La resolución de problemas en el pensamiento matemático avanzado: El caso de la elaboración de significados de la definición de espacio topológico

John Gómez Triana
johngomezt@gmail.com
Proyecto Curricular LEBEM
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"

Resumen

La presente conferencia se sitúa en el contexto de la resolución de problemas en el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1988) y en ella se presenta algunos apartes del trabajo de investigación titulado "El proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico: un estudio de caso" (Gómez, 2009) en el que se analizó el proceso de elaboración de significados (Radford, 2006) de la definición de espacio topológico, realizado por un estudiante para profesor de matemáticas de la LEBEM[1], por medio de la resolución de problemas entendida como metodología de aprendizaje. Para realizar el análisis de dicho proceso, se tomó como datos el ejercicio de metacognición (Santos, 2007) del proceso de estudio de la definición, llevado a cabo por el estudiante, el cual se sistematizó utilizando como herramienta la propuesta metodológica hecha por (Mason, Burton & Stacey, 1982) en su libro "Pensar Matemáticamente". Partiendo de los resultados del análisis, se presenta una reflexión acerca de la pertinencia y conveniencia de realizar un ejercicio de metacognición del proceso de estudio de la definición de un concepto matemático, enmarcado en el pensamiento matemático avanzado, y la contribución del mismo en el proceso de elaboración de significados del objeto matemático al cual hace referencia la definición; esto es, cómo un ejercicio de metacognición del proceso de pensamiento, se convierte en una herramienta para dotar de sentido a los objetos matemáticos o a las definiciones de los objetos matemáticos.

Introducción

En la comunidad investigadora en educación matemática y los lineamientos curriculares (NCTM, 2000, MEN, 1998), se privilegia "la actividad matemática". Es decir, se considera como objetivo general y principal, el que los estudiantes "aprendan a pensar matemáticamente" a través de la *resolución de problemas.* Esto es, el poner énfasis en los procesos característicos como clasificar, particularizar, generalizar y argumentar (Mason, Burton & Stacey, 1982). Ahora bien, cuando el énfasis está en los procesos de demostrar, definir y abstraer o en objetos matemáticos avanzados cómo función, límite, espacio topológico, etc., se trata del *pensamiento matemático avanzado* [PMA] (Tall, 1988).

Según Radford (2006), por *pensamiento* entendemos reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida tanto histórica como culturalmente y un individuo que la refracta y la

1 Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"

modifica según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios. Además, en el curso de la actividad matemática "los objetos matemáticos son patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.)" (Radford, 2006, p. 111).

Las *definiciones* son ejemplo de objetos presentes en la cultura de la comunidad matemática. En este contexto, la definición es una forma de palabras usada para especificar un concepto (Tall & Vinner, 1981, p. 152) y satisface las reglas de la lógica (Poincaré, 1908), citados en Puig (1996). Cuando un estudiante se pone en la tarea de aprender conceptos de matemática avanzada, se encuentra con una dificultad relacionada con el entendimiento de las definiciones de los objetos matemáticos, dice Tall (1992) que el problema radica en que el método individual de pensamiento sobre conceptos matemáticos no depende solamente de la forma de las palabras usadas en una definición, si no que, "dentro de la actividad matemática, las nociones matemáticas no son solo usadas acordando su definición formal, también a través de representaciones mentales que pueden diferir con respecto a diferentes personas" (Tall, 1992).

El cómo, un estudiante para profesor de matemáticas, dota de sentido a una definición de un concepto matemático enmarcado en el pensamiento matemático avanzado, utilizando como herramienta una propuesta metodológica basada en la resolución de problemas, entendida como metodología de aprendizaje, es lo que se presenta en este trabajo. Además, se plantea una reflexión acerca de cómo contribuye la sistematización y análisis del proceso de estudio de la definición, en la elaboración de significados del objeto matemático al que refiere tal definición.

Referentes Teóricos

Según Puig (1996), por el proceso de resolución de problemas se entiende "la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea." (Puig, 1996, p.34). Partiendo de lo anterior, debemos considerar que en el proceso de resolución de problemas, es posible que el estudiante que se enfrenta al problema, transforme el problema en otro a través de un cambio de registro, la simplificación del problema original, un caso particular o un problema general. Esto hace parte de lo que Polya (1945) llama heurísticas. Pero al transformar el problema en otro, es lo que Puig (1996) llama *herramientas heurísticas*. Las herramientas heurísticas y la búsqueda en fuentes de información está clasificado como *estrategias de resolución* (Santos, 2007).

Ahora bien, en el proceso de resolución de problemas, el *pensamiento matemático* es entendido como "un proceso dinámico que, al permitirnos aumentar la complejidad de las ideas que podemos manejar, extiende nuestra capacidad de comprensión" (Mason, Burton y Stacey, 1982, p. 167). Mason et al. (1982) en su libro titulado Pensar Matemáticamente, realizan una propuesta metodológica basada en la resolución de problemas, que permite el desarrollo del pensamiento matemático por medio de la sistematización y reflexión del proceso de resolución de problemas de cada individuo. Dicha propuesta, está influenciada por los planteamientos de Polya (1945) sobre la manera de resolver problemas de matemáticas. Mason, Burton & Stacey (1982) identifican tres fases en el proceso de resolución de problemas de matemáticas: **Entrada, Ataque y Revisión**. Estas fases están presentes en el proceso de resolución de una serie de problemas propuestos en el libro, los autores afirman que en el momento en el que un individuo haga explícita cada una de estas fases durante la resolución de cualquier problema de matemáticas, podrá tener herramientas que faciliten el desarrollo del pensamiento matemático.

En el obra citada se presenta una metodología que puede ser utilizada para resolver ciertos problemas de matemáticas que no están alejados del contexto real de cualquier individuo. De esta manera, se propone una serie de estrategias para que el resolutor las utilice en el proceso de resolución. Estas estrategias están enmarcadas en las tres grandes fases enunciadas anteriormente y están asociadas a lo que los autores llaman **rótulos**. Los rótulos son unas etiquetas que aconsejan utilizar durante la resolución de cualquier problema de matemáticas y que se convierten en una manera de sistematizar el proceso de resolución, para que pueda ser analizado durante el mismo. Las características de cada una de las fases con sus respectivos rótulos son descritos a continuación:

1. *Fase de abordaje:* Esta fase tiene que ver con formular el problema de forma precisa y decidir exactamente qué es lo que se quiere hacer. Hay que hacerse con el problema de dos maneras distintas; identificando la información que se da y determinando qué es lo que se pregunta realmente. Por último, se debe hacer preparativos técnicos para el ataque central, que pueden consistir en decidir una notación a utilizar o una forma de anotar los resultados de las particularizaciones. Por estas razones es útil estructurar el trabajo en la fase de abordaje respondiendo a las tres preguntas siguientes, que a su vez son rótulos: ***¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero? y ¿Qué puedo usar?***
2. *Fase de ataque:* La fase de ataque está determinada cuando se siente que el problema se ha instalado dentro de la mente y ya es propiedad del individuo, y se completa cuando o bien se abandona o bien se resuelve. ***Intentar, Podría ser, Pero ¿por qué?, ¡ATASCADO! y ¡AJA!*** Son los rótulos propuestos en esta fase.
3. Fase de revisión: Está determinada cuando se consigue una resolución razonablemente buena o cuando se está a punto de rendirse, en este momento es esencial revisar el trabajo hecho. Como su nombre lo indica, es el momento de mirar atrás, a lo que ha pasado, para mejorar y ampliar la capacidad de razonamiento y para intentar situar la resolución en un contexto más general. ***Comprobar, Reflexionar, y Extender.*** Son los rótulos que se aconseja utilizar en la fase de revisión.

Es así como la metodología propuesta por Mason, Burton & Stacey (1982) privilegia la sistematización y reflexión del proceso de resolución de problemas en aras de desarrollar el pensamiento matemático. Esto es lo que Shoenfeld (1987) llama *metacognición* y que ``[…] se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema‘‘(Santos, 2007, p. 59).

Por otro lado, de acuerdo con Tall (1988), el pensamiento matemático avanzado ocurre en un campo conceptual matemático donde son apropiadas las estructuras matemáticas abstractas disponibles para fortalecer una red de relaciones deductivas. Por consiguiente, "hay actividades preliminares poniendo el fundamento para el pensamiento matemático avanzado que introducen conceptos no inmediatamente abstraídos de la realidad, tal como la noción matemática de un proceso infinito, la noción de un límite, [la noción de un espacio topológico] o el cardinal del infinito" (Tall, 1988).

Entonces el pensamiento en matemáticas avanzadas es más que sólo la estructura final de la teoría matemática ya qué el "pensamiento matemático avanzado hace parte del proceso completo de resolver problemas de matemáticas, de los procesos creativos involucrando resonancias entre deducción y asociación previamente no relacionadas, o incluso indefinidas". (Tall, 1988, p. 7). En este sentido, un proceso específico puede ser designado como pensamiento matemático avanzado porque es parte, o incluso potencialmente parte, del ciclo completo de resolución de problemas de matemáticas.

En este contexto, ``el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados''. (Radford, 2006 p. 113). En este sentido, se podría afirmar que ``la resolución de problemas no es el fin sino un medio para alcanzar [...] esa reflexión cultural que llamamos pensamiento matemático''. (Radford, 2006, p. 114).

Metodología

El trabajo de investigación se trató de un estudio de caso, en el que se observó y se analizó el proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico de un estudiante para profesor de matemáticas, teniendo como objetivo responder a la siguiente pregunta: ¿Qué elementos de la metodología propuesta por Mason, Burton & Stacey (1982), para la resolución de problemas de matemáticas aparecen durante la elaboración de significados de la definición de espacio topológico? Para la obtención de los datos, el estudiante, realizó un ejercicio de metacognición de su proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico; esto tomando como base la propuesta hecha por (Mason, Burton y Stacey, 1982) en especial los rótulos propuestos en cada una de las fases presentes en el proceso de resolución de problemas.

Los datos fueron recogidos utilizando como instrumento de recolección principal un cuaderno que se llamó cuaderno de trabajo y en el que el estudiante consignó el proceso de estudio y comprensión de la definición de espacio topológico. Como instrumento de recolección auxiliar se optó por grabaciones en audio en las que están plasmados los aspectos del proceso de pensamiento que se escapan de la expresión escrita, es decir, las grabaciones fueron utilizadas para registrar aquellas ideas que difícilmente quedan plasmadas en el proceso de sistematización de la información en el cuaderno de trabajo, ya que corresponden a los procesos de pensamiento que se llevan a cabo cuando se reflexiona acerca del proceso llevado de manera escrita. El cuaderno de trabajo y las grabaciones puede considerarse como lo que Radford (2006) llama *artefactos,* ya que por medio de ellos, se refracta el pensamiento y son pensamiento mismo. Por esto, es posible observar el pensamiento y el proceso de elaboración de significados desde esta concepción no mentalista del mismo.

Resultados

Inicialmente, se partió de la definición de espacio topológico tomada del libro de Runde (2005) titulado "A Taste of Topology".

Definición: Sea X un conjunto. Una topología en X es un subconjunto τ de $\mathfrak{P}(X)$ tal que:

a) $\emptyset, X \in \tau$

b) Si $\mathcal{U} \subset \tau$ es arbitrario, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$

Los conjuntos en τ son llamados abiertos. Un conjunto junto con una topología es llamado un espacio topológico. Generalmente escribimos (X, τ) para un espacio topológico *X* con topología τ ; algunas veces, si la topología es evidente o irrelevante, podemos simplemente escribir *X*.

El estudiante debía iniciar un proceso de estudio con el objetivo se dotar de sentido a la definición y teniendo en cuenta la propuesta metodológica de Mason et al. (1982). Observando dicho proceso, se evidenció qué es tal metodología durante el estudio de la definición de un objeto matemático, ya que, además de distinguirse las tres fases presentes en todo proceso de resolución de problemas, es posible sistematizar el desarrollo del proceso de elaboración de significados de la definición por medio de la utilización de los rótulos presentes en la metodología ya mencionada. Un ejemplo

(VER EJEMPLO 1) de lo anterior lo constituye el inicio del estudio de la definición, lo que podría considerarse como la fase de abordaje debido a que los rótulos permitieron la sistematización del proceso llevado a cabo por el estudiante[2] al intentar dotar de sentido a la definición de espacio topológico.

Ejemplo 1[3]

Lo que sé: *inicialmente, es necesario estar familiarizado con la notación utilizada en el enunciado de la definición, en este caso, se debe tener claro qué quiere decir cada símbolo, por ejemplo, se debe conocer que el símbolo $\mathfrak{B}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X, es decir, $\mathfrak{B}(X)$ corresponde al conjunto llamado partes de X.*

Cabe resaltar que entre mis conocimientos previos se encuentran aspectos relacionados a los espacios métricos, como las propiedades de la unión, la intersección y la definición de conjunto abierto.

Lo que quiero: *Elaborar significados y dotar de sentido a la definición de espacio topológico*

Lo que puedo usar: *Cambio de registro*

Una topología en un conjunto X es un subconjunto τ del conjunto de partes de X tal que cumple 3 propiedades

a) El conjunto vacío y el conjunto X pertenecen a la topología.

b) Si un conjunto arbitrario U está contenido en la topología, entonces la unión de los subconjuntos U de U también pertenecen a la topología.

c) Si dos subconjuntos U_1 y U_2 de U pertenecen a la topología, entonces la intersección de U_1 y U_2 también pertenecen a la topología, es decir, la intersección finita pertenece a la topología.

El anterior ejemplo corresponde a un aparte de los datos obtenidos en el trabajo de investigación, tales datos fueron analizados teniendo en cuenta las tres categorías que plantea Schoenfeld (1987), citado en Santos (2007), para un ejercicio de metacognición. Debido a la importancia de dichas categorías durante todo el proceso de elaboración de significados de la definición, es necesario enunciarlas junto con el análisis realizado al finalizar la investigación.

Categorías presentes en un ejercicio de metacognición

1. El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar: Al realizar una descripción del proceso de elaboración de significados de una definición como la de espacio topológico, es importante distinguir y sistematizar el desarrollo de tal proceso; en este sentido, la utilización de los rótulos permite que dicha sistematización se lleve a cabo y por ende permite poner en evidencia nuestro propio proceso de pensar. Lo que contribuye a que durante el estudio de la definición se pueda elaborar significados de la misma, tomando como referencia el estado del proceso que se este produciendo. (VER EJEMPLO 2)

Ejemplo 2

AJA: *Entonces veo que la definición de la topología en cualquier conjunto X me permite hablar del concepto de proximidad entre los elementos del conjunto X por medio del entorno de un punto x de X ya que, al no tener métrica definida la única manera de hablar de proximidad entre los puntos de X, con la condición de que la uniones arbitrarias y las intersecciones finitas estén contenidas en la topología generada, es decir, la topología es la que me determina la proximidad entre los elementos de X*

2 Cabe resaltar que el estudiante antes de iniciar el estudio de la definición de espacio topológico ya conocía la metodología propuesta por Mason et al. (1982), lo que facilitó su utilización durante todo el proceso.

3 El ejemplo es tomado de manera textual de los datos recogidos durante la investigación.

2. ***El control y la autorregulación. Qué tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y qué tan bien se ajusta uno al proceso (ejecución de acciones) tomando en cuenta las observaciones que se hagan durante la evolución de éste:*** *La utilización de los rótulos constituye una herramienta para el control y la autorregulación del proceso de resolución o, en este caso, del proceso de elaboración de significados de la definición. Entonces, por medio de los rótulos es posible tener en cuenta las diferentes observaciones que se hacen durante la evolución del proceso y de esta manera avanzar en la comprensión de la definición. (VER EJEMPLO 3).*

   Ejemplo 3

   Reflexión: *En este momento he revisado tres textos diferentes en los que se define espacio topológico pero aún no le encuentro significado; sin embargo puedo generar espacios topológicos siguiendo las tres propiedades, pero sin entender para qué se forma o se genera un espacio topológico.*

3. ***Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas que se muestran en el trabajo matemático y la forma como éstas se relacionan o se identifican con la forma de resolver problemas:*** *Las creencias e intuiciones juegan un papel importante al momento de dotar de sentido a una definición como la de espacio topológico ya que por tratarse de una definición asociada al pensamiento matemático avanzado, la abstracción toma un papel fundamental y determina el significado que se elabore de ésta. Al sistematizar el proceso de estudio de la definición, es posible construir un camino que permita realizar la abstracción de los conceptos a los que hace referencia. (VER EJEMPLO 4)*

   Ejemplo 4. *Pregunta: ¿Qué pasa si los conjuntos de la topología son cerrados?*

A manera de conclusión

La utilización de una metodología como la propuesta por Mason et al. (1982) , permite realizar un ejercicio de metacognición del proceso de estudio y posterior elaboración de significados de una definición del carácter de la de espacio topológico; lo que contribuye a dotar de algún sentido a la definición y a los conceptos asociados a ella, de esta manera se pone en evidencia que realizar una descripción del proceso de elaboración de significados de una definición, asociada al pensamiento matemático avanzado, es conveniente para la construcción de dichos significados. Es decir, dicha metodología se convierte en una herramienta al momento de dotar de sentido a los objetos matemáticos inmersos en el pensamiento matemático avanzado. Por último, se observó que la metodología de Mason et. al. (1982) es lo suficientemente flexible como para permitir la aparición de nuevas etiquetas y para ser utilizada en el proceso de problematización del estudio de la definición de un concepto matemático enmarcado en el PMA.

Referencias

- **Gómez, J (2009).** El Proceso de Elaboración de Significados de la Definición de Espacio Topológico: Un estudio de caso. **Trabajo de grado. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.**
- **Lebem (1999).** *Documento de Acreditación Previa*. **Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.**

- Mason J, Burton L. & Stacey K. (1982). *Pensar matemáticamente.* España: Labor S.A.
- M.E.N (Ministerio de Educación Nacional) (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Colombia: M.E.N.
- Puig L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. España: Comares.
- Radford L. (2006). *Elementos de una teoría general de la objetivación*. RELIME (3) 2. 103-129.
- Santos Trigo L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos.* México: Trillas.
- Tall D. (1988). *The Nature of Advanced Mathematical Thinking.* Hungría: el papel de la discusión para PME.
- Tall D. (1992). *Constructions of objects through Definition and Proof.* Durham: PME Working Group on AMT.