SUMA 48
Febrero 2005, pp. 69-76

iMÁTgenes 13, 14 y 15

Hace más de dos millones de años el Homo Habilis transformó guijarros en herramientas de filos cortantes. Un millón de años después, su sucesor, el Homo Erectus, se dio cuenta de que sacando lascas de las caras opuestas de una misma piedra se conseguían herramientas mejores. Un cuarto de millón de años más tarde, esas herramientas se perfeccionaron más aún hasta tener formas regulares, más o menos simétricas y pulidas.

Lo que distingue al Homo Sapiens de sus antecesores es la talla de cosas inútiles pero bellas, bellas pero significativas. Hace unos 25000 años se talló en granito la primera figura conocida. La venus de Willendorf es una mujer generosa, casi obesa, sin cara, sin ángulos ni filos, redondeada. Se desconoce el proceso de su talla, pero seguramente su autor o autora, consciente o no de ello, imitó el efecto que tiene el agua de un río sobre las piedras amorfas que arrastra su corriente. Se da el caso de que otra figura posterior a esta, la venus de Lespugne, es una figura 'casi abstraída por completo en una geometría orgánica de conos, ovoides y esferas' (Honour y Fleming, 1991, p.21). En el origen del Arte y de la Tecnología encontramos pues el origen de la Geometría en cuanto a la simplificación, reducción y abstracción de las formas presentes en la realidad.

Diez o quince mil años después de tallarse las venus de Willendorf y Lespugne otros seres vivos son representados en las paredes y techos de cuevas en Lascaux y Altamira. Cazadores, armas y presas han sido liberados de una existencia tangible y de la fuerza gravitatoria que los mantenía en el suelo. Desprovistos de su tridimensionalidad, ahora forman parte de una superficie más o menos plana y rugosa. Primero trazan el perfil del animal. En ocasiones aprovechan una irregularidad o veta de la piedra que quizá les parece semejante al perfil real del animal. Para ello mojan un atillo de cerdas o de plumas o un dedo en la sangre de un animal muerto. Así, un perfil real se representa mediante el trazo que deja un punto en movimiento. Ese trazo delimita lo que es de lo que no es, la frontera entre un bisonte y lo que no es bisonte: la curva como perfil de una cosa, como encuentro entre lo que es algo determinado y lo que no lo es, la curva como frontera entre forma y fondo. A veces, el interior de esa curva cerrada se rellena soplando polvos de color a través de una caña o de un hueso hueco, la esencia del graffiti.

Cuando el fuego alumbra las pinturas el titilar de las llamas se refleja en las paredes y en el techo. También en los hombres y animales que allí parecen correr, persiguirse y morir. El efecto de luces y sombras alucina a quienes contemplan el espectáculo. El cazador representado corre realmente. El bisonte herido brama su muerte. A los espectadores de este cine rupestre les parece oler la sangre y el sudor, el aroma del poder. Ese movimiento aparente devuelve la vida y la dimensión perdida a sus protagonistas. Se hace de día en la noche.

Otros diez o qince mil años más tarde, en la antigua Grecia, algunos hombres muy sapiens concretan la idea de curva. Una curva es el vestigio de un punto en movimiento o la intersección de dos superficies.

Durante el siglo XX se conocerán otras curvas cuya generación difiere de ésta última. La recta es unidimensional. Una curva en sí misma también, pero necesita dos dimensiones para existir. Esas nuevas curvas tendrán propiedades que generaciones anteriores ni soñaron. Sus dimensiones podrán ser números decimales. Serán constructibles mediante un sencillo proceso iterativo y, precisamente por ser límites de estos procesos, serán invisibles a cualquier ojo, humano o mecánico, por potente que sea. Parecerán muy abstractas y alejadas del mundo natural. Sin embargo, siempre estuvieron en él. Lo están hoy, lo estaban en la Grecia antigua y también en Altamira. Se llamarán curvas fractales y albergan la paradoja.

Cuando se contemplan de cerca su aspecto es el mismo que si se observan de lejos. Ya no son aprehensibles mediante la visualización, siempre aparecen desenfocadas. Sólo el análisis lógico permite conocerlas. Tampoco sirven para distinguir la forma del fondo porque las hay que incluso lo colman, como la curva de Peano. A lo largo de miles y millones de años, una curva ya no es sólo un trazo que se aparta de lo recto, es también el límite de un proceso que hace difusa la frontera entre adentro y afuera, entre ser y no ser. ■

REFERENCIA

HONOUR, H. y FLEMING, J. (1991): *A World History of Art*. Laurence King Ltd. London.

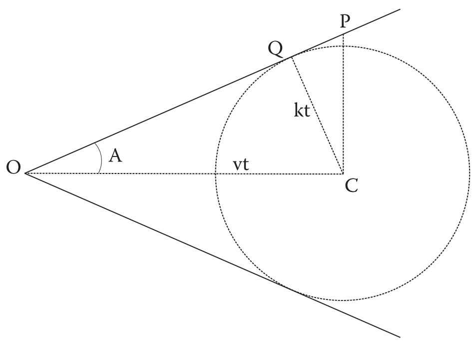
Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

Dada una familia de curvas, se llama envolvente a la curva que en todos sus puntos es tangente a una curva de la familia. La misma definición es adaptable a las superficies. En este sentido, la superficie más o menos esférica de la olla limada protagonista de la iMATgen 11 (*SUMA* n.º 47) sería la superficie envolvente de una familia de planos.

En la iMATgen 12 teníamos una familia de círculos expandiéndose sobre el agua del río Matarraña. Sus radios crecían con el tiempo a la misma velocidad. Bajo determinadas condiciones eso daba lugar a dos perfiles rectilíneos que eran tangentes en cada punto a una circunferencia. Esas dos rectas son pues las curvas envolventes de esa familia de circunferencias. Y son verdaderamente rectas si quien las produce nada en línea recta y con velocidad constante, sin aceleraciones, pero dejarán de serlo cuando el nadador aumenta o reduce su velocidad o si cambia de dirección.

Tomemos una familia de círculos con centro en un patito que está nadando. Considerando fijo el ánade se crea una familia de ondas circulares que se expanden a medida que se alejan de su origen. Sea v la velocidad con la que nada el patito siguiendo una línea recta horizontal y hacia la izquierda (que hará de eje de abcisas) y sea k la velocidad con la que las ondas se propagan en la superficie del agua. Supondremos que ambas, tanto v como k, son constantes. De este modo cada círculo tiene radio $r=k\cdot t$, siendo t el tiempo transcurrido desde que se generó la onda, y su centro está situado en un punto de coordenadas $(v\cdot t,0)$.

La familia de círculos se describe en función de este parámetro que es el tiempo t:



Las pendientes de estas dos rectas tangentes a la familia de circunferencias son:

$$m=\pm tgA=\pm\frac{PC}{OC}=\pm\frac{QC}{OQ}=\frac{\pm kt}{\sqrt{(vt)^2-(kt)^2}}=\frac{\pm k}{\sqrt{v^2-k^2}}$$

Si $v=\pm k\cdot\sqrt{2}$, las pendientes son 1 y −1, por lo que el ángulo formado por ambas rectas es recto. Si $v=k$, las pendientes son infinitas y se corresponden con uno de los casos ya descritos en la iMATgen 12. Si $v=0$, el patito está quieto flotando en el agua y en el denominador aparece la raíz cuadrada de un número negativo:

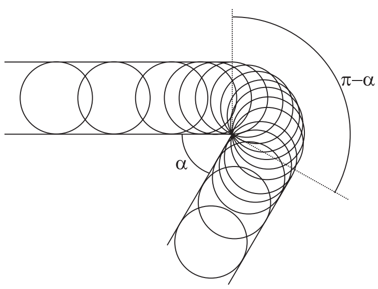
$$m=\pm\frac{k}{\sqrt{-k^2}}=\pm\frac{k}{k\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{i}=\pm i$$

En este caso la envolvente se reduce a un solo punto, el origen de coordenadas:

$$y=\pm i\cdot x \Rightarrow y^2=-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$$

Ya que el radicando del denominador de la pendiente debe ser positivo, solo existirá envolvente si $|k|\leq|v|$, cuando la velocidad k con la que se propagan las ondas en la superficie del agua no sobrepase la velocidad v de nado. Sólo entonces los círculos no atraparán a quien los produce.

En cambio, para que los perfiles de un trazo aerografiado constituyan su envolvente haría falta mucha habilidad. Pongámonos en el caso mencionado en la iMATgen 10 en el que en cada momento la superficie graffiada era un círculo. ¿Qué debe suceder para que los perfiles de un trazo realizado círculo a círculo sean su envolvente? Si observamos la fotografía de la iMATgen 10, nos daremos cuenta de que en un zigzag de amplitud α el perfil exterior sí es tangente en cada punto a un círculo de la família, pero no así la esquina interior del zigzag. Lo sería si el círculo de color pivotara sobre dicha esquina, es decir, si el artista, en lugar de cambiar de dirección bruscamente describiese un giro de amplitud $\pi-\alpha$. Como si perfilase ese pico agudo:



En tal caso, ambas curvas perfiles, además de envolventes, serán también paralelas. Para ello la mano del autor del graffiti deberá describir un arco de radio igual al diámetro del círculo grafiado y de amplitud $\pi-\alpha$. ■

iMATgen 13

Plaça de Catalunya, en Barcelona, a media mañana de un día de primavera del año pasado. Quince personas tomándose un respiro y varias palomas buscando algo que picar. Los bancos en los que descansan se encuentran en uno de los puntos más céntricos de la ciudad. Este es un rasgo de las ciudades sorprendente para los matemáticos. Una ciudad no tiene un centro único por muy redonda que sea. Barcelona tiene muchos, algunos bien gordos, otros alargados. Entre los primeros destacan las plazas redondas y cuadradas, pero también determinados edificios emblemáticos. Entre los últimos están los paseos, avenidas y playas. Todos esos centros figuran en la ruta del visitante y nadie que venga a Barcelona se marcharía sin haberlos visitado. El turista tacha iconos de su guía según el ritmo de los kilómetros recorridos. Entonces llega a un lugar tranquilo, se sienta en un banco, reflexiona sobre lo que ha visto y, si tiene la ocasión, comparte su experiencia con alguien. En este punto pillé a la mayoría de quienes aparecen en la fotografía.

¿Qué puede haber en esta imagen que no acabe de comprenderse del todo sin la perspectiva matemática? Por lo que a mi respecta, no tiene nada que ver con los árboles que aparecen en ella, ni con las palomas, ni con el suelo, sino precisamente con la gente que hay sentada. ¿Cómo agrupamos socialmente a la gente a partir de su distribución en el espacio? ¿Por qué se han distribuido así y no de otro modo?

El número de personas que aparecen en la fotografía, quince, puede obtenerse de muchas maneras, pero no de tantas atendiendo a la relación social que refleja su distribución. Hay tres bancos y en cada uno cinco personas. La imagen muestra 3·5=15 personas. En cuanto al total de cinco personas sentadas en el banco de la izquierda, se obtienen así: 5=1+1+2+1. No de otro modo, porque las distancias de separación ponen de manifiesto que las dos mujeres de blanco van juntas. La suma correspondiente a las cinco personas del banco central sería 5=1+1+1+2. Obsérvese que el hombre de blanco con pantalón largo tiene una bolsa que lo separa de la mujer que está a su derecha. En el banco de la derecha las cosas no están tan claras. Los dos hombres de la izquierda llevan bolsas de viaje y la pareja de su derecha no. Seguramente no van juntos, pero no es posible afirmarlo. Por otro lado, la conversación que mantiene la pareja con el hombre de la derecha los relaciona a los tres. En esta ocasión tenemos más alternativas: 5=2+2+1=4+1=2+3. Luego el total de personas puede obtenerse de varias formas:

$$15=3\cdot 5$$
$$15=(1+1+2+1)+(1+1+1+2)+(2+2+1)$$
$$15=(1+1+2+1)+(1+1+1+2)+(4+1)$$
$$15=(1+1+2+1)+(1+1+1+2)+(2+3)$$

Las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de números enteros aseguraran que cualquier reordenación de estas cifras o cualquier asociación distinta de unidades proporciona un resultado idéntico. Cierto, produce el mismo resultado, pero no reproduce la misma realidad social. En esta ocasión podría aplicarse la propiedad conmutativa, tanto da que se cuenten, por ejemplo, de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Pero no sería lo mismo escribir 15=(2+2+1)+(1+3+1)+(1+3+1) pese a que el resultado de esta suma sea el correcto. Aquí la asociación importa mucho y en esta suma se asocian elementos que no lo están en la realidad. Por eso escribir 15=3·5=(1+1+2+1)+(1+1+1+2)+(2+2+1) es un buen modelo matemático de la distribución de esa gente en el espacio. La suma de números enteros es asociativa y conmutativa, pero no siempre puede decirse lo mismo de la suma de personas.

Además de esto, había otro aspecto por el que la imagen se trasmutaba en iMATgen. Llamemos A_1, B_1, C_1, D_1 y E_1 a las cinco personas del primer banco, el de la izquierda. Sean A_2, B_2, C_2, D_2 y E_2 las cinco del segundo, el del centro, y A_3, B_3, C_3,

D_3 y E_3 las cinco del tercero, el de la derecha. Si se miden las distancias de separación entre ellas (tomando la cabeza como punto de referencia) se observa lo siguiente.

En el banco 1:
El punto medio de A_1E_1 está muy cerca de C_1.
El punto medio de A_1C_1 coincide con B_1.
D_1 está lejos del punto medio de C_1E_1.

En el banco 2:
El punto medio de A_2E_2 está lejos de C_2.
El punto medio de A_2C_2 coincide con B_2D_2.
El punto medio de B_2D_2 está más lejos de C_2 que de B_2 lo está el punto medio de A_2C_2.

En el banco 3:
El punto medio del banco está en el punto medio de D_3E_3.
El punto medio de A_3D_3 está en el punto medio de B_3C_3.
El punto medio de C_3E_3 coincide con D_3.
El punto medio de B_3 y el extremo del banco coincide con E_3.

Antes de sacar conclusiones relacionadas con esta serie de proporciones referentes a puntos medios de segmentos, reflexionemos sobre una experiencia que todos hemos vivido.

Disponemos de un banco vacío en el que sentarnos. Podemos sentarnos en un extremo o en el otro, pero también podemos hacerlo justo en medio. Si en el banco ya hay alguien el lugar escogido dependerá de si conocemos o no a la persona sentada y de si queremos o no evitarla. Si es un amigo o amiga, nos sentaremos junto a ella para compartir una charla. Si nos es desconocida procuraremos dejar un espacio vacío entre ella y nosotros. ¿Cuánto espacio? Depende de lo lleno que esté el banco y del lugar en el que se encuentre. Si está sentada en un extremo, quizá nos decidamos por el otro. En esta decisión intervienen muchos factores, entre ellos la imagen personal (quizá a partir de hoy, la iMATgen personal) y el sexo. ¿Qué pensaría si estando el resto del banco completamente vacío nos sentáramos junto a ella? La distancia que uno deja tiene significación social. Si somos muy educados podemos incluso considerar que sentarse a una distancia excesiva puede inspirar rechazo. Y en caso de que ambos extremos ya estén ocupados, muy probablemente optaremos por sentarnos en medio del asiento. Solamente cuando deseemos fervientemente un descanso y todos los demás sitios disponibles estén ocupados nos decidiremos a llenar el único intervalo vacío, por pequeño que sea, como en los bancos del metro en hora punta.

La relación existente entre quienes comparten asiento en un banco o entre quienes comparten espera en un mismo espacio se pone de manifiesto en lo que se ha llamado a menudo guardar las distancias. Esto es lo que sucede en la fotografía de esta iMATgen. Las proporciones anteriores relacionadas con el punto medio muestran como se confirma dicha referencia a la hora de escoger asiento. Y no sólo eso. En base a esta referencia podemos aventurar conclusiones:

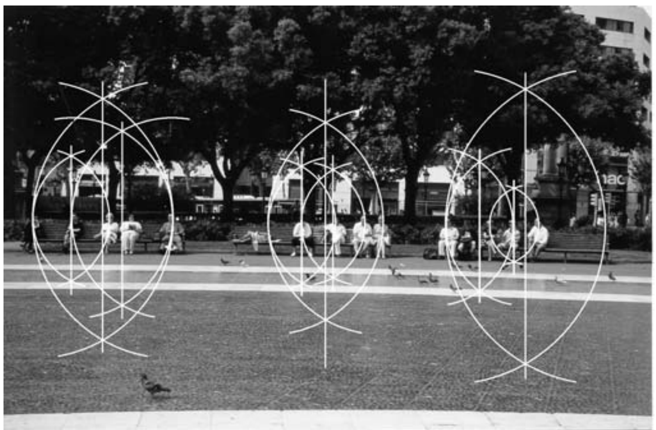
a. Al banco de la izquierda llegaron primero A_1 y E_1, aunque desconocemos quién fue el primero de los dos. Luego fueron C_1 y D_1 quienes tomaron asiento. Por cierto, fue C_1 quien escogió primero el sitio y D_1 se sentó a su lado. La elección del punto medio por parte de C_1 no fue exacta debido a la gran distancia entre los extremos. Finalmente, llegó B_1 y se acomodó entre A_1 y C_1. El hecho de que B_1 esté hablando por el móvil podría corroborar esta suposición.

b. La persona tumbada, A_2, fue la primera en llegar al segundo banco. Luego lo hicieron D_2 y E_2, la pareja de la derecha. Es posible que esta pareja llegase acompañada de C_2, quien se sentó algo más separado de ellos. La última en llegar fue B_2 y se sentó justo en medio de A_2 y C_2.

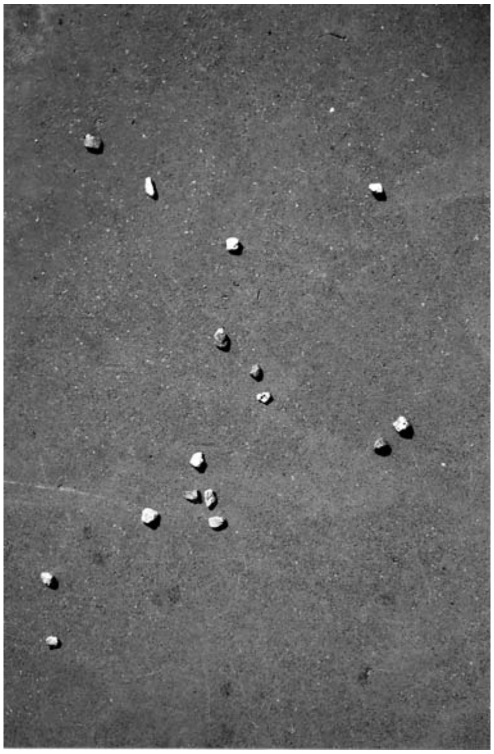
c. En el banco derecho hay tres grupos de personas: las parejas A_3B_3 y C_3D_3 y el hombre E_3. Probablemente, A_3B_3 fueron los primeros en llegar. Luego pudo llegar E_3, quien en lugar de elegir el extremo del banco se sentó en medio del espacio vacío. Al final llegó la pareja C_3D_3 y se sentó en el espacio reducido que quedaba entre los presentes. Una explicación al comportamiento de E_3 y C_3D_3 sería que el banco estuviera sucio a la izquierda de E_3, pero también es posible que las personas de este banco no vean las cosas como las he descrito o que haya entre ellas relaciones que una fotografía no puede mostrar.

En cualquier caso, el análisis realizado permite sin duda comprender mejor la imagen. Siguiendo el algoritmo de ocupar el punto medio, un banco acaba por llenarse. ¿Puede decirse lo mismo de un banco matemático como el intervalo [0,1] en el que se sientan personitas diminutas como puntos? Una respuesta afirmativa significaría que de medio en medio se llega a cualquier parte y se llena el todo. Esto significaría que todo número real x comprendido entre 0 y 1 sería límite de una sucesión de potencias (positivas o negativas) de 2.

Vemos como en determinadas conductas sociales se manifiesta la relación entre Matemáticas y Psicología del espacio. Una relación concretada aquí mediante la ***Predilección por el punto medio*** de un segmento, a la vez equidistante y a la vez el más alejado de sus extremos:



■



Eché al suelo dieciséis guijarros y cayeron así. Luego hice la foto. La imagen puede recordarnos las islas de un archipiélago, las estrellas de una constelación, un grupo de gente vistos desde arriba o una serie de puntos sobre el plano.

La fuerza con las que las lancé, la altura desde la que cayeron, el ángulo con el que impactaron contra el suelo, la humedad y temperatura ambientales en aquel instante, la elasticidad del suelo y la suya propia con la que rebotaron y saltaron, todo esto y mucho más influyó en el modo en que acabaron quietas y estables tras efectuar varios saltos y volteretas. Habrá quienes piensen que incluso mi estado de ánimo y la posición de los astros en el cielo también tuvieron algo que ver en el resultado, pero esa no es la perspectiva que guía mis ojos al contemplar esta imagen. ¿Acaso si las hubiera recogido enseguida y las hubiese lanzado de nuevo habrían quedado igualmente esparcidas? No. Sin embargo, en los cuatro o cinco segundos entre ambas experiencias ni mi ánimo ni los astros del cielo habrían cambiado. Muy diferentes resultados se habrían producido con las mismas condiciones iniciales. No es esta la base de la Ciencia.

Las variables son muchas y un leve cambio de las condiciones iniciales puede provocar un resultado muy distinto. Acordémonos de las mariposas del Pacífico. Pero, ¿es el azar un cúmulo ilimitado de variables? ¿Reside en las causas desconocidas de un resultado? ¿Existe el azar o es una invención humana? Sin duda es necesario comprender el azar y el determinismo para comprender la historia de esta imagen. El lector interesado en ello encontrará una vasta bibliografía sobre el tema. Pero la génesis de la imagen no está en ella misma y en esta sección el punto de referencia que se toma es lo visible en el espacio limitado por esos cuatro perfiles rectilíneos y perpendiculares llamado rectángulo.

En 1926 se publicó un trabajo que los críticos consideran fundamental en la obra de un pintor soviético vanguardista del arte abstracto. La obra trata de las reflexiones del artista sobre los trazos elementales que dan lugar a cualquier obra pictórica, figurativa o no. El título de ese libro, *Punto y Línea Sobre el Plano*, habría resultado muy apropiado para el Libro I de los *Elementos* de Euclides o para un tratado de geometría. Su autor, Kandinsky, abre la obra con una advertencia en la que utiliza una expresión en la que agrupa significados a menudo considerados contrapuestos: 'ciencias artísticas' (op. Cit., p. 13). Así deja claro que la sistematización de sus ideas, las reflexiones que va a exponer, se elaborarán de modo parecido a la reflexión científica. ¿Acaso no son los puntos y las líneas la base de la geometría? El Arte, la Ciencia y las Matemáticas se dan la mano en los conceptos y en la tecnología imprescindibles para realizar cualquier obra.

Kandinsky, como Euclides, empieza por definir el elemento fundamental de su trabajo: el punto. Distingue entre punto material y punto geométrico: *El punto geométrico es invisible. De modo que lo debemos definir como ente abstracto. Si pensamos en él materialmente, el punto se asemeja a un cero*. (op. Cit., p. 21). En cuanto a la línea: *La línea geométrica es un ente invisible. Es la traza que deja el punto al moverse y es por lo tanto su producto.* (op. Cit., p. 49). La distinción entre punto geométrico y punto material permiten considerar que *las posibilidades formales del punto son ilimitadas* (op. Cit., p. 26) y dar ejemplos de puntos materiales redondos, cuadrados, triangulares y estrellados, entre otros. El punto geométrico no tiene dimensión, su dimensión es nula. El punto dibujado, material, es tridimensional y se percibe como bidimensional (un círculo, un polígono, una estrella). Tiene periferia. En esto no se distingue de la línea dibujada.

El objetivo de Kandinsky es el aspecto perceptivo. Sus reflexiones se orientan a la interpretación y sugestión que producen en quien los observa una serie de puntos o líneas. Según su distribución, forma, grosor, etcétera, esos puntos o líneas provocan unas impresiones u otras en la mente de quien los observa. Unas impresiones que el autor llama tensiones, dinámicas, pesos.

Las leyes que regulan la percepción y agrupación de distintos estímulos en totalidades son fundamentalmente cuatro: proximidad, semejanza, continuidad y simetría (Pinillos, 1981). En concreto, bastantes aspectos figurales (sic) de la percepción, sobre todo la visual, han recibido considerable esclarecimiento a partir de las leyes de la Gestalt (Pinillos, op. Cit., p. 179). Gracias a su tamaño tan parecido las 16 piedras de esta imagen pueden ser consideradas como puntos en el plano. Viéndolas percibimos un archipiélago de 16 puntos formado por otros subarchipiélagos menores. ¿Por qué lo vemos así? Sobre todo por las leyes de semejanza y proximidad, pero ¿en qué radica la impresión de ver un archipiélago con subarchipiélagos o la de ver una línea o la de ver puntos aislados?

La respuesta es la proximidad. Tendemos a asociar lo que abarca la vista y, una vez abarcado, lo que está más próximo: dos puntos visibles pero separados determinan un ente (no necesariamente hay que llamarlo segmento) imaginario. En esta distribución:

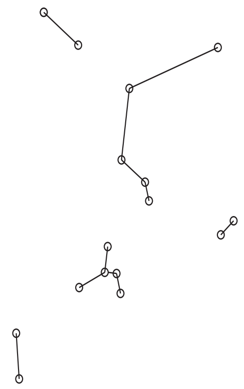
podemos ver un archipiélago de 18 puntos formado por otros archipiélagos menores (subarchipiélagos) de 3, 5 y 8. ¿Consideraremos que aquí hay algún punto aislado? Quizá no, pero si tuviésemos la imaginación de nuestros antepasados seríamos capaces de reconocer en esos puntos la forma de un escorpión. De ahí que dicha configuración, correspondiente a una nube de estrellas del firmamento, se llame constelación de *Escorpio*.

Al contemplar tres puntos X, Y y Z, tendemos a unir visualmente aquellos más cercanos entre sí (pongamos que sean X y Y) y a aislar de esa pareja el otro más lejano (pongamos Z). Percibimos el archipiélago de tres formado por dos suachipiélagos, uno de dos y otro de uno, a no ser que sean todos equidistantes, en cuyo caso veremos un archipiélago triangular. De lo contrario, siempre habrá uno de los tres más alejado de los otros dos, fuera de los círculos con centro en X e Y y de radio XY. En tal caso, ese punto será un punto aislado.

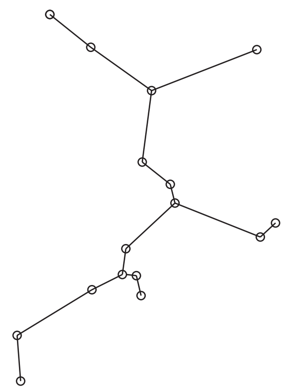
Luego en cada archipiélago finito de N puntos P_i hay una distancia mínima que determina el aislamiento: $d = \min\left\{\overline{P_iP_j}\right\}_{1\leq i,j\leq N}$.

Un punto P_k del archipiélago está aislado si $\forall i \neq k: \ \overline{P_kP_i} > d$. El valor d existe y es computable porque es el más pequeño de una serie finita de números. Este *Algoritmo de Mínima Distancia* identifica los puntos aislados de una nube finita de puntos, pero no la configuración asociativa que es el propio archipiélago. Contemplando una serie de islas o estrellas asociamos cada una con aquella que le queda más cerca. Es este *Algoritmo Asociativo de Proximidad* el que nos hace ver una configuración lineal curva en la constelación de Escorpio.

La asociación por proximidad, entendiendo ésta en asociar cada piedra con aquella que le queda más cerca, produce el resultado siguiente:



Pero podemos llevar las cosas más lejos. El *Algoritmo de Proximidad* produce subarchipiélagos. Nada nos impide aplicarlo de nuevo para asociar unos con otros conectando aquellos subarchipiélagos más próximos. Entendiendo esta proximidad como la mínima distancia determinada por puntos de subarchipiélagos distintos:



Esta versión iterativa del *Algoritmo de Proximidad* se asemeja bastante a la realidad perceptiva y es tan asociativo que no deja ningún punto aislado. Además, cuando el número N de puntos se hace grande, la proporción entre las N-1 conexiones que produce y las $\binom{N}{2}$ posibles se hace cada vez menor:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{N-1}}{\binom{\text{N}}{2}} = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} = 0$$

Por eso su efectividad mejora a medida que aumenta el número de islas, estrellas o, ¿por qué no?, de amigos. Las conexiones establecidas mediante este algoritmo son muy pocas en comparación con todas las posibles al mismo tiempo que garantizan que todo el mundo esté conectado. Su aplicación no deja a ***Nadie solo***. ■

REFERENCIAS

Kandinsky, V. (1926): *Punto y Línea Sobre el Plano. Contribución al análisis de los elementos pictóricos.* Edición castellana de Editorial Paidós. Barcelona 1996.

Pinillos, J. L. (1981): *Principios de Psicología.* Alianza Editorial. Madrid, 1981.

iMATgen 15

Líneas de espuma en el parabrisas de un automóvil. Tras ellas unas nubes en el cielo y los ángulos oscuros de varias fachadas. Esta imagen se ha hecho característica en los breves intervalos que median entre el cambio del rojo al verde de un semáforo. Algo corriente hoy en día en muchos cruces de calles de las grandes ciudades. Quienes se aplican en el lavado de parabrisas suelen ser inmigrantes. Acostumbran a trabajar en parejas, especialmente en los cruces de avenidas y calles amplias.

Hubo un tiempo en que esos limpiadores solicitaban educadamente el permiso de sus clientes antes de iniciar su tarea. Ya no. Ahora pasan de toda cortesía y directamente te emplastan un estropajo mojado encima del parabrisas y empiezan a frotar. A ti te toca precisamente el día que, aunque no inmaculado, menos sucio llevas el cristal, o el día en que no tienes ninguna moneda, o el día en que no te da la gana que se te imponga pagar por algo no solicitado. Tu le dices que no, que no quieres que te laven el parabrisas, que no tienes monedas. ¡*No importa, tengo cambió*!, te asegura él o ella. Entonces, si accedes, es peor. Le das un billete, por ejemplo, de 10 euros y enseguida él empieza a revolver una bolsa o sus apretados bolsillos traseros en busca de las monedas que te debe. Pero no las encuentra o no le llegan. Hace rato que el semáforo está en verde. Ya has puesto primera y mantienes presionado el embrague. Los conductores que te siguen se impacientan y hacen sonar las bocinas. Él sigue buscando cambio, pero no lo encuentra. El semáforo se pone rojo de nuevo. Desde atrás te llegan los gritos de los automovilistas. En tu retrovisor ves unos brazos agitándose. Tú piensas que eres inocente. ¿Por qué no se meten con él en lugar de hacerte pagar a ti la demora? Mientras, el limpiador ha ido a buscar a su colega. Cuando por fin regresa te da solamente ocho euros. ¿Qué? ¿Dos euros por un trabajo de 15 segundos? Te dice que no les queda cambio y se va a cazar otro cliente. El semáforo se pone verde otra vez. ¡Mierda! Arrancas dejándote otros 20 euros de neumático en el asfalto y, ahora te das cuenta, con restos de espuma en los extremos del parabrisas. Cuando se seque habrá que limpiarlos otra vez.

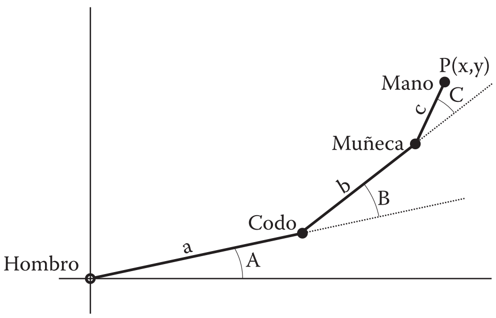
¿Cómo comprender la imagen sin saber cuál es el origen de esas curvas? La imagen muestra el vestigio de algo universal que alude no solamente a su autor, sino a mi, a ti, a todas las personas del planeta, a todos nuestros antepasados y descendientes, próximos y lejanos, que sean capaces de escribir, pintar, dibujar o lavar frotando un suelo, un cristal, una pared o una mesa con la mano. Alude también a quienes hace miles de años habitaron los espacios huecos en las laderas de una montaña y que, igual que esos jóvenes del año 2004, se acercaron a una superficie irregular de la pared o techo que los cobijaba para impregnarla de colores, líneas y figuras.

La actividad humana se fundamenta en las extremidades del cuerpo. Pocas tareas pueden desarrollarse sin su participación. Obviamente hacen falta para escribir, pintar y lavar, pero también para sostener un libro, tocar un instrumento, pinchar un disco y conducir. Incluso en aquellos casos en que alguien no puede disponer de brazos, son las piernas o el cuello y la cabeza las que sustituyen su mecánica. Desde el hombro hasta la yema de los dedos disponemos de seis segmentos óseos (brazo, antebrazo, mano y tres falanges) articulados en otros tantos centros de rotación (hombro, codo, muñeca y tres nudillos). La longitud de esos segmentos y la amplitud de esas articulaciones determinan el alcance y la capacidad de nuestras acciones. ¿Cómo entender esta imagen sin comprender esto?

En el caso de esta imagen tres son las variables que intervienen. Para lavar un parabrisas se ponen en movimiento el brazo, el antebrazo y la mano. Los dedos se usan para agarrar bien el estropajo. Esos tres segmentos se articulan desde sus respectivos centros de giro: el hombro, el codo y la muñeca. Para simplificar la cuestión consideraremos dos aspectos. Uno, que la acción del brazo se desarrolla en un solo plano, el del parabrisas. Así que todos los giros tendrán lugar en ese mismo plano. Y dos, que el hombro es un punto fijo de dicho plano.

El brazo será un segmento de longitud *a* cuyo centro de rotación de amplitud *A* está en el hombro. El antebrazo es un segmento de longitud *b* que puede girar según una amplitud *B* con centro de rotación en el codo. La mano, más concretamente el puño que encierra el estropajo, es un segmento de longitud *c* que gira con centro en la muñeca según una amplitud *C*.

¿Qué zona del parabrisas queda al alcance del limpiador sin mover el hombro de su sitio? Imaginando un sistema de coordenadas con origen en el hombro y llamando *P* al punto más lejano alcanzado por la mano (derecha) que agarra el estropajo:



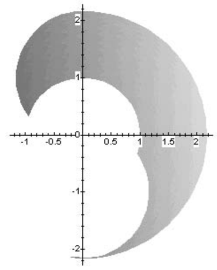
Esta posición representada aquí correspondería al brazo derecho. Las amplitudes *B* y *C* se han tomado con relación a las direcciones de los segmentos precedentes (brazo y antebrazo). El estropajo se halla en el punto P(x,y):

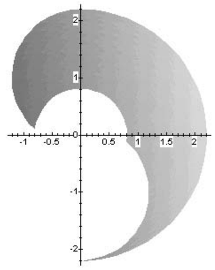
$$P(x,y)\begin{cases} x = a \cdot \cos A + b \cdot \cos(A+B) + c \cdot \cos(A+B+C) \\ y = a \cdot sen A + b \cdot sen(A+B) + c \cdot sen(A+B+C) \end{cases}$$

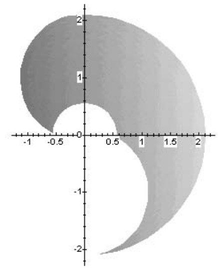
En el caso del brazo derecho, podemos tomar como amplitudes $A\in[-\pi/2,\pi/2]$, $B\in[0,3\pi/4]$ y $C\in[-\pi/6,\pi/4]$; y como segmentos a=1, b=0,8 y c=0,4. Un programa de cálculo científico como Maple permite representar la zona accesible. Las instrucciones pertinentes son:

```
> with(plots):
> animate3d([ 0,
          cos(x)+0.8*cos(x+y)+0.4*cos(x+y+z),
          sin(x)+0.8*sin(x+y)+0.4*sin(x+y+z)],
          x=-Pi/2..Pi/2,y=0..3*Pi/4,
          z=-Pi/6..Pi/4,
          scaling=constrained, orientation=[0,90],
          style=patchnogrid,axes=normal,frames=9);
```

La siguiente serie de imágenes muestra la secuencia de la zona accesible para tres valores de *C*: -π/6, 5π/12 y π/4.







Algo parecido sucede al pintar un cuadro o al escribir, ya sea con tiza en una pizarra o con lápiz o bolígrafo en el papel. Del mismo estilo es también la zona alcanzable por la punta de un pie manteniendo fija la cadera y moviendo la pierna en un único plano perpendicular al suelo. En tal caso reducimos el problema a tres segmentos (muslo, pierna y pie) y tres articulaciones (cadera, rodilla y tobillo). Coordinar sus movimientos es muy importante para golpear una esfera flexible.

En realidad, tanto en el caso de un brazo como en el de una pierna libres de movimiento, las amplitudes de las articulaciones no se restringen a ángulos planos, sino sólidos. La zona de acceso de un miembro libre es pues tridimensional, una superficie circular.

Los vestigios curvos del movimiento humano y animal surgen de un juego de círculos. Esto nos iguala a todos. También con quienes levantan su mano para pedirnos ayuda o comida, aquellos que han hecho célebre la frase ***¡Es triste pedir, pero más triste es robar!*** Con la que a menudo nos acosan mientras un semáforo está rojo. ■