

Los orígenes del método de mínimos cuadrados

Gabriel Ruiz Garzón

LOS ANTECEDENTES

En los actuales manuales de Estadística se suele plantear el método de mínimos cuadrados como una importante y singular técnica relacionada con el problema del ajuste, consistente en obtener la ecuación de una curva que, bajo determinado criterio, se «acerque» o «adapte» lo mejor posible a los puntos observados de una distribución bidimensional.

Sin embargo, en sus comienzos, el método de mínimos cuadrados era una técnica geodésica. Como explicaremos más adelante, era una técnica para resolver sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones superaba al de incógnitas.

Varios son los antecedentes alejados de la Estadística que generaron el método de mínimos cuadrados: el problema de la figura de la Tierra y, ligado a él, la medición del arco del meridiano terrestre, y a su vez relacionado con este último, el problema de la introducción del Sistema Métrico Decimal.

Los matemáticos debemos tratar estos temas al unísono y no como si fueran compartimentos estancos. La visión conjunta de todos estos problemas es mucho más enriquecedora para el alumno. Este artículo quiere colaborar a ese objetivo.

Los dos principales métodos para determinar la figura de la Tierra son los experimentos con el péndulo y las medidas del arco del meridiano terrestre.

Que la Tierra no era una esfera perfecta se sabía porque a un péndulo cerca del ecuador le afectaba menos la gravedad que al mismo péndulo en París. Newton demuestra en los *Principia* (1687), que la Tierra tiene que ser achatada por los polos y si definimos la *elipticidad* ρ como

$$\rho = \frac{E - P}{P}$$

El principal objetivo de este artículo es mostrar la génesis histórica del método de mínimos cuadrados relacionada con el problema de la medición del arco del meridiano terrestre y la introducción del Sistema Métrico Decimal.

ARTÍCULOS

donde E es el radio ecuatorial y P es el radio polar, encuentra que $1/p = 230$.

Doménico Cassini, director del Observatorio de París, piensa que el achatamiento se produce en el ecuador y no en los polos. Si el grado cerca del ecuador es más pequeño que cerca del Polo, entonces la forma de la Tierra es la predicha por Newton.

En 1735 la Academia Francesa envía una expedición a Perú, encabezada por Bouguer, y otra a Laponia, encabezada por Maupertuis, para medir la longitud del arco y compararla con la medida del arco en París.

Pierre Bouguer (1698-1758), fue profesor de Hidrografía en el Havre. En la expedición a Perú estuvo acompañado por Godin y La Condamine. Bouguer fue el primero en regresar a París y el primero en comunicar los resultados de la expedición a la Academia, lo que le granjeó las enemistades de sus compañeros de viaje.

Por cierto, Louis Godin (1704-1760) murió en Cádiz siendo director de la Academia de Guardias Marinas de la Armada.

Por otra parte, Maupertuis (1698-1759) fue discípulo de los Bernoulli en Basilea. En su viaje a Laponia estuvo acompañado por Alexis Claude Clairaut (1713-1765), matemático y físico de gran precocidad, que ingresó en la Academia de las Ciencias de París a la edad de dieciséis años. En su viaje a Laponia demostraron la idea de Newton sobre la forma de la Tierra.

Pero no fue el único intento. En Italia, el Papa Benedicto XIV comisionó al sacerdote jesuita serbio Giuseppe Ruggiero Boscovich (1711-1787), para llevar a cabo ciertas medidas del arco del meridiano. Boscovich propuso el método que Laplace bautizó como «método de situación», para diferenciarlo del «método de mínimos cuadrados», «éste último mucho más ventajoso que el primero», en palabras del sabio francés.

Mientras el método de mínimos cuadrados propuesto por Legendre minimiza la suma de los errores al cuadrado, el método propuesto por Boscovich minimiza la suma del valor absoluto de los errores.

Pero este problema de la medición del arco del meridiano está relacionado con la introducción del Sistema Métrico Decimal.

En 1790 la Convención Nacional decide introducir un nuevo sistema métrico que acabe con la disparidad de medidas que existían en todos los países. Unos planteaban como medida de longitud la de un péndulo que marca el segundo en los 45° de latitud, a través de la conocida fórmula física que liga la longitud del péndulo l con su período T .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

NOUVEAUX OUVRAGES
DE MONSIEUR
L'ABBÉ BOSCOVICH
APPARTENANTS PRINCIPALEMENT
A' L'OPTIQUE, ET A' L'ASTRONOMIE
EN CINQ VOLUMES
DÉDIÉS
A U R O I.
TOME TROISIÈME.



A BASSAN MDCCLXXXV.

& se vendent

A' VENISE, CHEZ REMONDINI.

Avec Approbation, & Privilège.

Figura 1

*Mientras
el método
de mínimos
cuadrados
propuesto
por Legendre
minimiza la suma
de los errores
al cuadrado,
el método
propuesto
por Boscovich
minimiza la suma
del valor absoluto
de los errores.*

Pero esta medida se desestimó entre otras razones porque dicha longitud depende de la latitud en la que nos encontremos. La definición que se adopta es tomar como unidad de longitud la diez millonésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre, el llamado metro (del griego *metron* = medida). Por tanto, se debía medir la longitud de una subsección de ese arco y se decide medir el que va desde Dunquerque a Montjuïc (Barcelona). Delambre medirá el tramo de Dunquerque a Rodez y Méchain de Rodez hasta Barcelona. Méchain morirá en 1804, cerca de Castellón de la Plana, revisando los cálculos ya realizados. Previamente, Méchain había participado junto a Cassini IV y a Legendre en el proyecto de triangulación entre los observatorios de Greenwich y París.

Con los cálculos de Delambre y Méchain hemos elaborado la tabla 1 que nos da la longitud S de los cuatro segmentos consecutivos del arco de meri-

diano que atraviesa París, medidos en módulos (1 módulo $\approx 12,78$ pies), los grados de latitud d y la latitud del punto medio L de cada segmento de arco (figura 2).

La medición del meridiano Dunquerque-París-Barcelona fue ampliada en 1817 hasta Formentera por Biot y Arago.

	Módulos S	Grados d	Punto medio L
De Dunquerque a Pantheon	62472,59	2,18910	49° 56' 30"
De Pantheon (París) a Evaux	76145,74	2,66868	47° 30' 46"
De Evaux a Carcassone	84424,55	2,96336	44° 41' 48"
De Carcassone a Barcelona	52749,48	1,85266	42° 17' 20"

Tabla 1

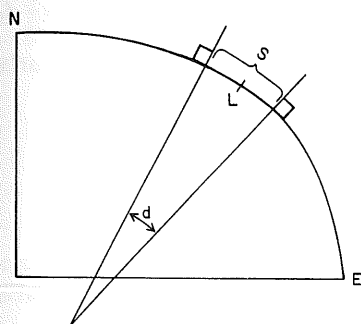


Figura 2

El desarrollo

Hemos visto que el papel de la Astronomía ha sido muy importante en el origen y desarrollo del método de mínimos cuadrados. Legendre publica el método en 1805 en un apéndice del libro sobre la órbita de los cometas: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*.

En 1801, el astrónomo italiano Joseph Piazzi, descubrió el asteroide al que le pusieron el nombre de Ceres. A causa de la situación desfavorable del asteroide respecto del Sol, sólo pudieron practicarse las observaciones durante cuarenta días.

Al haberlo perdido tan pronto, los astrónomos se enfrentaron al problema de

...el método de mínimos cuadrados no fue creado para la Estadística. Es un método geodésico, creado para ayudar a los astrónomos.

NOUVELLES MÉTHODES POUR LA DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES;

AVEC UN SUPPLÉMENT

Contenant divers perfectionnemens de ces méthodes et leur application aux deux Comètes de 1805.

PAR A. M. LEGENDRE,

Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut impérial de France et de la Société royale de Londres.



A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur - Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

ANNÉE 1806.

Figura 3

calcular sus posiciones a partir de pocas observaciones. Gauss desarrolló un sistema para el cálculo de órbitas, método que se utiliza hoy en día para seguir satélites artificiales, basado en el método de mínimos cuadrados. Gauss calculó la trayectoria de Ceres de tal manera que cuando el asteroide apareció por el otro lado del Sol, los astrónomos lo encontraron cuándo y dónde Gauss les había dicho.

En el método de mínimos cuadrados de Legendre no hay probabilidad. Sólo cuatro años más tarde, cuando Gauss publica sus resultados en *Theoria motus corporum coelestium*, se encuentran conceptos de Estadística como la distribución normal o también llamada «ley de los errores». Legendre y Gauss mantuvieron una agria disputa sobre la prioridad en el descubrimiento del método de mínimos cuadrados (ver García Azcárate, 2002).

Luego, el método de mínimos cuadrados no fue creado para la Estadística. Es un método geodésico, creado para ayudar a los astrónomos.

El método de mínimos cuadrados se formulaba de la siguiente manera: sean p funciones lineales $V_1, V_2, V_3, \dots$, que dependen de m incógnitas $x, y, z, \dots$; sean $W_1, W_2, W_3, \dots$, los valores observados de esas funciones y

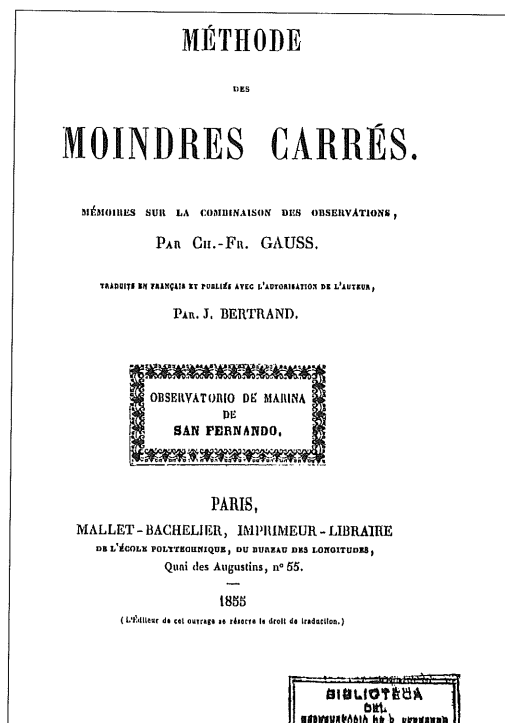


Figura 4

supongamos que esos valores están afectados de los errores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, es decir,

$$V_1 - W_1 = \varepsilon_1$$

$$V_2 - W_2 = \varepsilon_2$$

$$V_3 - W_3 = \varepsilon_3$$

...

La principal dificultad que tenía que salvar el método es que el número de ecuaciones (p) superaba al número de incógnitas (m).

Gauss supone que la ley de probabilidad de ocurrencia del error era

$$\frac{b}{\sqrt{\pi}} e^{-b^2 \varepsilon^2}$$

y por tanto la probabilidad de que ocurran los p errores a la vez es de

$$P = \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}} \right)^p e^{-b^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_p^2)}$$

De la ignorancia de dónde se producen esos errores Gauss piensa en sustituirlos donde la probabilidad anterior ofrezca su valor máximo, es decir, donde la suma de errores $\Phi = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_p^2$ sea mínima.

Para mayor claridad en la exposición, y sin perder generalidad, consideremos un sistema de $p = 3$ ecuaciones con $m = 2$ incógnitas solamente.

Pongamos pues

$$V_1 = a_1 x + b_1 y + c_1$$

$$V_2 = a_2 x + b_2 y + c_2$$

$$V_3 = a_3 x + b_3 y + c_3$$

donde

$$\varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y + (c_1 - W_1) = a_1 x + b_1 y + d_1$$

$$\varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y + (c_2 - W_2) = a_2 x + b_2 y + d_2 \quad [1]$$

$$\varepsilon_3 = a_3 x + b_3 y + (c_3 - W_3) = a_3 x + b_3 y + d_3$$

El sistema de ecuaciones anterior está formado por las llamadas *ecuaciones de condición*.

Como hemos expuesto anteriormente, debe ser mínima la suma de errores al cuadrado

$$\Phi = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = (a_1 x + b_1 y + d_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + d_2)^2 + (a_3 x + b_3 y + d_3)^2$$

y para que eso ocurra y determinar x e y , se tiene que satisfacer que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

O sea,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (a_1 x + b_1 y + d_1) a_1 + (a_2 x + b_2 y + d_2) a_2 + (a_3 x + b_3 y + d_3) a_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (a_1 x + b_1 y + d_1) b_1 + (a_2 x + b_2 y + d_2) b_2 + (a_3 x + b_3 y + d_3) b_3 = 0$$

que de una manera más simplificada quedaría

$$\begin{aligned} \left(\sum a_i^2 \right) x + \left(\sum a_i b_i \right) y + \sum a_i d_i &= 0 \\ \left(\sum a_i b_i \right) x + \left(\sum b_i^2 \right) y + \sum b_i d_i &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

que conforma el *sistema de ecuaciones normales*, un sistema ya con igual número de ecuaciones que de incógnitas y donde los errores han desaparecido.

Además como se tiene que

$$\begin{aligned} \sum a_i b_i &= \frac{1}{2} \left[\sum (a_i + b_i)^2 - \sum a_i^2 - \sum b_i^2 \right] \\ \sum a_i d_i &= \frac{1}{2} \left[\sum (a_i + d_i)^2 - \sum a_i^2 - \sum d_i^2 \right] \\ \sum b_i d_i &= \frac{1}{2} \left[\sum (b_i + d_i)^2 - \sum b_i^2 - \sum d_i^2 \right] \end{aligned}$$

todos los coeficientes del sistema de ecuaciones normales o son sumas de cua-

TABLE I.
CARTE DES NOMBRES, DEPUIS LE NOMBRE 0,000
JUSQU'AU NOMBRE 10,000, RÉDUIES À QUATRE CHIFFRES DÉCIMIAUX.

— XXVIII —

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
1	0,0010	0,0011	0,0012	0,0013	0,0014	0,0015	0,0016	0,0017	0,0018	0,0019
2	0,0020	0,0021	0,0022	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029
3	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039
4	0,0040	0,0041	0,0042	0,0043	0,0044	0,0045	0,0046	0,0047	0,0048	0,0049
5	0,0050	0,0051	0,0052	0,0053	0,0054	0,0055	0,0056	0,0057	0,0058	0,0059
6	0,0060	0,0061	0,0062	0,0063	0,0064	0,0065	0,0066	0,0067	0,0068	0,0069
7	0,0070	0,0071	0,0072	0,0073	0,0074	0,0075	0,0076	0,0077	0,0078	0,0079
8	0,0080	0,0081	0,0082	0,0083	0,0084	0,0085	0,0086	0,0087	0,0088	0,0089
9	0,0090	0,0091	0,0092	0,0093	0,0094	0,0095	0,0096	0,0097	0,0098	0,0099
10	0,0100	0,0101	0,0102	0,0103	0,0104	0,0105	0,0106	0,0107	0,0108	0,0109
11	0,0110	0,0111	0,0112	0,0113	0,0114	0,0115	0,0116	0,0117	0,0118	0,0119
12	0,0120	0,0121	0,0122	0,0123	0,0124	0,0125	0,0126	0,0127	0,0128	0,0129
13	0,0130	0,0131	0,0132	0,0133	0,0134	0,0135	0,0136	0,0137	0,0138	0,0139
14	0,0140	0,0141	0,0142	0,0143	0,0144	0,0145	0,0146	0,0147	0,0148	0,0149
15	0,0150	0,0151	0,0152	0,0153	0,0154	0,0155	0,0156	0,0157	0,0158	0,0159
16	0,0160	0,0161	0,0162	0,0163	0,0164	0,0165	0,0166	0,0167	0,0168	0,0169
17	0,0170	0,0171	0,0172	0,0173	0,0174	0,0175	0,0176	0,0177	0,0178	0,0179
18	0,0180	0,0181	0,0182	0,0183	0,0184	0,0185	0,0186	0,0187	0,0188	0,0189
19	0,0190	0,0191	0,0192	0,0193	0,0194	0,0195	0,0196	0,0197	0,0198	0,0199
20	0,0200	0,0201	0,0202	0,0203	0,0204	0,0205	0,0206	0,0207	0,0208	0,0209
21	0,0210	0,0211	0,0212	0,0213	0,0214	0,0215	0,0216	0,0217	0,0218	0,0219
22	0,0220	0,0221	0,0222	0,0223	0,0224	0,0225	0,0226	0,0227	0,0228	0,0229
23	0,0230	0,0231	0,0232	0,0233	0,0234	0,0235	0,0236	0,0237	0,0238	0,0239
24	0,0240	0,0241	0,0242	0,0243	0,0244	0,0245	0,0246	0,0247	0,0248	0,0249
25	0,0250	0,0251	0,0252	0,0253	0,0254	0,0255	0,0256	0,0257	0,0258	0,0259
26	0,0260	0,0261	0,0262	0,0263	0,0264	0,0265	0,0266	0,0267	0,0268	0,0269
27	0,0270	0,0271	0,0272	0,0273	0,0274	0,0275	0,0276	0,0277	0,0278	0,0279
28	0,0280	0,0281	0,0282	0,0283	0,0284	0,0285	0,0286	0,0287	0,0288	0,0289
29	0,0290	0,0291	0,0292	0,0293	0,0294	0,0295	0,0296	0,0297	0,0298	0,0299
30	0,0300	0,0301	0,0302	0,0303	0,0304	0,0305	0,0306	0,0307	0,0308	0,0309
31	0,0310	0,0311	0,0312	0,0313	0,0314	0,0315	0,0316	0,0317	0,0318	0,0319
32	0,0320	0,0321	0,0322	0,0323	0,0324	0,0325	0,0326	0,0327	0,0328	0,0329
33	0,0330	0,0331	0,0332	0,0333	0,0334	0,0335	0,0336	0,0337	0,0338	0,0339
34	0,0340	0,0341	0,0342	0,0343	0,0344	0,0345	0,0346	0,0347	0,0348	0,0349
35	0,0350	0,0351	0,0352	0,0353	0,0354	0,0355	0,0356	0,0357	0,0358	0,0359
36	0,0360	0,0361	0,0362	0,0363	0,0364	0,0365	0,0366	0,0367	0,0368	0,0369
37	0,0370	0,0371	0,0372	0,0373	0,0374	0,0375	0,0376	0,0377	0,0378	0,0379
38	0,0380	0,0381	0,0382	0,0383	0,0384	0,0385	0,0386	0,0387	0,0388	0,0389
39	0,0390	0,0391	0,0392	0,0393	0,0394	0,0395	0,0396	0,0397	0,0398	0,0399
40	0,0400	0,0401	0,0402	0,0403	0,0404	0,0405	0,0406	0,0407	0,0408	0,0409
41	0,0410	0,0411	0,0412	0,0413	0,0414	0,0415	0,0416	0,0417	0,0418	0,0419
42	0,0420	0,0421	0,0422	0,0423	0,0424	0,0425	0,0426	0,0427	0,0428	0,0429
43	0,0430	0,0431	0,0432	0,0433	0,0434	0,0435	0,0436	0,0437	0,0438	0,0439
44	0,0440	0,0441	0,0442	0,0443	0,0444	0,0445	0,0446	0,0447	0,0448	0,0449
45	0,0450	0,0451	0,0452	0,0453	0,0454	0,0455	0,0456	0,0457	0,0458	0,0459
46	0,0460	0,0461	0,0462	0,0463	0,0464	0,0465	0,0466	0,0467	0,0468	0,0469
47	0,0470	0,0471	0,0472	0,0473	0,0474	0,0475	0,0476	0,0477	0,0478	0,0479
48	0,0480	0,0481	0,0482	0,0483	0,0484	0,0485	0,0486	0,0487	0,0488	0,0489
49	0,0490	0,0491	0,0492	0,0493	0,0494	0,0495	0,0496	0,0497	0,0498	0,0499
50	0,0500	0,0501	0,0502	0,0503	0,0504	0,0505	0,0506	0,0507	0,0508	0,0509
51	0,0510	0,0511	0,0512	0,0513	0,0514	0,0515	0,0516	0,0517	0,0518	0,0519
52	0,0520	0,0521	0,0522	0,0523	0,0524	0,0525	0,0526	0,0527	0,0528	0,0529
53	0,0530	0,0531	0,0532	0,0533	0,0534	0,0535	0,0536	0,0537	0,0538	0,0539
54	0,0540	0,0541	0,0542	0,0543	0,0544	0,0545	0,0546	0,0547	0,0548	0,0549
55	0,0550	0,0551	0,0552	0,0553	0,0554	0,0555	0,0556	0,0557	0,0558	0,0559
56	0,0560	0,0561	0,0562	0,0563	0,0564	0,0565	0,0566	0,0567	0,0568	0,0569
57	0,0570	0,0571	0,0572	0,0573	0,0574	0,0575	0,0576	0,0577	0,0578	0,0579
58	0,0580	0,0581	0,0582	0,0583	0,0584	0,0585	0,0586	0,0587	0,0588	0,0589
59	0,0590	0,0591	0,0592	0,0593	0,0594	0,0595	0,0596	0,0597	0,0598	0,0599
60	0,0600	0,0601	0,0602	0,0603	0,0604	0,0605	0,0606	0,0607	0,0608	0,0609
61	0,0610	0,0611	0,0612	0,0613	0,0614	0,0615	0,0616	0,0617	0,0618	0,0619
62	0,0620	0,0621	0,0622	0,0623	0,0624	0,0625	0,0626	0,0627	0,0628	0,0629
63	0,0630	0,0631	0,0632	0,0633	0,0634	0,0635	0,0636	0,0637	0,0638	0,0639
64	0,0640	0,0641	0,0642	0,0643	0,0644	0,0645	0,0646	0,0647	0,0648	0,0649
65	0,0650	0,0651	0,0652	0,0653	0,0654	0,0655	0,0656	0,0657	0,0658	0,0659
66	0,0660	0,0661	0,0662	0,0663	0,0664	0,0665	0,0666	0,0667	0,0668	0,0669
67	0,0670	0,0671	0,0672	0,0673	0,0674	0,0675	0,0676	0,0677	0,0678	0,0679
68	0,0680	0,0681	0,0682	0,0683	0,0684	0,0685	0,0686	0,0687	0,0688	0,0689
69	0,0690	0,0691	0,0692	0,0693	0,0694	0,0695	0,0696	0,0697	0,0698	0,0699
70	0,0700	0,0701	0,0702	0,0703	0,0704	0,0705	0,0706	0,0707	0,0708	0,0709
71	0,0710	0,0711	0,0712	0,0713	0,0714	0,0715	0,0716	0,0717	0,0718	0,0719
72	0,0720	0,0721	0,0722	0,0723	0,0724	0,0725	0,0726	0,0727	0,0728	0,0729
73	0,0730	0,0731	0,0732	0,0733	0,0734	0,0735	0,0736	0,0737	0,0738	0,0739
74	0,0740	0,0741	0,0742	0,0743	0,0744	0,0745	0,0746	0,0747	0,0748	0,0749
75	0,0750	0,0751	0,0752	0,0753	0,0754	0,0755	0,0756	0,0757	0,0758	0,0759
76	0,0760	0,0761	0,0762	0,0763	0,0764	0,0765	0,0766	0,0767	0,0768	0,0769
77	0,0770	0,0771	0,0772	0,0773	0,0774	0,0775	0,0776	0,0777	0,0778	0,0779
78	0,0780	0,0781	0,0782	0,0783	0,0784	0,0785	0,0786	0,0787	0,0788	0,0789
79	0,0790	0,0791	0,0792	0,0793	0,0794	0,0795	0,0796	0,0797	0,0798	0,0799
80	0,0800	0,0801	0,0802	0,0803	0,0804	0,0805	0,0806	0,0807	0,0808	0,0809
81	0,0810	0,0811	0,0812	0,0813	0,0814	0,0815	0,0816	0,0817	0,0818	0,0819
82	0,0820	0,0821	0,0822	0,0823	0,0824	0,0825	0,0826	0,0827	0,0828	0,0829
83	0,0830	0,0831	0,0832	0,0833	0,0834	0,0835	0,0836	0,0837	0,0838	0,0839
84	0,0840	0,0841	0,0842	0,0843	0,0844	0,0845	0,0846	0,0847	0,0848	0,0849
85	0,0850	0,0851	0,0852	0,0853	0,0854	0,0855	0,0856	0,0857	0,0858	0,0859
86	0,0860	0,0861	0,0862	0,0863	0,0864	0,0865	0,0866	0,0867	0,0868	0,0869
87	0,0870	0,0871	0,0872	0,0873	0,0874	0,0875	0,0876	0,0877	0,0878	0,0879
88	0,0880	0,0881	0,0882	0,0883	0,0884	0,0885	0,0886	0,0887	0,0888	0,0889
89	0,0890	0,0891	0,0892	0,0893	0,0894	0,0895	0,0896	0,0897	0,0898	0,0899
90	0,0900	0,0901	0,0902	0,0903	0,0904	0,0905	0,0906	0,0907	0,0908	0,0909
91	0,0910	0,0911	0,0912	0,0913	0,0914	0,0915	0,0916	0,0917	0,0918	0,0919
92	0,0920	0,0921	0,0922	0,0923	0,0924	0,0925	0,0926	0,0927	0,0928	0,0929
93	0,0930	0,0931	0,0932	0,0933	0,0934	0,0935	0,0936	0,0937	0,0938	0,0939
94	0,0940	0,0941	0,0942	0,0943	0,0944	0,0945	0,0946	0,0947	0,0948	0,0949
95	0,0950	0,0951	0,0952	0,0953	0,0954	0,0955	0,0956	0,0957	0,0958	0,0959
96	0,0960	0,0961	0,0962	0,0963	0,0964	0,0965	0,0966	0,0967	0,0968	0,0969
97	0,0970	0,0971	0,0972	0,0973	0,0974	0,0975	0,0976	0,0977	0,0978	0,0979
98	0,0980	0,0981	0,0982	0,0983	0,0984	0,0985	0,0986	0,0987	0,0988	0,0989
99	0,0990	0,0991	0,0992	0,0993	0,0994	0,0995	0,0996	0,0997	0,0998	0,0999

$$\frac{1}{\rho} = 148$$

cuadrante del meridiano = 2564800 módulos

Y por tanto, el metro debe valer 0,2564800 módulos $\approx$ 3,28 pies. Por cierto, que el actual metro está basado en los resultados encontrados por Laplace incorporando la medida del arco en Perú y a través de un algoritmo que minimiza el error máximo, encontrando un valor para el cuadrante del meridiano de 2565370 módulos y por tanto un valor del metro igual a 0,256537 módulos, algo mayor que el valor hallado por Legendre.

Y también es verdad que Gauss descubre más o menos independientemente de Legendre el método mínimos cuadrados y, al igual que éste último, utiliza los datos del mismo meridiano para sus cálculos y halla en este caso que

$$\frac{1}{\rho} = 187$$

cuadrante del meridiano = 2565006 módulos

Del manual de Faà de Bruno (1869) son los siguientes ejemplos que ilustran el método de mínimos cuadrados.

Ejemplo 2

Se sabe que el estudio de las oscilaciones del péndulo en diversas latitudes lleva a los físicos a concluir que la longitud del péndulo que marca el segundo depende de la latitud del lugar, según la siguiente Ley de Clairaut

$$\lambda = x + y \sin^2 \psi \quad [4]$$

donde las constantes x e y son las longitudes que necesitamos encontrar.

Diversos observadores célebres efectuaron sendos experimentos y sus datos se resumen en la tabla 2.

Lugar de la observación	Latitud del lugar ψ	Longitud del péndulo λ	Nombre del observador
Quito	0° 0'	0,990564 m	Bouguer
Petit-Goave	18° 27'	0,991150 m	Bouguer
París	48° 24'	0,993867 m	Biot et Mathieu
San Petersburgo	58° 15'	0,994589 m	Mallet
Laponia	67° 4'	0,995325 m	Clairaut et Maupertuis

Tabla 2

Los resultados de estas observaciones, sustituidas en la ecuación anterior [4], dan las siguientes cinco ecuaciones de condición:

*...el actual
metro
está basado
en los resultados
encontrados
por Laplace
incorporando
la medida
del arco en Perú
y a través de
un algoritmo
que minimiza
el error
máximo...*

$$x + y(0,00000) - 0,990564 = 0$$

$$x + y(0,10016) - 0,991150 = 0$$

$$x + y(0,56672) - 0,993867 = 0$$

$$x + y(0,72307) - 0,994589 = 0$$

$$x + y(0,84829) - 0,995325 = 0$$

Si aplicamos el método de mínimo cuadrados, esas cinco ecuaciones se pueden sustituir por las siguientes dos ecuaciones del sistema de ecuaciones normales [2]:

$$x + y(0,44765) - 0,993099 = 0$$

$$x + y(0,70306) - 0,994548 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x = 0,990555 \text{ m}$$

$$y = 0,0056786 \text{ m}$$

y por lo tanto

$$\lambda = 0,990555 + 0,0056786 \sin^2 \psi$$

También en aquella época eran comunes los estudios de presión atmosférica. Por ejemplo, Blas Pascal, los hizo en la ahora renombrada mítica cumbre ciclista del Puy-de-Dôme, pero el protagonista del siguiente ejemplo es el canónigo de Alejandría Parnisetti.

Ejemplo 3

Las variaciones diurnas de la presión atmosférica dependen de la temperatura del lugar. Con los datos aportados por Parnisetti, de la media de los valores barométricos y termométricos medios durante los años 1861-1865, donde el primer miembro de la igualdad expresa las variaciones barométricas desde las 9 de la mañana hasta las 3 de la tarde, expresadas en centésimas de milímetro, y los segundos miembros representan las temperaturas medias en grados centesimales, damos las ecuaciones de condición que aparecen en la tabla 3

Aplicando el método de mínimos cuadrados, se encuentra que la presión barométrica p depende de la temperatura t , en Alejandría, de la siguiente manera

$$p = 81 + 2,2t$$

Enero	$73 = x + y(-0,37)$
Febrero	$93 = x + y(2,93)$
Marzo	$98 = x + y(9,97)$
Abril	$126 = x + y(14,58)$
Mayo	$113 = x + y(12,54)$
Junio	$115 = x + y(22,54)$
Julio	$140 = x + y(25,12)$
Agosto	$136 = x + y(24,50)$
Septiembre	$131 = x + y(20,30)$
Octubre	$109 = x + y(14,00)$
Noviembre	$90 = x + y(7,00)$
Diciembre	$100 = x + y(2,15)$

Tabla 3

lo que prueba una cierta influencia directa de la temperatura en la presión.

Ejemplo 4

El método de mínimos cuadrados nos va a servir para determinar la diferencia de longitud entre dos lugares. A este efecto, se emplearán unos cronómetros que se transportan de un lugar al otro intercambiándose. Es evidente que un cálculo exacto de la diferencia de hora de los cronómetros indicará la diferencia de longitud buscada entre los dos lugares.

Seguidamente con los resultados de las observaciones y sin entrar en muchos detalles, daremos las siguientes ecuaciones de condición para obtener la distancia en longitud de los observatorios de Pulkowa y Dorpat, a saber:

$$\begin{aligned} 0,508x - y - 0,096z &= +0,096 \\ 0,544x + y - 0,312z &= -0,386 \\ 0,540x - y + 0,294z &= -0,049 \\ 0,522x + y - 0,193z &= -0,386 \\ 0,521x - y - 0,195z &= -0,078 \\ 0,510x + y + 0,114z &= +0,179 \\ 0,571x - y + 0,032z &= -0,343 \\ 0,579x + y - 0,079z &= -0,006 \\ 0,511x - y - 0,356z &= -0,348 \\ 0,535x + y + 0,345z &= +0,508 \end{aligned}$$

de dónde aplicando el método de mínimos cuadrados, se deducirán fácilmente las siguientes ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} +2,860x + 0,038y - 0,229z &= -0,444 \\ +0,038x + 10,000y + 0,196z &= +0,630 \\ -0,229x + 0,196y + 0,534z &= +0,496 \end{aligned}$$

*El tratamiento
que recibe
el método
de mínimos
cuadrados
en nuestros
manuales
de Estadística
actuales
está alejado
de los importantes
problemas
que lo gestaron,
como el cálculo
exacto de la figura
de la Tierra
o la introducción
del metro patrón,
que ocuparon
y preocuparon
a matemáticos
durante
siglos.*

Gabriel Ruiz

Escuela Universitaria
de Estudios Empresariales
Universidad de Cádiz.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

para las cuales las soluciones son:

$$\begin{aligned} x &= -0,036 \\ y &= 0,046 \\ z &= 0,874 \end{aligned}$$

Luego, como hemos podido observar, la presentación del método de mínimos cuadrados difería sustancialmente de la actual. No sólo en los temas a los que se aplica, geodésicos y físicos, sino en la forma de tratarlo: Consistía en «un método para resolver un sistema de ecuaciones donde el número de ecuaciones supera al número de incógnitas y donde las ecuaciones provienen de observaciones afectadas por errores desconocidos».

Las conclusiones

Llegada la hora de hacer balance, se puede decir que con este artículo hemos pretendido:

- Acercar la Historia de las Matemáticas a nuestras aulas. El tratamiento que recibe el método de mínimos cuadrados en nuestros manuales de Estadística actuales está alejado de los importantes problemas que lo gestaron, como el cálculo exacto de la figura de la Tierra o la introducción del metro patrón, que ocuparon y preocuparon a matemáticos durante siglos.
- Posibilitar que estos temas, el método de mínimos cuadrados y la introducción del Sistema Métrico Decimal, puedan ser tratados al unísono y no como compartimentos estancos alejados uno del otro.

Una vez más la interdisciplinariedad ha ganado la batalla.

Bibliografía

- BOSCOVICH, R.J. (1785): *Opera pertinentia ad opticum et astronomiam maxima ex parte nova, et omnia huiusque inedita in quinque tomos distributa*, Chez Remondini, Venecia.
- FAÁ DE BRUNO, F. (1869): *Traité Élémentaire du Calcul des Erreurs, avec des tables stéréotypées*, Gauthier-Villars, París.
- GARCÍA AZCÁRATE, A. (2002): *Legendre: La honestidad de un científico*, Col. La Matemática en sus personajes, n.º 11, Nívola, Madrid.
- GAUSS, C.F. (1855): *Méthode des Moindres Carrés. Memoire sur la combinaison des observations*, Mallet-Bachelier, París.
- LEGENDRE, A.M. (1806): *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes*, Chez Courcier, París.
- STIGLER, S.M. (1986): *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*, The Belknap Press of Harvard University Press, Massachusetts.