"La derivada a la caratheodory, una nueva concepción en el aprendizaje y la enseñanza del calculo"

Angélica Roció Vargas Garay
angelikius_90@hotmail.com
María Andrea Torres Aldana
maria_andreatorres@hotmail.com
Nidia Lucia Quintero Bolívar
nidis_89@hotmail.com
Universidad de Cundinamarca, Sede Fusagasugá

Resumen

A nivel educativo la noción de derivada se enseña en los cursos regulares de cálculo, pero por lo general, siempre en la forma en que fue definida por Cauchy, por ejemplo en Montoya (2004), para calcular la derivada de $f(x) = x^2$ cuando $x = a$, se usa la definición de Cauchy así:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

En el anterior procedimiento se hace necesario hacer una factorización, de otro modo se tendría cierta dificultad para calcular la derivada de $f(x) = x^2$ cuando $x = a$; por otro lado, si recordamos el teorema del valor medio, es posible calcular la derivada de f en a evitando el límite, así:

$$f'(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

A partir de allí Constantin Caratheodory establece una definición diferente: sea $f: U \to \mathbb{R}$ donde U es un abierto, entonces f es diferenciable en el sentido de Caratheodory si existe una función $\emptyset_f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de modo que se satisface que:

$$f(x) - f(a) = \emptyset_f(x)\,(x-a);\ \forall x \in U$$

Donde $\emptyset_f$ tiene las siguientes características: $\emptyset_f$ es la función de pendientes de rectas secantes, es una función continua, $\emptyset_f$ (a) es el valor de la derivada de f en a, es decir $f'\ a = \emptyset_f\ a$. Esta definición presenta tres aspectos didácticos destacados: Nos muestra que el proceso de acercamiento de las pendientes de las secantes a la pendiente de la tangente es continuo y por tanto, la continuidad es esencial para la derivabilidad, la segunda parte se refiere a la facilidad de la derivación como un proceso de factorización repetitivo y no como cálculo de límites, así como simplicidad en la demostración de teoremas de linealidad, regla de la cadena, algebra de derivadas (suma, producto y cociente), aplicado a funciones polinómicas de valor real y la tercera es que a nivel escolar se generan alternativas en la enseñanza del cálculo a través de la implementación de conceptos nuevos, con el fin de evitar procedimientos tediosos que se tienen con las definiciones tradicionales como la de Cauchy.

Introducción

Una de las nociones más utilizadas dentro de las matemáticas es la de derivada, formulada explícitamente por primera vez por Isaac Newton, pues aparece naturalmente en diferentes tareas del conocimiento, tales como la física, la química, la biología, la ingeniería, etc. Por lo general, esta noción se enseña en los cursos regulares de cálculo, siempre en la forma en que fue definida por Cauchy en 1823, la cual se ha constituido en uno de los tópicos más importantes del cálculo, tanto en la enseñanza secundaria como universitaria. Sin embargo una definición diferente de derivada la aplicó Constantin Caratheodory, en 1954, facilitando gran parte del manejo demostrativo de algunos de los teoremas del cálculo diferencial. Partiendo de las ventajas mostradas por la derivada de Caratheodory, en el año 2007 se da inicio a un proceso de investigación en la Universidad de Cundinamarca, en el cual se ha logrado obtener demostraciones de los teoremas del algebra de derivadas del cálculo diferencial utilizando la definición de derivada a la Caratheodory, dar una interpretación geométrica de esta y establecer una comparación con la derivada de Cauchy, lo cual ha sido base para orientar nuevos procesos de investigación que permitan explorar las ventajas que brinda esta definición de derivada. Estas investigaciones han permitido ver la gran utilidad que representaría llevar a las aulas de clase los resultados ya obtenidos, diseñándolos de manera clara y asimilable para los diferentes niveles, donde sea posible aportar a la construcción de un currículo que proponga diversas alternativas de aprender un tema y plantee el uso de distintas herramientas metodológicas para su enseñanza. Es así como se pretende, realizar un análisis de las dificultades que muestran los estudiantes en el aprendizaje de la derivada, y diseñar material didáctico que permita una mejor comprensión del concepto, a partir de la acomodación de los resultados obtenidos de las investigaciones ya realizadas.

Planteamiento del problema

¿Cuál de las nociones conocidas de la derivada, permiten una mejor comprensión y facilidad en los procesos de demostración y álgebra de derivadas para funciones polinómicas de valor real? La derivada es uno de los conceptos matemáticos con mayor aplicación a los problemas de la vida diaria, es por ello que se introduce desde el nivel de secundaria definido como lo hizo Cauchy, sin embargo esta definición implica problemas y dificultad tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, ya que incluye el concepto de límite. Ante dicha situación dada la existencia de otras definiciones de la derivada, que pueden facilitar la comprensión del concepto, es una buena alternativa hacer uso, por ejemplo, de la derivada a la Caratheodory, la cual se basa en procesos de factorización y ha sido utilizada para simplificar los procesos de demostración de teoremas muy conocidos. El presente trabajo pretende elaborar material didáctico con el cual se pueda mostrar la utilidad de la derivada a la Caratheodory en la definición de derivada, la demostración de los teoremas de linealidad, regla de la cadena, algebra de derivadas (suma, producto y cociente), aplicado a funciones polinómicas de valor real, además de establecer la comparación con la derivada de Cauchy apoyados en la interpretación gráfica; dado que no existen antecedentes de su aplicación pedagógica y que es allí, donde se ve la facilidad de dicha derivada frente a otras definiciones, se pretende a través de la presentación de un material de trabajo, que además de mostrar otra alternativa a los docentes para introducir este concepto a sus estudiantes, contribuya a la construcción de un currículo de matemáticas que proporcione diversos caminos a la hora de abordar temas tan importantes como el de la derivada.

Marco teórico

Factorización

La factorización es la descomposición de un objeto o número (por ejemplo, un número, una matriz o un polinomio) en el producto de otros objetos más pequeños (llamados factores), que al ser multiplicados resulta el objeto original. El caso que será más utilizado para encontrar la derivada a la Caratheodory es:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots ab^{n-2} + b^{n-1});\in \mathbb{N}$$

Recordemos que $a^n - b^n$ siempre es divisible por$(a - b)$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Función

Una función de X en Y, es una relación de X en Y que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. Es decir, si

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b);\ donde\ a,b \in X$$

Dominio

El dominio de f es el conjunto de existencia de la misma, es decir, los elementos para los cuales la función está definida, se denota como $Df= \{x \in X;\ \exists\ y\in Y, f(x) = y\}$

Rango

El rango de f está formada por los valores que alcanza la misma. Es el conjunto de todos los objetos transformados, se denota como $Rf= \{y \in Y;\ \exists\ x \in X, f(x) = y\}$

Función polinómica de valor real

Si el dominio de una función es un intervalo de la recta real la función se denominará real, además si f es de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_n + a_0$ donde $a \in \mathbb{R}$, la función se dice polinómica de valor real.

Limite de una función

Decimos que el límite de la función f es L cuando x tiende a a, y lo escribimos como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que se puede encontrar x suficientemente cerca de a de tal forma que $f(x)$ esta también suficientemente cerca de L, es decir:

$$\text{Si } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Continuidad de una función en un punto

Se dice que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in X$, si $\forall\ \varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ $donde = min\ \{\delta_1,\delta_2\}$, tal que:

$$\text{Si } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Continuidad de una función

Se dice que f es continua si f es continua $\forall a \in X$

Derivada según cauchy

La derivada de f en a es el valor de la pendiente de la recta que es tangente al punto a, y se denota como:

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si el límite existe.

Derivada según caratheodory

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ donde U es un abierto, entonces f es diferenciable en el sentido de Caratheodory si existe una función $\phi_f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de modo que se satisface que:

$$f(x) - f(a)= \phi_f(x)(x-a);\forall\, x\in U$$

Donde ϕ_f tiene las siguientes características:

- ϕ_f es la función de pendientes de rectas secantes
- ϕ_f es una función continua
- $\phi_f(a)$ es el valor de la derivada de f en a, es decir $f'(a) = \phi_f(a)$

Teorema del valor medio

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(a) -f(b)}{a-b}$$

Geométricamente, existe un punto tal que la pendiente de la recta que es tangente a él, es igual al valor de la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Enseñanza del cálculo

Martínez de la Rosa (2001) nos muestra claramente que la definición de derivada de Cauchy no es sencilla en el sentido de cálculos de límites y dada la importancia de que las Matemáticas se tiene el disponer de una imagen intuitiva de un concepto formal no trivial, parece natural plantearse otra estrategia docente de la habitual en lo que a este concepto se refiere, intentando dotar a la definición de Cauchy de una visualización que permita su mejor asimilación en las primeras fases del aprendizaje y que se centre en su aspecto fundamental así como de evitar muchas dificultades que se presentan a través de otras miradas a esta noción como la de Caratheodory, además de considerar la interpretación geométrica de la definición de Cauchy como el punto inicial para motivar la idea de que es posible definir la derivada usando distintas configuraciones. Generalmente, dentro de la enseñanza del cálculo, la derivada de Cauchy y la demostración de los teoremas del algebra de derivadas, linealidad y regla de la cadena, se hacen a partir de la misma, sin embargo, resultan tediosas y extensas, lo cual podemos evitar usando la noción de derivada de Caratheodory, aunque existen referencias sobre su fundamentación teórica aún no se ha trabajado a nivel práctico.

Investigaciones anteriores

En el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cundinamarca sede Fusagasugá, se han venido adelantando procesos de investigación en la parte disciplinar de la misma, como en la demostración de teoremas fundamentales del cálculo usando la definición de derivada a la Caratheodory, que anteriormente se habían hecho usando la definición de derivada de Cauchy, Cubillos (2008) plantea a continuación una de ellos:

<u>Teorema: Regla de la cadena</u>

Si f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f(a)$; entonces gof es diferenciable en a y

$(gof)'(a) = g' f((a) f'a)$

Demostración

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$; y sea $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en $f(a) \in \mathbb{R}^m$, entonces

$$g(f(a)) - g(f(a)) = \phi_g(f(x))(f(x) - (f(a)) = \phi_g(f(x))\,\phi_f(x)\,(x-a)$$

Donde ϕ_f es la función derivada para f en a y ϕ_g es la función derivada para g en $f(a)$. Dado que ψ es continua en $f(a)$ y ϕ es continua en a, tenemos que gof es diferenciable en a. Más aún:

$$(gof)'(a) = \psi'(f(a))\,\phi(a) = g'(f(a))\,f'(a)$$

Metodología

El objetivo de nuestra investigación es elaborar material didáctico que contribuya a la comprensión de la definición de derivada, dando a conocer un concepto de gran utilidad pero muy poco usado en el aula, como lo es la derivada de Caratheodory, dirigido a estudiantes de un primer curso de calculo de nivel universitario y secundaria, la metodología que mejor se adapta es la cualitativa, ya que sus características nos permitirán: realizar nuevos hallazgos en las ventajas que presenta la definición de derivada de Caratheodory, no reducir la investigación a variables tales como número de estudiantes, influencia del profesor, ni intensidad horaria del curso, comprender las dificultades en el aprendizaje de la derivada y proporcionar otra alternativa de enseñanza, sin profundizar en las causas que originan tales dificultades, no tomar una población representativa, sino analizar a profundidad una muestra significativa que proporcione la información requerida para el estudio, abrir paso a nuevas líneas de investigación acerca de la aplicación en el aula de la derivada a la Caratheodory y despertar interés en docentes y estudiantes por nuevas formas de abordar la derivada.

Para la recolección de datos haremos una lectura y análisis de las investigaciones previas sobre la derivada según Caratheodory y los estudios ya realizados sobre la enseñanza del calculo a fin de tener una base teórica para llevar a cabo el trabajo, luego de esto usaremos la aplicación de una prueba diagnostica que permitirá identificar las falencias en el aprendizaje de la derivada, lo cual dará paso a la elaboración del material didáctico que una vez diseñado será aplicado de tal forma que se identifiquen las mejoras necesarias para la elaboración final de éstas.

Los avances en la investigación han sido dados por consultas bibliográficas y adaptación de algunas demostraciones de teoremas del algebra de derivadas de un primer curso de calculo universitario e inicio de la elaboración del borrador de la prueba diagnóstica que posteriormente aplicaremos.

Análisis de datos

Hasta el momento los datos analizados han sido aquellos extraídos de las investigaciones ya realizadas, los cuales nos han permitido identificar cuáles son los aspectos de la derivada de Caratheodory que pueden ser llevados a los niveles propuestos en esta investigación (primer curso de calculo universitario y secundaria), así se han adaptado algunos teoremas del algebra de derivadas de variable real, tendiendo inicialmente a funciones polinómicas, encontrando que aunque esta derivada se puede aplicar a las demás funciones su manejo requiere de conceptos y definiciones que aun no son tratados en los niveles en los que basaremos nuestro estudio.

Conclusiones

- Al analizar la información de las investigaciones ya realizadas sobre la derivada a la Caratheodory, encontramos que para su enseñanza en un primer curso de cálculo son necesarios conceptos previos que aun no se tienen en este nivel, por lo cual el estudio se centrara en las funciones polinómicas de variable real, pues con estas se puede evidenciar la facilidad en las demostraciones ya que su desarrollo requiere tan solo de un manejo algebraico sin hacer uso del límite que muchas veces causa dificultad tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de la derivada.

- Con la realización de este trabajo, lo que pretendemos logra es mostrar otra alternativa en la enseñanza de la derivada, a través de la definición dada por Caratheodory, además de dar a conocer a docentes y estudiantes los estudios ya realizados en el tema y las ventajas que presenta; diseñando para ello material didáctico que permita la transformación de los resultados ya obtenidos al nivel de un primer curso de cálculo.
- El estudio permitirá contribuir en la renovación del currículo de matemáticas, proponiendo diversas alternativas de abordar un tema como el de la derivada, aportando herramientas de enseñanza que contribuyan a ello.

Bibliografía

- Cubillos, Darío (2008). Un acercamiento a la derivada a la Caratheodory y sus aplicaciones. Memoria para optar al Título de Licenciado en Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad de Cundinamarca, Fusagasugá, Colombia.
- Herrero, Pedro Campillo (1998). La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele. Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia. España, 69-80.
- Kuhn, Stephen (1991). The Derivative a la Caratheodory [La Derivada a la Caratheodory]. The American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 1, Published by: Mathematical Association of America. 40-44.
- Martínez de la Rosa, Félix (2001). Aspectos educativos de las otras definiciones de la derivada. Departamento de Matemáticas. Universidad de Cádiz. pp. 8.
- Montoya, Octavio (2004). Relatividad de la derivada. Memorias XVII encuentro de geometría y V de aritmética, Colombia. 233-240.
- Pinzón, Sofía & Paredes, Marlio (1999). Revista INTEGRACIÓN. Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas Vol. 17, No 2,65-98.