánchez, N., Vidal, M., Guerrero, F., Lurduy, O., Romero, J., . . . Mora, L. (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor*. Grupo Editorial Gaia. Santa Fe de Bogotá, D.C.
- Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización. *Una empresa docente*. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Chamorro, M. d. C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*: Pearson Educación.
- Dickson, L., Gibson, O., & Brown, M. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. España: Barcelona: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press.
- García, G. (2007). Coordinación General. Estándares básicos de competencias en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.
- Goetz, J., & LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*: Madrid: Morata
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*.
- Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas desde una perspectiva semiótica cultural. Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. Colombia.
- Kant, I. (2007). Crítica de la razón pura, trad. Caimi, M. Buenos Aires: Colihue.
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, 19-44.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá. Imprenta Nacional de Colombia.
- Miranda, I. (2009). *Objetivación de saberes científicos-culturales relacionados con el movimiento lineal representado con gráficas cartesianas: una experiencia con estudiantes de bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 1-26.
- Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2013). Un origen matemático vs. dos orígenes fenomenológicos: la significación del movimiento de objetos respecto del punto (0, 0). *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 183-208.

- Obando, G., & Vásquez, N. (2008). Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica. Curso dictado en 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.
- Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática*, 12(1), 51-69.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, 22(2), 14-23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.
- Radford, L. (2006b). Semiótica cultural y cognición. In R. Cantoral Uriza, O. Covián Chávez, R. M. Farfán, J. Lezama Andalón, & A. Romo Vázquez (Eds.). *Investigaciones sobre Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* pp. 684-695. Mexico: Diaz de Santos.
- Radford, L. (2006c). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Smiotics, Culture and Mathematical Thinking*, pp.7-22.
- Radford, L. (2008a). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), . (Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture), (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Radford, L. (2008b). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96.
- Radford, L. (2009). "No! He starts walking backwards!"': interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The international Journal on Mathematics Education*, 41(4), 467-480.
- Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2010b). *Elementary forms of algebraic thinking in young students*. Paper presented at the Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Radford, L. (2010c). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the learning of mathematics*, 30(2), 2-7.
- Radford, L. (2010d). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2011a). *Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking*. Paper presented at the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking.

- Radford, L. (2011b). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education]. In J. Vallès, D. Álvarez & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent intervenció, innovació, investigació* [Teacher's activity: Intervention, innovation, research] (pp. 33-49). Girona (Spain): Documenta Universitaria.
- Radford, L. (2012a). *Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues*. Paper presented at the ICME-12 Regular Lecture, Seoul, South Korea. July.
- Radford, L. (2012b). *Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues*. Paper presented at the 12th international Congress on mathematical education.
- Radford, L. (2012c). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.
- Radford, L. (2013a). En torno a tres problemas de la generalización [Concerning three problems of generalization] Rico, L, Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. & Segovia, I. (Eds),. *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encamaciación Castro.*, Granada, España: Editorial Comares.
- Radford, L. (2013b). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramirez y Y. Morales (Eds). Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Santo Domingo, República Dominicana, November 6-8, 2013. Plenary Lecture. .
- Radford, L. (2013c). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.
- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. PhD dissertation. University of Palermo.
- Secretaría de Educación Distrital. (2007). Colegios públicos de excelencia para Bogotá. Orientaciones curriculares para el campo del pensamiento matemático. Serie cuadernos de currículo. Bogotá D.C.
- Sfard, A. (1998). *On acquisition metaphor and participation metaphor for mathematics learning*. Paper presented at the 8th International Congress on Mathematical Education: selected lectures: Sevilla 14-21 july 1996.
- Soneira, A. J. (2006). La teoría fundamentada en los datos de Glaser y Strauss. En Vasilachis de Gialdino, I. (Coord.),. *Estrategias de investigación cualitativa.*, (pp. 153-173).
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C. Colombia.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.
- Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales.*, Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. Colombia.

Vygotsky, L. S., Kozulin, A., & Abadía, J. P. T. (1995). *Pensamiento y lenguaje*: Paidós
Barcelona.

Anexos



NOMBRE: Dorund Yolipe Colunga Gutiérrez

EDAD: _____ CURSO: 302 FECHA: 12-09-2013

1. ¿Cuántas ovejas hay en el rebaño?

38 OVEJAS ✓

2. Agrupa las ovejas en decenas.



3. ¿Cuántas unidades se deben agrupar para representarlas en una decena?

Se deben agrupar 10 unidades

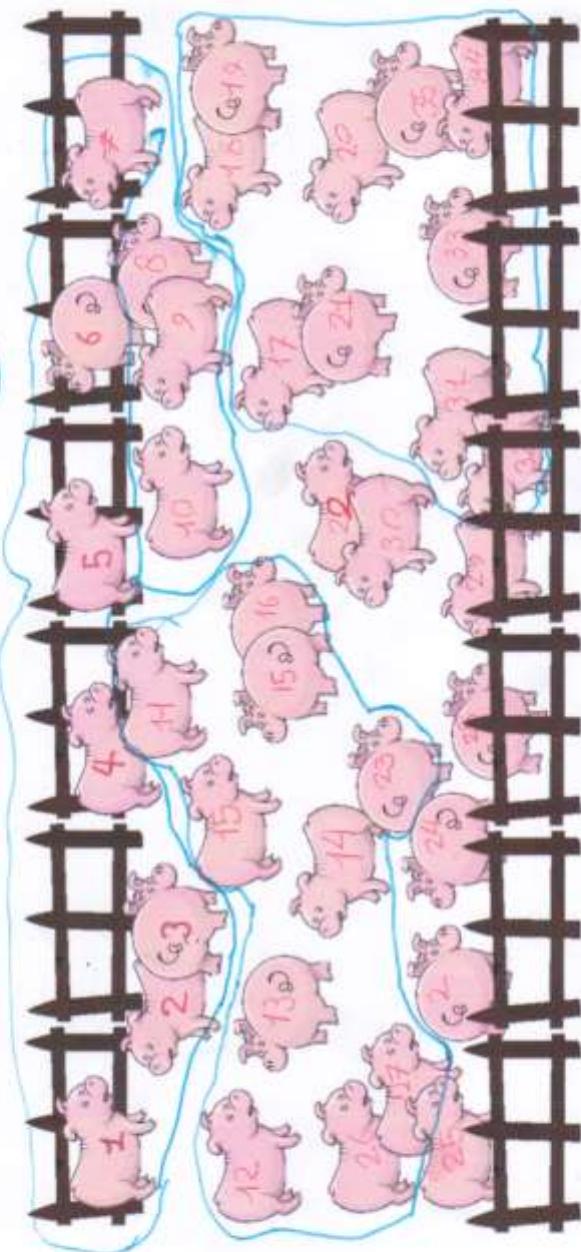
4. Dibuja las ovejas que hacen falta para formar cuatro decenas.



5. Juliana afirma que si se tuvieran ochenta y nueve ovejas en el rebaño, se obtendría 9 decenas y 8 unidades sueltas de ovejas. ¿Es verdadera o falsa la afirmación de Juliana? ¿Por qué?

Falsa porque si dice que hay
89 son ocho decenas y 9 unidades

Manuel Yelipe Colégio 3002



NOMBRE: José Luis Undurraga
EDAD: 8 Años, CURSO: 302, FECHA: 17 de Septiembre

1. ¿Cuántos cerdos hay en el corral?

Hay 37 cerdos

2. Explica el procedimiento o estrategia utilizada para determinar cuántos cerdos hay en el corral. Nombra otra estrategia distinta a la propuesta que también pueda ser utilizada.

1 Estrategia: Ponerle numero a los cerdos de + en
2 Estrategia: Hacer filas y contar los cerdos

3. ¿Cuántas decenas y unidades de cerdos hacen falta para formarse una centena de cerdos en total? Explica cómo obtuviste el resultado.

63

4. ¿Cuántas decenas de cerdos son necesarias para formar una centena? Utiliza un dibujo para dar solución a la pregunta.

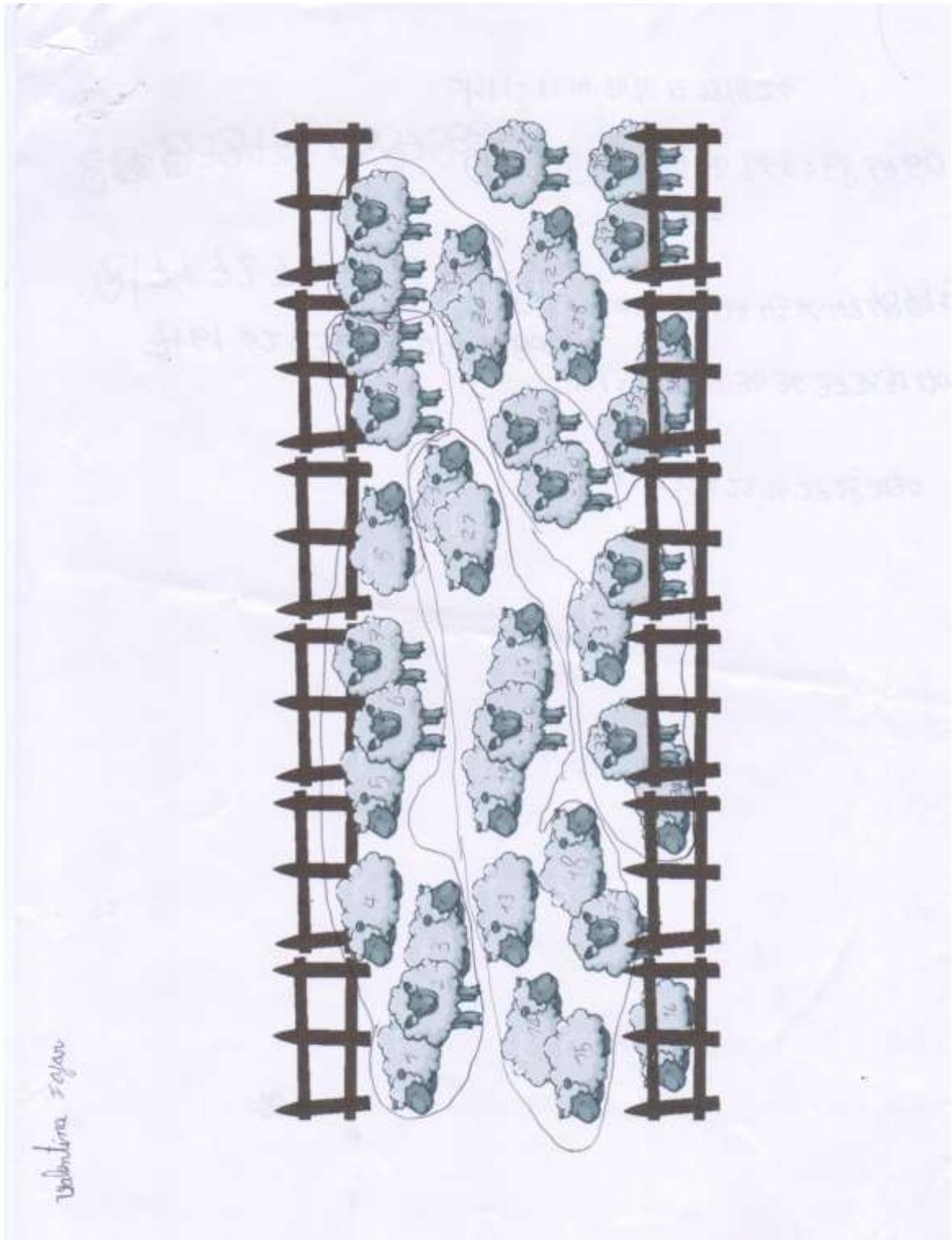
10

5. ¿Cuántos animales hay en total en la granja entre cerdos y ovejas? Expícale a uno de tus compañeros lo que hiciste.

$$\begin{array}{r} 37 \\ + 36 \\ \hline 75 \end{array}$$

6. Juliana necesita tener 190 cerdos en su granja. Si ella dispone de 36 cerdos, ¿cuántos cerdos le hacen falta? Explica la manera cómo llegaste al resultado. Encuentra otra manera de obtener el mismo resultado.

$$\begin{array}{r} 154 \\ + 36 \\ \hline 190 \end{array} \quad \begin{array}{r} 164 \\ + 36 \\ \hline 200 \\ - 10 \\ \hline 90 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ 4 \end{array}$$



Yardina's plan

10

12

36 21 22 23 24 25 26 27 28 24 30

7| 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
4| 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

8| 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
5| 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50

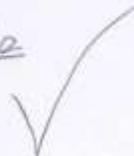
1| 2 3 4 5 6 7 8 9 10

8 182 83 84 85 86 87 88 89 6| 6 7 5 2 5 3 5 4 5 5 5 6 5 7 5 8 5 9 6 0

2| 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

NOMBRE: valentina Fajardo muñoz
EDAD: 8 AÑOS CURSO: 301 FECHA: 12 desembre

1. ¿Cuántas ovejas hay en el rebaño?
en el rebaño hay 38 ovejas



2. Agrupa las ovejas en decenas.

3 decenas



3. ¿Cuántas unidades se deben agrupar para representarlas en una decena?

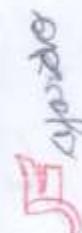
10 unidades

4. Dibuja las ovejas que hacen falta para formar cuatro decenas.

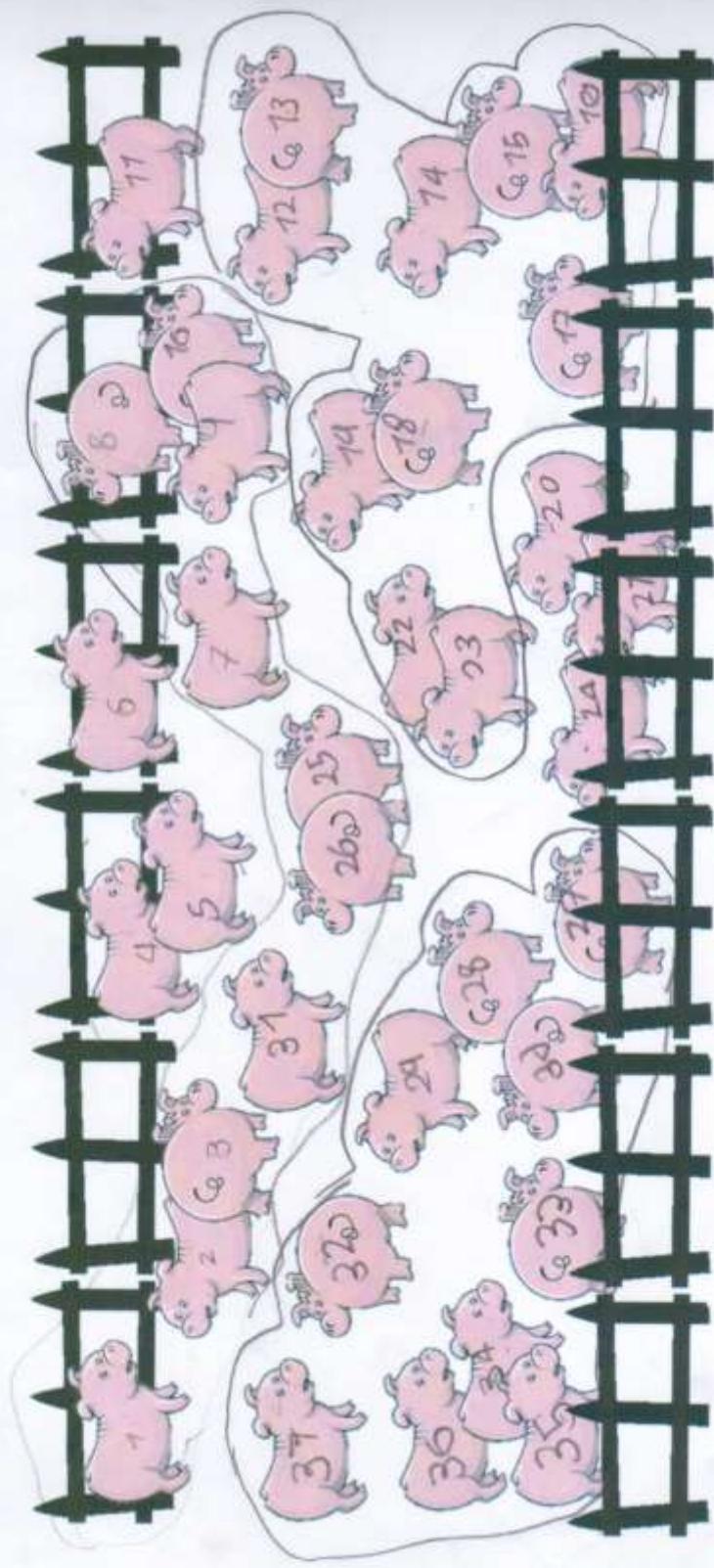


5. Juliana afirma que si se tuvieran ochenta y nueve ovejas en el rebaño, se obtendría 9 decenas y 8 unidades sueltas de ovejas. ¿Es verdadera o falsa la afirmación de Juliana? ¿Por qué?

falso y a demas no se alcanza a completar
la octava decena

Valentina  40020

$$\begin{array}{r} 114 \\ + 36 \\ \hline 200 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 154 \\ + 36 \\ \hline 0 \end{array}$$



38 39 40 41 42 43 44

NOMBRE: Valentina Esquero
EDAD: 3 Años CURSO: 301 FECHA: 17-Septiembre-2013

1. ¿Cuántos cerdos hay en el corral?

37

2. Explica el procedimiento o estrategia utilizada para determinar cuántos cerdos hay en el corral. Nombra otra estrategia distinta a la propuesta que también pueda ser utilizada.

yo primero hice numero los cerdos y
encontre el resultado

Tambien se puede contar de 1 en 1

3. ¿Cuántas decenas y unidades de cerdos hacen falta para formarse una centena de cerdos en total? Explica cómo obtuviste el resultado.

Hay que tener 7 decenas mas
y 63 unidades mas y lo obtuve
sumando y sumando y restando.

4. ¿Cuántas decenas de cerdos son necesarias para formar una centena? Utiliza un dibujo para dar solución a la pregunta.

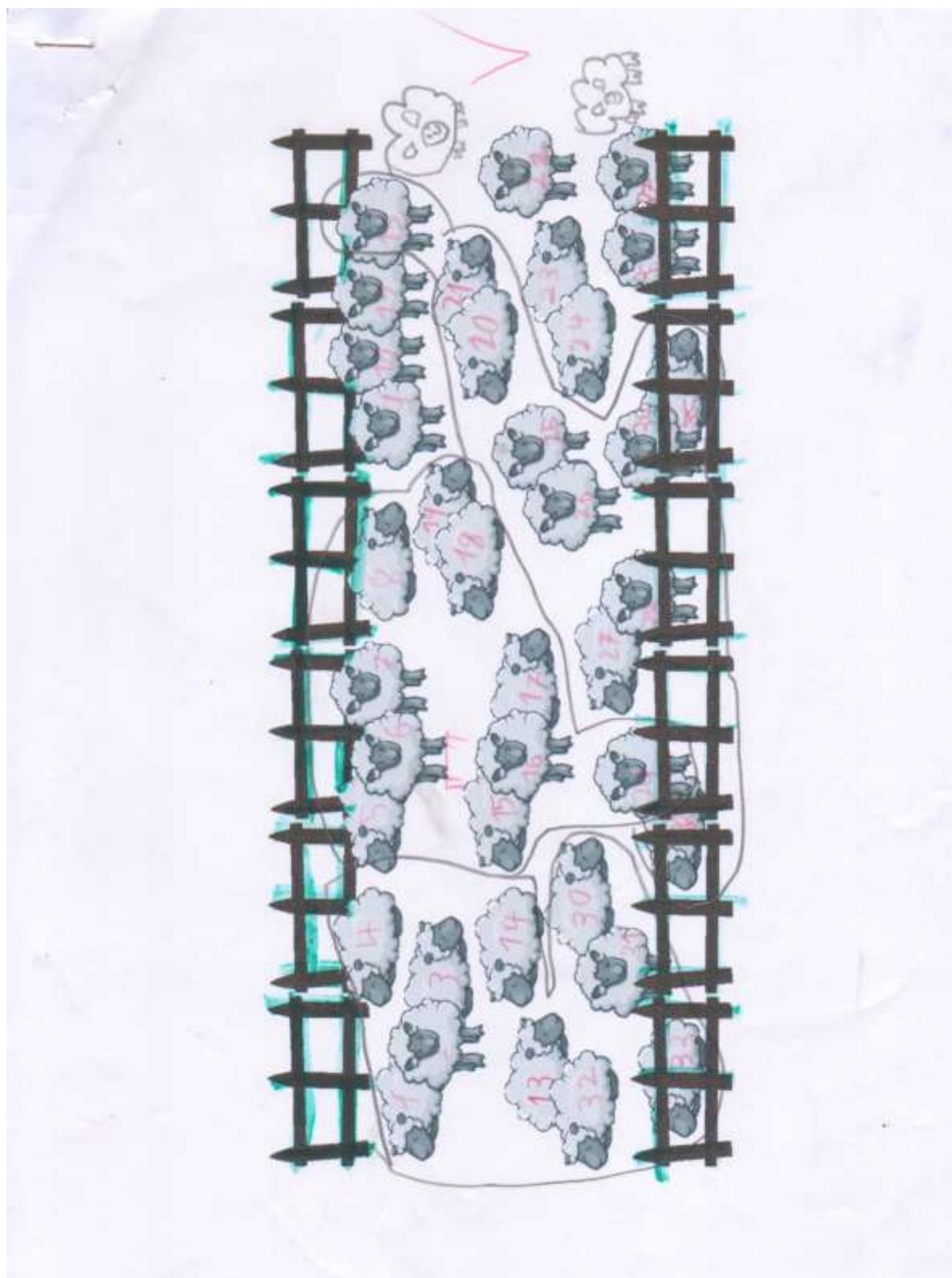


5. ¿Cuántos animales hay en total en la granja entre cerdos y ovejas? Explicale a uno de tus compañeros lo que hiciste.

$$\begin{array}{r} 38 \\ + 37 \\ \hline \end{array}$$

75

6. Juliana necesita tener 190 cerdos en su granja. Si ella dispone de 36 cerdos, ¿cuántos cerdos le hacen falta? Explica la manera cómo llegaste al resultado. Encuentra otra manera de obtener el mismo resultado.



NOMBRE: samuel santiago castroillo c.
EDAD: 8 CURSO: 303 FECHA: 12-9-2011

1. ¿Cuántas ovejas hay en el rebaño?

Hai 38 ovejas en el rebaño



2. Agrupa las ovejas en decenas.

30 ahí 3 decenas



3. ¿Cuántas unidades se deben agrupar para representarlas en una decena?

10



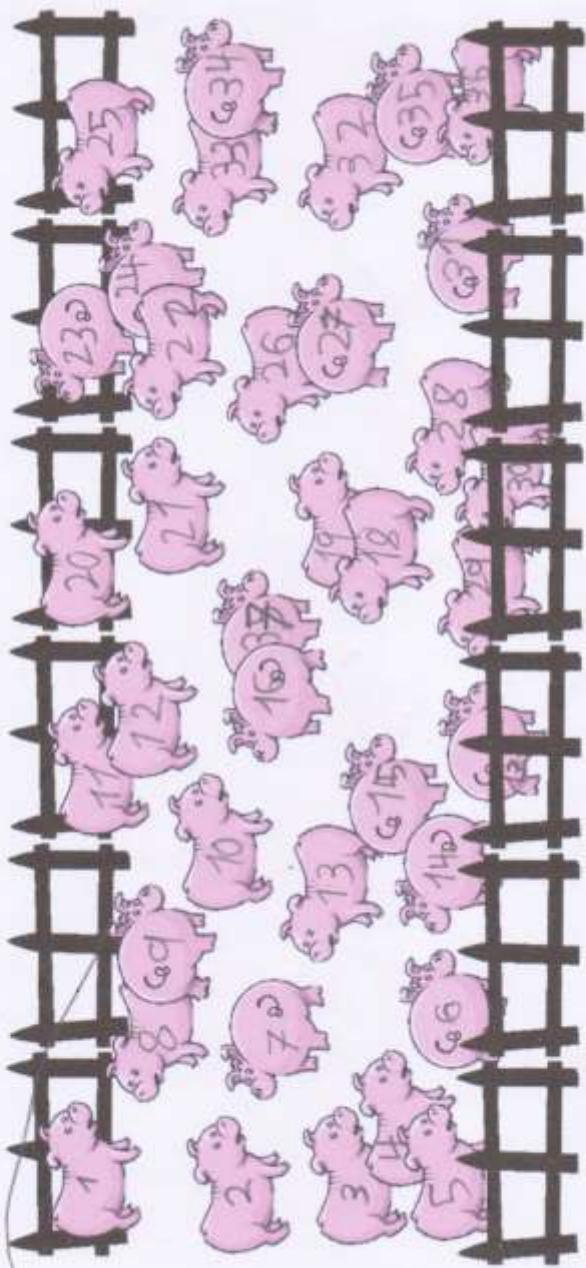
4. Dibuja las ovejas que hacen falta para formar cuatro decenas.



5. Juliana afirma que si se tuvieran ochenta y nueve ovejas en el rebaño, se obtendría 9 decenas y 8 unidades sueltas de ovejas. ¿Es verdadera o falsa la afirmación de Juliana? ¿Por qué?

No es cierto porque no sobran 8 unidades

named contíllón



NOMBRE: manuel santiago castro llançelit
EDAD: 8 años, CURSO: 303, FECHA: 12-9-2013

1. ¿Cuántos cerdos hay en el corral?

37 cerdos

2. Explica el procedimiento o estrategia utilizada para determinar cuántos cerdos hay en el corral. Nombra otra estrategia distinta a la propuesta que también pueda ser utilizada.

los enumere con un #
contarlos reunidos en decenas

3. ¿Cuántas decenas y unidades de cerdos hacen falta para formarse una centena de cerdos en total? Explica cómo obtuviste el resultado.

63 cerdos faltan

4. ¿Cuántas decenas de cerdos son necesarias para formar una centena? Utiliza un dibujo para dar solución a la pregunta.



5. ¿Cuántos animales hay en total en la granja entre cerdos y ovejas? Expícale a uno de tus compañeros lo que hiciste.

74

6. Juliana necesita tener 190 cerdos en su granja. Si ella dispone de 36 cerdos, ¿cuántos cerdos le hacen falta? Explica la manera cómo llegaste al resultado. Encuentra otra manera de obtener el mismo resultado.