SUMA 45

Febrero 2004, pp.53-58

Impacto del uso de Maple en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal

Maple es un potente programa de Cálculo Simbólico, cuyas aplicaciones al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática son innumerables. El presente trabajo pretende cuantificar los efectos de su uso en la enseñanza del Álgebra Lineal atendiendo a dos variables: el grado de acierto y el tiempo empleado en la resolución de los ejercicios. Los resultados que se obtienen aconsejan el uso del programa.

Maple is a powerful Symbolic Calculus programme with countless applications to the process of Maths learning and teaching. This paper is meant to quantify its effects on the teaching of Linear Algebra with regard to two variables: the degree of accuracy and the time devoted to problem solving. The results obtained make it a highly recommendable programme.

El estudio se realizó en la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II con 35 alumnos y alumnas de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Objetivos y contenidos

Los objetivos y contenidos que se plantearon fueron los mismos que cuando no se utilizan medios informáticos en el estudio de estas unidades didácticas.

Temporalización

El tiempo que se empleó en el estudio de la unidad didáctica de Matrices y Determinantes fue de 16 sesiones de cincuenta minutos cada una sin la utilización de Maple y de tres sesiones con Maple. La unidad didáctica de Sistemas de Ecuaciones Lineales dispuso de la misma distribución de tiempos.

El *coste* adicional de tiempos se vio compensado con una mejor comprensión de los conceptos, ya que no hubo que estar tan pendiente de los cálculos como cuando se ha usado exclusivamente el método tradicional. Sin embargo fue ineludible el adiestramiento de los alumnos en las técnicas de cálculo convencionales debido a las Pruebas de Acceso a la Universidad.

Me pareció evidente (como ya se hará patente más tarde) tras la finalización del estudio de las unidades didácticas correspondientes, que el día que se universalice el uso de los sistemas de cálculo simbólico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el Bachillerato, por una parte disminuirán los tiempos de aprendizaje y, por otra, los conceptos aprendidos serán más fiables y duraderos, pues se comunicarán desprovistos de la maraña que, no pocas veces, supone todo el lío de cuentas que los acompaña. Es parecido a cuando los árboles no dejan ver el bosque. No en vano, cuando los alumnos se pierden en peleas con las cuentas, muchas veces inútiles, se extravían de la visión global del tema y acaban cayendo demasiado a menudo en el hastío y el aburrimiento.

A la memoria de Almudena Jiménez y Abel Pimentel

José Ángel Méndez Contreras
IES Cuatro Caminos
Don Benito. Badajoz

Metodología

La metodología que se puso en práctica al usar Maple como recurso didáctico buscó en todo momento conseguir el aprendizaje autónomo del alumnado, pues este es un programa que les puede ser de gran utilidad en los estudios universitarios. Para ello, además del material correspondiente a las unidades didácticas de Álgebra Lineal, se le proporcionó a cada alumno un resumen de las sentencias necesarias (incluidas en Méndez 2002) para el desarrollo de toda la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, intentando provocar su uso a lo largo del curso con la menor intervención posible del profesor.

Evaluación

Para evaluar el impacto que tuvo la utilización de Maple en el proceso de enseñanza y aprendizaje del bloque de Álgebra Lineal correspondiente a Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales se prepararon unas hojas de ejercicios que los alumnos y las alumnas deberían realizar *a mano* y *a máquina*, comparándose después los resultados obtenidos, considerando dos aspectos: el tiempo utilizado y el grado de acierto.

Es conveniente indicar que primero se realizaban y se corregían los ejercicios de las hojas de trabajo con Maple, para después pedirles la resolución manual.

Además se provocó el debate entre los alumnos para comprobar su grado de satisfacción con el nuevo recurso utilizado. En este aspecto me fue grato comprobar el aumento de motivación que los alumnos aseguraban haber experimentado, así como la mejor comprensión de los conceptos abordados. Estas sensaciones se hicieron posteriormente efectivas al evaluar los resultados de las pruebas.

Hojas de trabajo

A continuación se exponen las hojas de trabajo que utilizamos para comprobar el impacto del uso de Maple como recurso didáctico. Seguidamente se detalla su resolución utilizando el programa (Méndez 2001) y el análisis y valoración de los resultados.

MATRICES Y DETERMINANTES:

Ejercicio 1

Calcula 3A + C - 2B y 3A - 2C + (3A + C - 2B), dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\6&7&8\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}8&7&6\\5&4&3\\3&2&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2&3&2\\0&2&1\\-5&6&-1\end{pmatrix}$$

Solución

> *with(linalg):*

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace

> *A:=matrix([[1,2,3],[3,4,5],[6,7,8]]);*

$$A:=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\6&7&8\end{bmatrix}$$

> *B:=matrix([[8,7,6],[5,4,3],[3,2,1]]);*

$$B:=\begin{bmatrix}8&7&6\\5&4&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

> *C:=matrix([[-2,3,2],[0,2,1],[-5,6,-1]]);*

$$C:=\begin{bmatrix}-2&3&2\\0&2&1\\-5&6&-1\end{bmatrix}$$

> *evalm(3*A+C-2*B);*

$$\begin{bmatrix}-15&-5&-1\\-1&6&10\\7&23&21\end{bmatrix}$$

> *evalm(3*A-2*C+(3*A+C-2*B));*

$$\begin{bmatrix}-8&-5&4\\8&14&23\\35&32&47\end{bmatrix}$$

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	7 min. 12 seg.	8 min. 34 seg.
Desviación típica	3 min.	3 min. 30 seg.
Nivel de acierto		
Media	9,15	7,85
Desviación típica	1,69	1,78

1. En la resolución a mano los alumnos tenían clara la forma de operar, los fallos se producían en las operaciones básicas.

2. Hubo un total de 22 alumnos y alumnas que resolvieron el ejercicio sin ningún error utilizando Maple, mientras que sin el programa la cifra ascendió a 12.

3. Los errores más comunes utilizando Maple fueron: la introducción equivocada de datos, el olvido de los paréntesis o de la orden *evalm* y no guardar el resultado.

4. La diferencia en los tiempos de resolución no es significativa, aunque no hay que olvidar que para ellos y ellas Maple es un *recién conocido*, mientras que el lápiz y el papel son ya *viejos amigos*.

Ejercicio 2
Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad N=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Calcula AB, B^tM^{-1}, M^3+M^2, $3M^4N$, det M, det N.

Solución
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> A:=matrix([[-2,0,1],[1,-1,5]]);

$$A:=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

> B:=matrix([[3,1],[0,1],[-1,2]]);

$$B:=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

> M:=matrix([[1,2,1],[2,-1,-2],[1,1,1]]);

$$M:=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

> N:=matrix([[-1,1,-2],[0,1,0],[-1,-1,-1]]);

$$N:=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

*> evalm(A&*B);*

$$\begin{bmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{bmatrix}$$

*> evalm(transpose(B)&*inverse(M));*

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4}\end{bmatrix}$$

> evalm(M^3+M^2);

$$\begin{bmatrix}12 & 10 & 0\\ 4 & -2 & -4\\ 12 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

*> evalm(3*M^4&*N);*

$$\begin{bmatrix}-48 & 123 & -126\\ 0 & -27 & 30\\ -48 & 102 & -108\end{bmatrix}$$

> det(M);

-4

> det(N);

-1

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	10 min. 15 seg.	18 min. 34 seg.
Desviación típica	3 min. 8 seg.	4 min. 32 seg.
Nivel de acierto		
Media	9	5,6
Desviación típica	1,48	1,67

1. Lo más llamativo es que 19 alumnos y alumnas resuelven el ejercicio perfectamente ayudándose del programa, mientras que sin él ninguno lo consigue.

2. Los errores en la resolución a mano provienen otra vez de las operaciones básicas.

3. Parece significativo el hecho de que dos alumnos tardasen en averiguar la solución con Maple menos de un minuto.

4. Al utilizar el programa sigue habiendo alumnos que se confunden en la introducción de los datos.

5. La diferencia de tiempos y resultados es ostensible en este ejercicio.

Ejercicio 3
Determina el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$$

atendiendo al valor de t.

Solución
> *with(linalg):*
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace

> *A:=matrix([[t,2,2],[2,t,0],[1,t,t]]);*

$$A := \begin{bmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{bmatrix}$$

> *det(A);*

$$t^3-2t$$

> *solve(t^3-2*t=0);*

$$0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

> *A:=matrix([[0,2,2],[2,0,0],[1,0,0]]);*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *rank(A);*

2

>*A:=matrix([[sqrt(2),2,2],[2,sqrt(2),0],[1,sqrt(2),sqrt(2)]]);*

$$A := \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> *rank(A);*

2

> *A:=matrix([[-sqrt(2),2,2],[2,-sqrt(2),0],[1,-sqrt(2),-sqrt(2)]]);*

$$A := \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> *rank(A);*

2

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	10 min. 30 seg.	10 min. 45 seg.
Desviación típica	3 min. 27 seg.	4 min. 23 seg.
Nivel de acierto		
Media	7,75	7,25
Desviación típica	2,49	2,67

1. Los resultados son prácticamente iguales en cuanto a tiempo y resultados.

2. Los errores que se realizan más habitualmente con Maple son los siguientes: calculan el rango de la matriz *A* con la orden *rank(A)* sin tener en cuenta la presencia del parámetro *t*, olvidan el estudio de alguno de los casos que resultan de resolver la ecuación *det(A) = 0* o introducen incorrectamente los datos.

3. Sin embargo los fallos en el resolución clásica son otros: equivocación en el cálculo del determinante de *A*, en la resolución de la ecuación *det(A) = 0* o en la determinación del rango de *A* para los casos 0, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Es decir, el análisis cuantitativo de resultados es similar, mientras que el cualitativo es bastante diferente.

Ejercicio 4
Dada la matriz cuadrada de orden 4,

$$A = \left\{ a_{ij} = \frac{1}{i+j} \right\}$$

calcula su inversa y comprueba después que el resultado es correcto.

Solución
> *with(linalg):*
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace

> *A:=matrix(4,4,(i,j)->1/(i+j));*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

> B:=inverse(A);

$$\begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix}$$

*> evalm(A&*B);*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	2 min. 30 seg.	25 min. 34 seg.
Desviación típica	1 min. 5 seg.	5 min. 46 seg.
Nivel de acierto		
Media	9,65	4,75
Desviación típica	1,15	2,67

1. Los resultados que aparecen en el cuadro hablan por sí mismos, tanto si tenemos en cuenta el tiempo utilizado como el índice de error.

2. El total de alumnos y alumnas que obtienen de forma perfecta la solución con Maple asciende a veintinueve. Ninguno consigue resolverlo a mano.

3. En la resolución a mano la gran mayoría de la clase tiene claro el significado del concepto de matriz inversa y el algoritmo a seguir para calcularla, sin embargo, todos y todas cometen, antes o después, fallos en las operaciones.

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1

Discute y resuelve, en caso de ser posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y - z - t &= 1 \\ 2x - y + 2z - t &= 2 \\ x + 2y + 3z + 2t &= -1 \\ x + 2y + 7z + 3t &= -3 \end{aligned}$$

Solución

> with(linalg):

> A:=matrix([[1,2,-1,-1,1],[2,-1,2,-1,2],[1,2,3,2,-1],[1,2,7,3,-3]]);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

> gaussjord(A);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	2 min. 58 seg.	23 min. 27 seg.
Desviación típica	1 min. 19 seg.	4 min. 14 seg.
Nivel de acierto		
Media	8,83	5,23
Desviación típica	2,48	2,13

1. Los resultados y sus causas son similares a los obtenidos en el ejercicio 4 del bloque de matrices. Nuevamente estamos ante un ejercicio de difícil solución manual y de solución extremadamente sencilla utilizando Maple.

2. Sin usar Maple, en esta ocasión ningún alumno llega a la solución correcta, aun teniendo claro el algoritmo a utilizar, mientras que ayudados del programa obtienen el resultado correcto 31 alumnos y alumnas.

3. Otra vez los errores provienen de la falta de atención a la hora de introducir los datos.

Ejercicio 2

Discute el siguiente sistema de ecuaciones que sigue teniendo en cuenta el valor de a. Resuélvelo para el caso a = 2:

$$ax + y + z = 4$$
$$a - ay + z = 1$$
$$x + y + z = a + 2$$

Solución

> *with(linalg):*

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace

> *A:=matrix([[a,1,1,4],[0,-a,1,1-a],[1,1,1,a+2]]);*

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -a & 1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord(A);*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{a-2}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2a^2-3}{a^2-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a^3+a^2-2a-1}{a^2-1} \end{bmatrix}$$

> *solve(a^2-1=0);*

1, -1

> *A:=matrix([[2,1,1,4],[0,-2,1,1-2],[1,1,1,2+2]]);*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord(A);*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	5 min. 20 seg.	8 min. 57 seg.
Desviación típica	2 min. 13 seg.	2 min. 48 seg.
Nivel de acierto		
Media	6,61	6,01
Desviación típica	2,33	3,12

1. La media en la resolución con Maple baja ostensiblemente debido a la repetición por parte de diez alumnos y alumnas del mismo fallo: en la segunda ecuación no pasan a la derecha del igual la *a*, con lo cual al ejecutar la orden *gaussjord* obtienen un resultado diferente al requerido.

2. Además siete alumnos se olvidan de resolver el sistema de ecuaciones para el caso *a* = 2. Esto no ocurre en la resolución a mano que se produce con posterioridad.

Conclusiones finales

1. Los alumnos y las alumnas volvieron a repasar los conceptos para realizar la prueba, motivados por el nuevo recurso, produciéndose como consecuencia mejores resultados en la resolución a mano de los ejercicios propuestos.

2. Es visible la efectividad de Maple a la luz de los resultados obtenidos en tiempos y grado de acierto, especialmente en los ejercicios que necesitan de mayor número de operaciones.

3. Hay problemas de Álgebra Lineal que aparecen en las Pruebas de Acceso a la Universidad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, donde lo *difícil* es determinar las matrices o los sistemas de ecuaciones que hay que utilizar para su resolución. Después, todo se reduce a simple cálculo, por lo que el uso de Maple nos permitiría resolver muchos más en el aula.

4. La universalización del uso de Sistemas de Cálculo Simbólico posibilitará la mejor comprensión de los conceptos, la reducción de los tiempos de aprendizaje y la inclusión de otros conceptos matemáticos que actualmente no se pueden abordar en Bachillerato debido al tiempo que se emplea en el cálculo.

5. Por último, sólo decir que si algún/a lector/a no esta convencido/a a priori de las bondades que Maple ofrece a la hora de estudiar Matemáticas, basta con que realice *a mano* y *a máquina* cualquiera de los ejercicios que se proponen y compare tiempos y resultados. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORREGO J., CRUCES J. y otros: *Iniciación a la Matemática Superior*

CRUCES J.: *Ejercicios y Problemas Resueltos de Matemáticas: Álgebra Lineal*

MÉNDEZ CONTRERAS J.A.(2002): *Utilización de Maple como apoyo a la Matemática en el Bachillerato*. FESPM.