SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 65-70

Proporcionalidad. Razones internas y razones externas

Se analiza la resolución de problemas de proporcionalidad en 399 alumnos del nivel primario y medio. Se plantean problemas que incluyen razones externas (aquellas cuyos términos corresponden a distintas magnitudes) y problemas que incluyen razones internas (aquellas cuyos términos pertenecen a la misma magnitud). Se examina si el nivel de dificultad en la resolución es el mismo en ambos tipos de problemas y si los alumnos privilegian el uso de estrategias específicas en cada caso.

The solving process to proporcionality problems is analysed in 399 primary and secondary students. Two kinds of problems are set out: some including external reasons (those whose terms correspond to different magnitudes) and some others including internal ones (those whose terms belong to the same magnitude). It is examined whether the level of difficulty in their solving is the same in the two kinds of problems and whether students privilege the use of specific strategies in each case.

Nuestro interés es analizar los factores que influyen en el trabajo de los alumnos en tareas de proporcionalidad. Este tema es de gran importancia en el currículo escolar porque está relacionado con la mayoría de los contenidos de Matemáticas y con los de otras asignaturas como Física, Biología, Química, etc.

La necesidad de considerar las cantidades en relación unas con otras, más allá de abordarlas de modo absoluto constituye un problema para muchos alumnos y se torna un obstáculo para la comprensión de contenidos que deben aprenderse y que guardan relación con la noción de proporcionalidad.

La comprensión de esta noción y en consecuencia el éxito en la resolución de problemas de proporcionalidad está ligada a factores internos, como es el desarrollo cognitivo del sujeto, y a factores externos como, los números que constituyen las razones y las magnitudes que se comparan.

Con respecto al desarrollo cognitivo encontramos en los trabajos de Piaget una caracterización del mismo. Abordó el tema principalmente en sus estudios referidos a la probabilidad, las leyes físicas y las relaciones espaciales.

La noción de proporción, según Piaget, se encuentra en el nivel de las operaciones formales, es decir, que las operaciones no se realizan directamente sobre los objetos sino que se trata de operaciones de operaciones, *"(...) las proporciones, por ser relación de relaciones, requieren psicológicamente de la intervención de lo formal (por más concretas que ellas sean, desde el punto de vista lógico, en su contenido)"* (Piaget e Inhelder, 1974, págs. 166-167).

> *La necesidad de considerar las cantidades en relación unas con otras, más allá de abordarlas de modo absoluto constituye un problema para muchos alumnos y se torna un obstáculo para la comprensión de contenidos que deben aprenderse y que guardan relación con la noción de proporcionalidad.*

María Virginia Rapetti
Ciafic- Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Conicet)
Buenos Aires, Argentina

La adquisición de la noción de proporcionalidad supone:

- El paso de una forma cualitativa (que permite la comprensión de la equivalencia de dos relaciones) a una cuantificación: "La construcción de las proporciones no es otra cosa que el paso de las correspondencias cualitativas entre dos encajes lógicos del mismo "tipo", a la igualdad entre dos encajes cualitativos del mismo orden (o valor métrico)" (Piaget, 1948, pág. 438).

- El descubrimiento de compensaciones. Éstas desde el punto de vista psicológico preceden a la construcción de las proporciones: "(...) la adquisición del esquema operatorio de las proporciones numéricas o métricas supone anticipaciones cualitativas bajo forma de compensaciones mediante equivalencia y proporciones lógicas" (Piaget; Inhelder, 1972, pág. 267).

- La intervención de la abstracción reflexiva a partir de la multiplicación: "(las proporciones) se obtienen por abstracción reflexiva a partir de la multiplicación en tanto que igualdad de relaciones multiplicativas (divisiones)" (Piaget; García ,1971, pág.69).

Con respecto a los factores externos, como las cantidades, podemos señalar el trabajo de Noelting (1980 a-b) cuyo objetivo es establecer si el desarrollo cognitivo es jerárquico y caracterizar, en ese caso, los distintos estadios en los que se divide. Para ello utilizó la mezcla de líquidos como única clase de contenido pero la presentó variando las relaciones cuantitativas entre las partes.

Fruedenthal (1978) en su fenomenología didáctica del concepto de razón, clasifica las razones en internas *y* externas*. Las primeras son razones entre términos pertenecientes a un sistema, por ejemplo, dos longitudes, dos pesos; corresponden a la misma magnitud. Las razones externas son razones entre términos de distintos sistemas, por ejemplo, espacio y tiempo.*

Estas se describieron en veinticinco ítems y se estableció un orden de dificultad entre ellos. Por ejemplo, se observó que comparar una mezcla formada con 1 vaso de naranja y 2 de agua, con otra formada con 2 de naranja y 4 de agua, es más fácil que comparar una mezcla formada con 2 de naranja y 3 de agua con otra que contenga 3 de agua y 4 de naranja.

En su análisis Noelting utiliza otro elemento importante que es la clasificación de las razones según las magnitudes que se comparan. Fruedenthal (1978) en su fenomenología didáctica del concepto de razón, clasifica las razones en internas y externas. Las primeras son razones entre términos pertenecientes a un sistema, por ejemplo, dos longitudes, dos pesos, en otras palabras corresponden a la misma magnitud. Las razones externas son razones entre términos de distintos sistemas, por ejemplo, espacio y tiempo.

En nuestro trabajo llamaremos ***"problemas E"*** a los que contienen razones externas y ***"problemas I"*** a los que contienen razones internas. Nos proponemos estudiar cómo resuelven los alumnos estas clases de problemas y nos planteamos las siguientes preguntas:

- ¿El nivel de dificultad al resolver problemas "E" es el mismo que para resolver problemas "I"?
- ¿Existen estrategias específicas para resolver ambas clases de problemas?

Método e instrumento

La muestra de nuestro estudio estuvo compuesta por 399 alumnos de ambos sexos, pertenecientes a dos escuelas de la ciudad de Buenos Aires. Participaron: 62 alumnos de 4º grado (9 años), 76 de 5º grado (10 años), 58 de 6º grado (11 años), 69 de 7º grado (12 años), 69 de 1º año (13 años) y 65 de 2º año (14 años). Se utilizó una prueba formada por seis ejercicios. Cada alumno recibió un cuadernillo de seis hojas, una por cada problema. En cada hoja figura el enunciado del problema con una ilustración correspondiente y un lugar donde los alumnos debían consignar la respuesta y su justificación.

El orden de presentación de los problemas era diferente para evitar que una secuencia única influyera en el resultado. Cada ejercicio se evalúo con 1 si estaba bien resuelto y en caso contrario se le asignó 0. La evaluación fue colectiva.

Ejercicio I:

Juan tiene 91 ovejas en su campo de 7 hectáreas. Pedro tiene un campo de 4 hectáreas y 52 ovejas. En los dos campos crece el mismo tipo de pasto y las ovejas son de la misma clase.

¿Las ovejas de Juan tienen la misma cantidad de pasto para comer que las de Pedro?

Ejercicio II:

El micro que viaja de Buenos Aires a Mar del Plata tarda 5 horas para recorrer los 400 km que separan

ambas ciudades. El micro que viaja de Buenos Aires a Córdoba tarda 11 horas para recorrer 700 km.
¿Qué micro viaja a más velocidad?

Ejercicio III:

En un supermercado 200 kg del café marca X cuestan 1600 $ y el café marca Z, de la misma calidad, está de oferta: se venden 350 kg por 2000 $.
¿Es conveniente la oferta?

Ejercicio IV:

En 7º grado turno mañana hay 20 alumnos y en 7º turno tarde hay 32. De los alumnos de la mañana 15 aprobaron la prueba de matemática y de los de la tarde aprobaron 25.
¿Qué grado es mejor en matemática?

Ejercicio V:

Hay 2 bolsas. La primera tiene 5 bolillas con números pares y 5 con números impares. La segunda bolsa tiene 3 bolillas con números pares y 3 con números impares.
¿Cuál debería elegirse para tener mayor oportunidad de extraer, sin mirar, un número par?

Ejercicio VI:

En una jarra A se colocan 2 vasos de jugo de naranja y 4 de agua. En la jarra B se colocan 3 vasos de jugo de naranja y 6 vasos de agua. Todos los vasos tienen el mismo tamaño.
¿Cuál de las dos jarras tendrá jugo con más gusto a naranja?

En los tres primeros se comparan magnitudes diferentes, por ejemplo, en el ejercicio I el número de ovejas y la superficie de pasto, en el II el espacio y la velocidad. En los tres últimos se trata de la misma magnitud.

En nuestro trabajo llamaremos “problemas E” *a los que contienen razones externas y* “problemas I” *a los que contienen razones internas. Nos proponemos estudiar cómo resuelven los alumnos estas clases de problemas.*

Las relaciones cuantitativas consideradas son las que corresponden al estadio operatorio concreto (2A y 2B) y al estadio operatorio formal inferior (3A) mencionados en el trabajo de Noelting (1980 a-b)

Resultados obtenidos

Realizaremos el análisis de los resultados en dos etapas: en la primera consideraremos el éxito en la resolución de los problemas y en la segunda el análisis de las estrategias utilizadas.
a) Exito en la resolución de los problemas:

Problema	Respuestas correctas	%
I (ovejas-superficie)	198	49,6
II (espacio-tiempo)	239	59,9
III (peso-precio)	219	54,9
IV (alumnos aprobados)	43	10,8
V (probabilidad)	103	25,8
VI (mezcla de líquidos)	121	30,3

Tabla 1: Distribución de frecuencias de respuestas correctas en cada problema

Puede observarse la diferencia entre los porcentajes que corresponden a los tres primeros problemas y los que corresponden a los tres últimos. En los problemas “E” los porcentajes de respuestas correctas se encuentran aproximadamente entre el 50% y 60%. Los problemas “I” resultan más difíciles que los primeros ya que no superan el 30.3 %.

Como nuestro interés es comparar el trabajo de los alumnos en cada uno de esos tipos de problemas, asignamos a cada sujeto una doble puntuación que representamos con un par de números (a;b). El primero indica el número de problemas “E” bien resueltos y el segundo el de los problemas “I”. Los posibles valores están comprendidos entre 0 y 3. Así por ejemplo el par (2; 3) significa que el sujeto resolvió bien dos problemas “E” y 3 problemas “I”.

En la siguiente tabla presentamos la distribución de las frecuencias de aciertos en las dos categorías de problemas:

		Problema “I”					
		0	**1**	**2**	**3**	**Total**	**%**
Problema “E”	**0**	93	9	1	0	***103***	25,8
	1	49	16	2	0	***67***	16,8
	2	50	32	15	2	***99***	24,8
	3	34	44	34	18	***130***	32,6
	Total	***226***	***101***	***52***	***20***	***399***	
	%	56,6	25,3	13,0	5,0		

Tabla 2: Frecuencias de respuestas correctas en los problemas “E” y en los problemas “I”.

Los porcentajes marginales para los problemas “I” muestran mayor variabilidad comparados con los porcentajes marginales de los problemas tipo “E”. Más de la mitad de los sujetos

(56,6%) no ha resuelto bien ningún problema del tipo "I" y sólo el 5 % ha resuelto todos.

Las frecuencias 0 en las casillas (0;3) y (1;3) muestran que ningún alumno que no haya resuelto bien los problemas "E" resolvió bien los de tipo "I".

Para comparar el trabajo de los alumnos en uno y otro tipo de problemas se analizaron los porcentajes obtenidos en cada categoría de respuesta por pares de problemas.

Tipos de respuestas.	Frec.	%
Categoría 1: (3;0)	34	8,5
Categoría 2: (3;1) (2;0)	93	23,3
Categoría 3: (3;2) (2;1) (1;0)	115	28,8
Categoría 4: (3;3) (2;2) (1;1) (0;0)	142	35,6
Categoría 5: (0;1) (1;2) (2;3)	13	3,3
Categoría 6: (0;2) (1;3)	1	0,3
Categoría 7: (0;3)	0	0,0

Tabla 3: Distribución de frecuencias de las categorías de respuestas por pares de problemas

Las tres primeras categorías corresponden a los alumnos que contestan mejor los problemas "E" que los de tipo "I". Estos representan el 60.6%. Los que pertenecen a la categoría 4 son los que realizan de un modo similar ambos tipos de problemas y son el 35.6 %. Finalmente los que se desenvuelven mejor en los problemas de tipo "I" representan sólo el 3.6%.

Los distintos métodos utilizados por los alumnos para resolver los problemas los hemos clasificado en ocho estrategias: Equivalencia de fracciones, División, Comparación intuitiva, Regla de tres, Desarrollo en serie, Porcentaje, Estimación de una relación y "Por cada".

Esto indica, a nuestro entender, que los primeros son más fáciles que los segundos. La resolución de los problemas "E" es independiente de la de los problemas "I", $\chi^2= 128.46$ $p<0,00$, gl.= 9.

Análisis de las estrategias utilizadas

En este punto consideraremos los distintos métodos utilizados por los alumnos para resolver los problemas. Para ellos los hemos clasificado en ocho estrategias que ejemplificamos a continuación:

Estrategia 1: "Equivalencia de fracciones"
Se transforman las fracciones en fracciones equivalentes y se las compara. Ejemplo: "Podrán comer lo mismo porque 91/7 = 52/4 , ya que ambas son iguales a 364/28". (Problema I)

Estrategia 2: "División"
El sujeto realiza una división entre cantidades de distintas magnitudes para comparar el valor que le corresponde a la unidad, en otras palabras compara las razones.
Ejemplo: "400 : 5 = 80; 700 : 11 = 63,6. Viaja más rápido a Mar del Plata porque a Córdoba va a 63 km/h". (Problema II)

Estrategia 3: "Comparación intuitiva"
Se establece una comparación entre las cantidades basada en una estimación aproximada, sin realizar un cálculo operatorio complejo.
Ejemplo: "Si es conveniente, porque es un poco más caro pero hay mucha más cantidad de café que en X " (Problema III)

Estrategia 4: "Regla de tres"
Se utilizan tres de los valores que intervienen para calcular el cuarto, mediante regla de tres, y luego se compara ese resultado con el cuarto valor que figura en el enunciado
Ejemplo: "Si quisiéramos comprar 350 kg es conveniente porque sino el café marca X saldría 2800$" (Problema III)

200 kg ......1600$
1 kg ....8 $
350 kg x

Estrategia 5: "Desarrollo en serie"
Consiste en desarrollar una secuencia de relaciones aditivas o multiplicativas que permite vincular la cantidad inicial de la primera razón con la que se desea alcanzar y extender dicha secuencia a la otra razón. Esta estrategia fue denominada "*building-up strategy* " por Hart (1981).
Ejemplo: "Si conviene, se ahorra 800$ que sería el valor de 100 kg de café marca X." (Problema III)

200 kg ......1600 $
100 kg ....800 $
50 kg ....400 $
150 kg ......1200 $
350 kg ......2000 $

Estrategia 6: "Porcentaje"
El sujeto calcula los porcentajes y luego los compara. Ejemplo: "Es mejor el grupo de la tarde porque pasó el 78,13% y en el turno de mañana pasó el 75%". (Problema IV)

Estrategia 7: "Estimación de una relación entre la parte y el todo o entre parte-parte"
El sujeto compara las cantidades con relaciones como "el doble", "el triple", etc.
Ejemplos: "Ambas tendrán el mismo gusto porque en las dos habrá 1/ 3 de naranja" (Problema VI)
"En el turno de mañana pasaron 15 - ¼ de la clase- mientras que en el de la tarde pasaron 25 y el cuarto de 32 es mayor que 7 -los que no pasaron-. De esta manera se puede ver que en proporción los de la tarde son mejores en matemáticas". (Problema IV)

Estrategia 8: "Por cada"
En cada razón se establece una relación parte-parte teniendo en cuenta una unidad para comparar. Ejemplo: "Tendrán igual sabor porque en la jarra A por 1 vaso de naranja hay 2 vasos de agua y en B también". (Problema VI)

Para evaluar la frecuencia del uso de estas estrategias se calculó el porcentaje de veces que éstas aparecen en las respuestas correctas de cada uno de los seis ejercicios. (Los totales de respuestas correctas se encuentran en la tabla 1)

Estrategia	I ovejas - superficie	II velocidad	III precio - peso	IV alumnos aprobados	V probabilidad	VI mezcla de líquidos
E1: Equivalencia de fracciones	2,5	1,7	1,8	20,9	1	10,9
E2: División	9,5	54,2	26,9	4,6	--	--
E3: Comparación Intuitiva	--	--	27,4	16,3	--	--
E4: Regla de tres	1,5	2,9	18,7	--	--	--
E5: Desarrollo en serie	1	1,4	13,2	--	--	--
E6: Porcentaje	--	--	0,9	25,6	10,7	4,2
E7: Estimación de una relación	--	26,1	11	32,6	27,2	70,6
E8: "por cada"	--	--	--	--	1	14,3
Otras	--	13,4	--	--	60,2	--

Tabla 4: Porcentaje de estrategias utilizadas en los distintos problemas

Los porcentajes muestran que el uso de las estrategias no es el mismo en todos los problemas. La *"equivalencia de fracciones"* es poco usada pero se recurre a ella en todas las clases de ejercicios.

La *"división"* se utiliza preferentemente en los problemas "E", es usada por el 95% de los sujetos en el ejemplo de las ovejas y por el 54,2% en el de la velocidad. El porcentaje del 95 % puede desdoblarse en dos: un 88% calculó el número de ovejas por hectárea y el 7% la porción de hectárea que le corresponde a cada oveja. Esto muestra una preferencia por dividir usando un dividendo mayor que el divisor.

La estrategia que denominamos *"desarrollo en serie"* y la de *"regla de tres"* son semejantes, podríamos interpretar la segunda como un caso particular y más breve de la primera. Ambas se usaron casi exclusivamente en el problema del café; para resolverlo el 13,2% de los alumnos utilizaron la primera y 18,7% la segunda.

En los problemas de probabilidad y de mezcla, se relacionan las partes entre si o la parte con el todo y se busca estimar una relación entre ellas. Así se dice que en ambas bolsas las probabilidades son iguales porque en las dos hay la misma cantidad de números pares e impares; esta afirmación se encontró en el 60,2% de las respuestas. En el ejemplo de las jarras, se explica que los vasos de agua son el doble de los de naranja o que los de naranja son la tercera parte del total (70,6%).

Se encontró que los problemas de tipo "E" resultan más fáciles que los de tipo "I" ya que, por una parte, los porcentajes de resolución son considerablemente mayores y, por otra, los alumnos que los resuelven bien no necesariamente resuelven bien los segundos.

Conclusión

Con el objetivo de analizar el trabajo de los alumnos en problemas de proporcionalidad hemos considerado dos tipos de factores, los internos (el desarrollo cognitivo) y los referidos al tipo de problema planteado. Con respecto al primero citamos la posición de J.Piaget y los trabajos de G.Noelting. Este estableció una secuencia de adquisición de la noción de proporción a propósito de la resolución de un problema único: la mezcla de líquidos y consideró las variaciones de las relaciones cuantitativas entre vasos con jugo de naranja y vasos con agua.

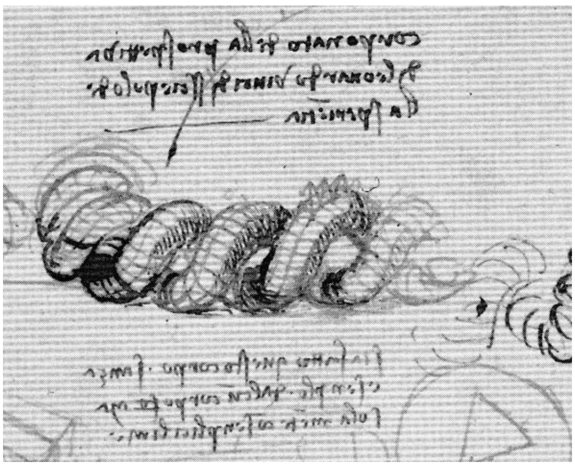
En nuestro trabajo por el contrario, hemos mantenido invariantes las relaciones cuantitativas y hemos variado las magnitudes en juego planteando distintos tipos de problemas: los que relacionan magnitudes diferentes (problemas "E") o los que se refieren a una magnitud única (problemas "I").

Se encontró que los primeros son más fáciles que los segundos ya que, por una parte, los porcentajes de resolución son considerablemente mayores y, por otra, los alumnos que los resuelven bien no necesariamente resuelven bien los segundos.
Con respecto al uso de estrategias se observó que, o bien se

trata de resolverlos en forma intuitiva buscando una relación entre las cantidades o bien, cuando esto no es posible, se recurre a técnicas como la división, la equivalencia de fracciones, el cálculo de porcentaje, la regla de tres, etc. Algunos de estos procedimientos son más empleados en algún ejercicio en particular, así la *"división"* para la comparación de magnitudes diferentes, el *"porcentaje"* para aquellos casos en que se compara la parte con el todo, etc. Estas observaciones muestran que el aprendizaje de la noción de proporción no es simple y requiere que el alumno se enfrente a una gama de situaciones diferentes en complejidad numérica y en el tipo de magnitudes relacionadas, para que alcance un conocimiento más acabado de esta noción. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

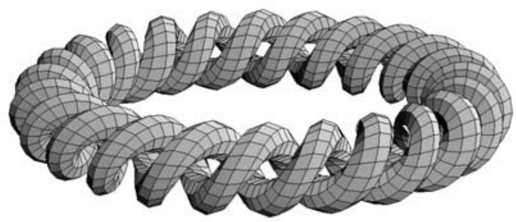
FREUDENTHAL, H. (1978): *Weeding and Sowing-Preface to a Science of Mathematical Education*, Dordrecht, D.Diedel.
HART, K. (1981): *Children's understanding of Mathematics: 11-16.* London, J.Murray Lid.
NOELTING, G. (1980,a): " The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1: Differentiation of stages", *Educational Studies in Mathematics, 11,* 2, 217-253.
NOELTING, G. (1980,b): " The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 2: Problem-structure et succesive stages; Problem solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring", *Educational Studies in Mathematics, 11,* 3, 331-363.
PIAGET, J. ; INHELDER, B. (1948): *La represéntation de l'espace chez l'enfant,* Paris, P.U.F
PIAGET, J.; INHELDER, B. (1972): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Buenos Aires, Paidós.
PIAGET, J.; GARCIA, R. (1971): *Les explications cuasales*, Paris, P.U.F
PIAGET, J.; INHELDER, B. (1974): *La gènese de l'idée de hasard chez l'enfant*, Paris, P.U.F, 2º ed.



"Corpo nato della prospettiva di Leonardo Vinci discepolo della sperientia".

"sia fatto questo corpo sanza esemplo d'alcun corpo ma solamente con semplici linee".

Leonardo da Vinci (1452-1519)
Codice atlántcio (1490 ca.), folio 191, recto.



"Cuerpo nacido de la perspectiva de Leonardo Vinci discípulo de la experiencia".

"se ha hecho este cuerpo sin ejemplo de algun cuerpo, solamente con simples líneas".

Leonardo da Vinci (1452-1519)
Codice atlántcio (1490 ca.), folio 191, recto.
(Rehecho con *Mathematica por FMC, 2003).*