

Los puentes del Pisuega en la ciudad de Valladolid

Elena Ortega
Tomás Ortega

LA CONSTRUCCIÓN de puentes sobre los ríos es tan antigua como la propia arquitectura, y, sin duda, el hombre aprendió a construirlos de forma natural al encontrar ramas y árboles, que, arrancados por el viento, unían las dos orillas de pequeños cauces fluviales.

Los primeros puentes que se construyeron fueron de madera, pero el descubrimiento de la bóveda permitió construir puentes de piedra, que eran mucho más resistentes a las cargas que soportaban y más seguros frente a la fuerza del agua, sobre todo en las riadas. Los chinos construyeron puentes de piedra desde los tiempos más remotos, y los romanos desarrollaron su empleo de forma sistemática, construyendo viaductos o acueductos utilizando bóvedas de medio punto. En la Edad Media se siguieron construyendo este tipo de puentes con el mismo material y el mismo tipo de embovedados o con arcos de tipo mitral, materiales y técnicas constructivas que se siguieron empleando hasta la mitad del siglo XIX. A comienzos de este siglo se integra el hierro en su construcción y con ello proliferan estructuras muy variadas que se agrupan en tres tipos: puentes de vigas, puentes de arcos y puentes colgantes, clasificación que se establece por los empujes horizontales de las cargas.

Después de hacer un breve estudio sobre la evolución de ciertas características constructivas de los puentes, se hace un pequeño estudio desde la didáctica de la matemática de todos los puentes del Pisuega a su paso por la ciudad de Valladolid, estudio que puede constituir una guía de taller de Matemáticas, para que sea desarrollado en otras ciudades con alumnos de segundo curso de bachillerato.

- *Puentes de vigas:* en estos puentes, prácticamente, no se ejerce ningún empuje horizontal sobre sus apoyos.
- *Puentes de arco:* en estos puentes las cargas ejercen empujes horizontales sobre sus estribos.
- *Puentes colgantes:* en estos puentes las cargas ejercen empujes horizontales sobre sus anclajes.

Las estructuras de vigas en muchos casos, por utilizar engarces de tornillería, se componen de formas triangulares (de éstos los más famosos son los de Eiffel, como por ejemplo, el viaducto de Garabit, en Francia, y el puente sobre el Duero de Oporto, en Portugal).

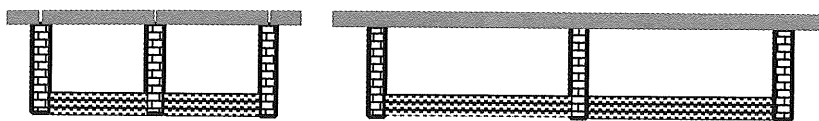


Figura 1. Puentes de vigas

La aparición del hormigón, a mediados del siglo XIX, desarrolló la construcción de estos puentes. Al principio, en los puentes de vigas, éstas se disponían de forma independiente, dispuestas una al lado de otras con una pequeña separación entre ellas, técnica que se sigue utilizando de luces unitarias moderadas, ya que si el río es muy ancho obliga a construir muchos pilares en su lecho. Esta técnica evolucionó y se comenzaron a construir utilizando vigas continuas mediante voladizos, lo que permiten obtener luces de un centenar de metros. También las vigas han evolucionado y en la actualidad se utilizan vigas de perfil de cajón, que están vaciadas en su interior.

Con los puentes de arco se consiguieron luces de mayor amplitud y con los puentes colgantes esta posibilidad aumentó considerablemente, y con la incorporación del acero se alcanzaron luces de hasta 500 m en los puentes de arco, como por ejemplo el puente de arco de Sidney, y de más de 1 km en los puentes colgantes, como por ejemplo el puente Golden Gate de San Francisco, cuyo tramo central tiene 1280 m de luz.

El hormigón pretensado data de mediados del siglo XX, y la integración del acero con este hormigón ha permitido mejorar la construcción de los puentes de arco y de los puentes colgantes, a la vez que se han desarrollado otros dos tipos de puentes: puentes de puntales oblicuos y puentes de tirantes. Los primeros apuntalan las vigas en la dirección más apropiada para soportar la carga y en los segundos, los cables de acero suspenden las vigas de hormigón pretensado, que son casi paralelos, adquiriendo la forma de un arpa.

Además de buscar la utilidad y seguridad vial, los puentes se han construido teniendo en cuenta criterios estéticos. La búsqueda de la belleza y la pureza de líneas han sido constantes a lo largo de la historia, y en ello ha jugado y juega un papel fundamental la geometría. Aparte de las técnicas y estilos de construcción esbozados, la geometría de los alzados es fundamental en la seguridad, tanto por las cargas

*La búsqueda
de la belleza
y la pureza
de líneas
han sido
constantes
a lo largo
de la historia,
y en ello
ha jugado
y juega
un papel
fundamental
la geometría.*

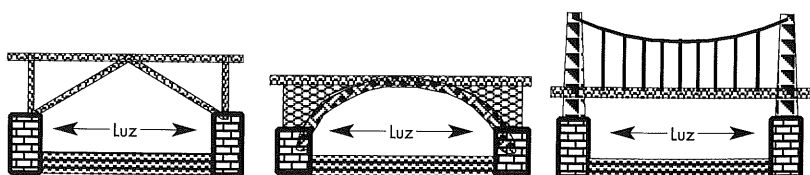


Figura 2. Formas de luz

que sus estructuras tiene que soportar como por la luz que consiguen, así como en la estética e integración con el medio; éste será el objeto de nuestro estudio en los diez puentes que tiene Valladolid sobre el río Pisuerga y que en orden cronológico son éstos: Mayor, Colgante, G. Regueral (del Poniente), García Morato, División Azul, Isabel la Católica, del Cabildo (Ronda Norte), Juan de Austria, Calatrava y Condesa Eylo.

A continuación se hace un estudio de los puentes de Valladolid sobre el río Pisuerga. Este estudio se ha llevado a cabo sobre planos de los puentes suministrados por el Ayuntamiento de Valladolid, y desde aquí agradecemos al profesor Jesús Valverde su colaboración, sobre fotografías de los puentes y sobre mediciones de los mismos que se han llevado a cabo. Se describen las matemáticas elementales de los puentes uno a uno. Trabajos parecidos al que aquí se describe pueden ser llevados a cabo como *Talleres de Matemáticas* con alumnos de segundo curso de bachillerato en cualquier ciudad. Estas actividades, sin duda, son muy motivadoras para los alumnos.

El puente Mayor

Leyendas aparte, se trata de un puente medieval, y su construcción puede estar ligado al asentamiento cristiano en Valladolid que surge en una confluencia de vías de comunicación, aprovechando un vado del río Pisuerga. Este puente se ha reconstruido en numerosas ocasiones y la forma actual, que tiene diez ojos, todos ellos diferentes, data del siglo XIX. La longitud total del puente es de 166,84 m y la geometría frontal del mismo está delimitada por la líneas horizontales de la calzada y la de la superficie del agua, y por los arcos que componen las bóvedas, que son todos ellos circulares y se distribuyen de la siguiente forma:

- A e I son arcos de medio punto y, por tanto, el alzado son semicircunferencias.

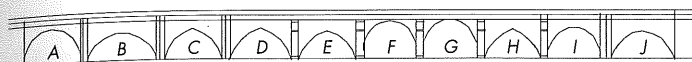


Figura 3. Alzado del Puente Mayor

- *B* y *J* son arcos de circunferencia menores de 180° .
- *C*, *D*, *E* e *I* son arcos mitrales y, por tanto, están formados por dos arcos de circunferencia que tienen su centro dentro de la luz del arco.
- *F* y *G* son dos arcos de medio punto peraltados.

La determinación de los arcos, centro, radio y amplitud, se hace sobre el plano facilitado por el Área de Urbanismo del Ayuntamiento de Valladolid, trazando sendas mediatrices a dos cuerdas, aplicando la propiedad de que las mediatrices de las cuerdas se cortan en el centro de la circunferencia de la que forma parte. Este plano está a escala 1:200 y midiendo sobre él se recuperan las dimensiones, sobre las que se aplican las correspondientes fórmulas para hallar el área del círculo, del sector circular y del triángulo (de Herón de Alejandría) se pueden determinar las áreas de luz de cada arco, lo que permite hallar el caudal que puede soportar el puente sin que las aguas rebasen el puente y, además, se puede hallar la superficie frontal de construcción, que multiplicada por el ancho de la calzada establece el número de metros cúbicos de material de construcción necesarios para realizar tal obra.

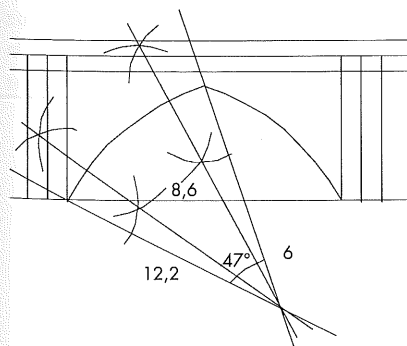


Figura 4. Determinación del centro, radio y amplitud del arco de centro C

Ojo	Radio	Área Semicírculo								Área del Ojo
A	6,5	66,37								66,37
I	5,535	48,12								48,12
			Base	Altura	Rectáng.					
F	5,83	53,39	11,66	1	11,66					65,05
G	6,18	59,99	12,38	0,75	9,285					69,28
			Grados	A. Sector	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Semiper	A. Triáng	
B	7,4	86,02	154	73,59	14,6	7,4	7,4	14,7	8,85	64,74
J	7,7	93,13	162	83,82	15,4	7,75	7,75	15,45	6,77	77,05
C	12,5	245,44	47	64,09	8,6	12,2	6	13,4	23,9	80,37
D	12	226,19	45	56,55	8,8	12	6	13,4	25,27	62,56
E	9	127,23	57	40,29	7,4	9	3,4	9,9	12,03	56,52
H	6,6	68,42	78	29,65	6,5	0,65	6,6	6,875	2,1	55,1
Área total de los ojos en m ²										645,16

*Además
de la geometría
frontal
es digno
de tener en cuenta
la geometría
de los pilares
rompientes...*

El uso de una hoja de cálculo permite agilizar las operaciones, que, de otra forma, serían pesadas hasta con la calculadora. Las áreas de los ojos del puente son las que se muestran en la tabla 1, en la que también aparecen los datos de los elementos que las componen.

El área total de los ojos supone que si la corriente de agua atravesara el puente a una velocidad de 10 km/h, el gasto que se produce en una hora sería de 0,64516 Hm³.

Área del rectángulo delimitado por los pilares laterales, la calzada y el agua: $166,84 \times 8,7 = 1458,51$

Área del frontal de la obra construida: 806,35 m².

Además de la geometría frontal es digno de tener en cuenta la geometría de los pilares rompientes: los más antiguos tienen un rompiente angular (ángulo diedro muy agudo), mientras que los más modernos lo tienen cilíndrico, como muestra la figura 5, ya que en estas superficies resbalan mejor los troncos de árboles que arrastra la corriente de agua.

Desde un punto de vista algebraico, considerando un sistema cartesiano de representación {O, X, Y, Z}, siendo OZ el eje vertical, OX el eje horizontal siguiendo el sentido de

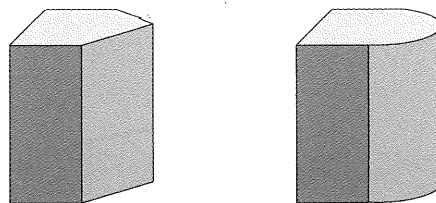


Figura 5. Rompientes diédricos y cilíndricos

la corriente, y OY el eje horizontal perpendicular a ambos. Un ejercicio interesante consiste en medir lo necesario para determinar las ecuaciones de los elementos arquitectónicos que componen el puente, cuyas ecuaciones son de los siguientes tipos:

- Plano de la carretera: $z = b$.
- Planos de las paredes anterior y posterior (los alzados): $x = k$.
- Planos de las rompientes: $ax + by = c$.
- Cilindros rompientes: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Cilindros que componen las bóvedas: $(z - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Puente Colgante

La construcción de este puente data del año 1865 y en él se utilizan las técnicas más modernas de su época. No es un puente colgante, a pesar de que ése sea su nombre, sino un puente de arco. La estructura se construye mediante un entramado de vigas, que están enlazadas con tornillería componiendo triángulos, que son mixtilíneos en los bordes superiores, cuyos vértices superiores se engarzan en un arco circular que tiene un radio aproximado de 78 m y de unos 25° . La intersección de las vigas oblicuas con las verticales forman otro arco de radio sensiblemente mayor, que está empotrado en dos estribos de piedra de sillaría.

En área del único ojo es ligeramente superior a la del Puente Mayor, pero tiene la ventaja de no tener ningún obstáculo en su interior que pueda retener ramas o troncos. El material de construcción no es comparable con el anterior, pero sí el gasto por hora. Considerando que la corriente de agua atravesara el puente con una velocidad de 10 km/h, el gasto que se produce en una hora sería de $6,51456 \text{ hm}^3$.

Desde un punto de vista algebraico, considerando un sistema de representación cartesiana, $\{O, X, Y, Z\}$, como en el Puente Mayor, los elementos arquitectónicos que componen el puente tienen ecuaciones de los tipos siguientes:

- Plano de la carretera: $z = b$.
- Planos laterales: $x = k, y = c$.

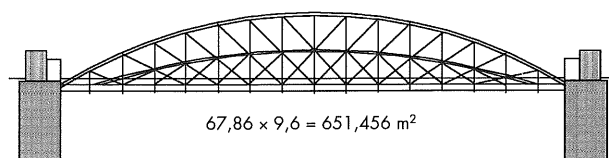


Figura 6. Alzado del Puente Colgante

Un ejercicio interesante consiste en medir lo necesario para determinar las ecuaciones de los elementos arquitectónicos que componen el puente...

- Estribos: $x \geq 0, x \leq k, z \leq b, z \geq 0, y \geq p_1, y \leq p_2; x \geq 0, x \leq k, z \leq b, z \geq 0, y \geq q_1, y \leq q_2$.
- Arcos del puente: $x = 0, (y - a)^2 + (z - c)^2 = r^2, x = p, (y - a)^2 + (z - c)^2 = r^2$.
- Vigas verticales: $x = m, y = n$.
- Vigas oblicuas: $x = s, ay + bz = k$.

Además de estos elementos aparecen ortoedros en los pilares de piedra que soportan la estructura del puente.

Puente de Isabel la Católica o del cubo

Al igual que el puente anterior, se trata de un puente de hormigón armado construido en el año 1956 y las pruebas de carga se hicieron en 1960 (Gigoso y Sarabia, 1997). Este puente combina dos pares de arcos de hormigón armado con vigas independientes. Los cuatro pares de arcos abarcan todo el lecho del río y arrancan de unos estribos no muy altos. La longitud total del puente es de 113,86 m y la parte más alta desde la superficie de la calzada hasta la superficie del agua mide unos 12,5 m, teniendo un desnivel hacia las márgenes del río de unos 50 cm. Los arcos están contruidos por dos cilindros circulares, el interior de 58,4 m de radio y un ángulo de 70° y el exterior de 64,5 m de radio y un ángulo de 63° , teniendo ambos su centro en el plano de simetría del puente. Al tener el arco superior el centro más bajo que el interior resulta un arco más delgado en la parte más alta.

El área del alzado que comprende la luz y la parte superior de la misma hasta la calzada es de unos 959 m^2 , y para hallar

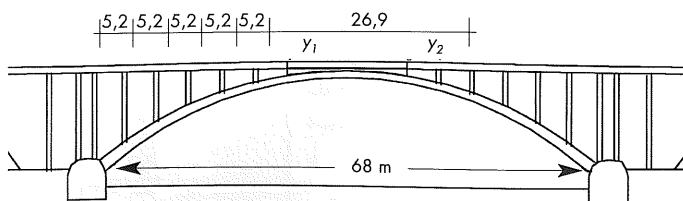


Figura 7. Alzado del Puente de Isabel la Católica

la zona frontal hueca hay que restar las áreas de los puntales y del arco:

- El área de los puntales está en torno a 18 m^2 .
- El área del arco:
sector exterior $A_a = 2287,22$;
sector interior $A_e = 2113,15$.

En consecuencia el área frontal, sobre el lecho del río, libre de obstáculos es de unos 767 m^2 , quedando aún los ojos laterales de las dos riberas, dimensiones que permiten el paso de $7,67 \text{ hm}^3$ a una corriente de agua con velocidad de 10 km/h . Con las áreas anteriores se pueden hallar el volumen de materiales de construcción empleados en la estructura, multiplicando las áreas por las respectivas anchuras de los elementos (arcos y puntales).

Desde un punto de vista algebraico, considerando un sistema de representación cartesiana, $\{O, X, Y, Z\}$, como en los puentes anteriores, los elementos arquitectónicos que componen el puente tienen ecuaciones de los tipos siguientes:

- Planos de la carretera: $ay + bz = c$.
- Planos laterales y planos de los tajamares: $x = k, y = c$.
- Puntales verticales: $m \leq x \leq n, p \leq y \leq q$.
- Las vigas (el plano que determinan) que enlazan los puntales están ligeramente inclinadas, pero la inclinación va variando para que la curva de la rampa sea suave; se trata de una interpolación lineal segmentaria. Sus ecuaciones son: $z = py + q$.
- Los arcos vienen determinados por las ecuaciones de los cilindros circulares: $b \leq x \leq k, y^2 + (z - c)^2 \geq r_1^2, y^2 + (z - c')^2 \leq r_1^2$.
- El tramo que está colocado en el centro del puente debiera ser un *splin* cúbico, $z = ay^3 + by^2 + cy + d$, y, por tanto, sus coeficientes deber cumplir las relaciones:
 - $z(y_1) = z(y_2) = z_1$.
 - $z'(y_1)$ pendiente del tramo recto contiguo.
 - $z'(y_2)$ pendiente del tramo recto contiguo.

Calcular el área que corresponde a elementos constructivos de los alzados de forma aproximada es sencillo, pero calcularla de forma exacta es bastante más complicado, ya que aparecen elementos mixtilíneos.

Puente del Poniente

Es un puente de hormigón armado que se terminó de construir en 1960, fecha en que se hicieron las pruebas de carga (Gigoso y Sarabia, 1997). Este puente combina arcos de hormigón armado y vigas independientes. Tiene tres pares de arcos de circunferencia sobre el lecho del río, que arrancan de unos pilares elevados. Cada arco soporta seis puntales sobre los que descansan las vigas de la calzada con espacios huecos entre ellos, lo que permite el paso del agua en grandes avenidas. En los laterales, ya fuera del río, tiene tres bóvedas de medio punto, que en caso de grandes avenidas pueden evacuar gran cantidad de agua y que en períodos normales pueden servir para otros usos.

Los pilares que soportan los arcos tienen tajamares cilíndricos, que favorecen el deslizamiento de los materiales que arrastra la corriente. Los tres pares de arcos son iguales, pero los puntales van aumentando su longitud hacia el centro del río, con lo que se consigue una elevación de la calzada de unos 50 cm en su punto central. La zonas más altas de los arcos, en vez de puntales, tienen unas cuñas de hormigón armado sobre los que descansa la calzada.

La longitud total del puente es de $134,25 \text{ m}$, los tres ojos sobre el lecho del río son aproximadamente iguales, estando formados por arcos de circunferencia de unos 20 m de radio y una amplitud de unos 90° . La anchura formada por la luz de estos ojos y por los dos espolones que los separan es de unos 95 m .

Calcular el área que corresponde a elementos constructivos de los alzados de forma aproximada es sencillo, pero calcularla de forma exacta es bastante más complicado, ya que aparecen elementos mixtilíneos. Así, por ejemplo, aparecen cuadriláteros, $ABCD$, y triángulos, PQR , en los que uno de sus lados es un arco de circunferencia, y para calcular su área hay que restar las áreas del segmento circular, DAE , y del sector circular, OPR , del área del trapecio $ABCD$ y del triángulo PQR , respectivamente.

Una manera de hacer cálculos aproximados consiste en considerar rectángulos y trapecios circulares que compensen las zonas irregulares y hallar el área de estas figuras.

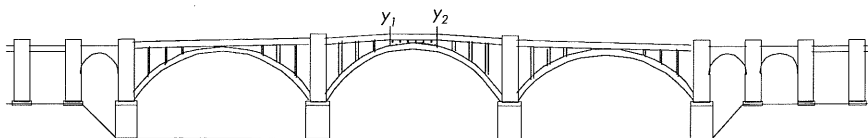


Figura 8. Alzado del Puente del Poniente

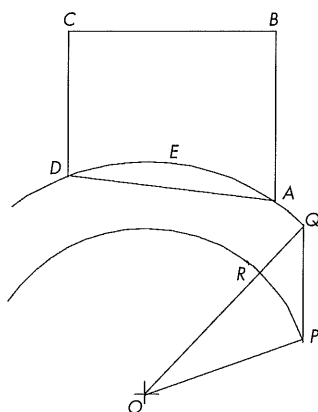


Figura 9. Detalle (deformado) de los alzados de puntales y terminación del arco

De esta forma el área de los alzados de estos elementos es el siguiente:

- Área de los 2 tajamares sobre el río: 31,96 m².
- Área de los 2 pilones sobre los tajamares del río: 36,44 m².
- Área de los 36 puntales: 12,80 m².
- Área de los 3 arcos: 135,52 m².
- Área del frontal sobre el río y bajo la calzada: 1032,12 m².
- Área de las vigas de la calzada 173,28 m².

Considerando el área de todos estos elementos, 216,72 m², la superficie total de los 3 ojos y de las zonas huecas está en torno a los 815,4 m², lo que daría un gasto de 8,154 hm³ a la hora, con un flujo de corriente de 10 km/h.

Como los puntales son más estrechos que los arcos y éstos no ocupan todo el ancho del puente, para calcular el volumen de estos elementos de construcción hay que multiplicar el área lateral de estos elementos por la suma del ancho de los pares de arcos, en un caso, y por el ancho de los pares de puntales, en otro. De todas formas, el volumen no puede ser muy grande, ya que los espacios huecos son grandes, lo que supone un ahorro de material considerable.

Desde un punto de vista algebraico, considerando un sistema de representación cartesiana, {O, X, Y, Z}, como en los puentes anteriores, los elementos arquitectónicos que componen el puente tienen ecuaciones de los tipos siguientes:

- Planos de la carretera: $ay + bz = c$.
- Planos laterales y planos de los tajamares: $x = k$, $y = c$.
- Arcos del puente: $b \leq x \leq k$, $(y - a)^2 + (z - c)^2 \geq r_1^2$, $(y - a)^2 + (z - c)^2 \leq r_2^2$;
- Puntales verticales: $m \leq x \leq n$, $p \leq y \leq q$.

*Las vigas
(el plano
que determinan)
que enlazan
los puntales
y las cuñas
sobre
los arcos laterales
están ligeramente
inclinadas,
pero
la inclinación
va variando
para que la curva
de la rampa
sea suave;
se trata de
una interpolación
lineal
segmentaria.*

- Las vigas (el plano que determinan) que enlazan los puntales y las cuñas sobre los arcos laterales están ligeramente inclinadas, pero la inclinación va variando para que la curva de la rampa sea suave; se trata de una interpolación lineal segmentaria. Sus ecuaciones son éstas: $z = py + q$.
- El tramo que está colocado en el centro del puente, y que corresponde a la cuña central, debiera ser un splin cúbico, $z = ay^3 + by^2 + cy + d$, y, por tanto, sus coeficientes deben cumplir las relaciones:
 - $z(y_1) = z(y_2) = z_1$.
 - $z'(y_1)$ pendiente del tramo recto contiguo.
 - $z'(y_2)$ pendiente del tramo recto contiguo.

Puente de García Morato

Las pruebas de carga se hicieron en 1969 (Gigoso y Sarabia, 1997) y en su construcción se utiliza hormigón armado. Las vigas son independientes y, por esta razón, tiene un pilar en la corriente del río, ya que con este sistema no se pueden conseguir luces tan grandes. Aunque el puente tiene una longitud de 113,75 m, sobre el agua sólo están 93,55 m y se consiguen unos ojos que en total suman 992,63 m² de superficie frontal, lo que supone que si la corriente de agua atravesara el puente a una velocidad de 10 km/h, el gasto que se produce en una hora sería de 9,9263 hm³.

Considerando los apoyos laterales, la superficie construida sobre el lecho sólo es de 441,62 m², lo que supone un ahorro de material de construcción de casi la mitad que en el Puente Mayor, y, sin embargo, se logran luces mucho mayo-

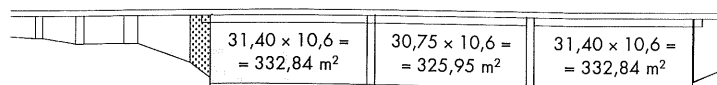


Figura 10. Alzado del Puente de García Morato

res, lo que favorece el «gasto» y dificulta la posibilidad de que los ojos se cieguen por acumulación de vegetación en los pilares.

En la margen izquierda aún hay 41,10 m de puente destinado a otros usos, pero en las grandes riadas evacuarían gran cantidad de agua. Los elementos arquitectónicos que intervienen tienen ecuaciones muy simples y ya han sido consideradas.

Puente de la División Azul

Este puente se considera «prácticamente terminado en 1969» (Gigoso y Sarabia, 1997) y no hay referencia sobre las pruebas de carga. En su construcción se utiliza hormigón armado. Y se utiliza una estructura de vigas continuas, con lo que se han conseguido luces mayores y ha posibilitado que los tajamares que soportan el puente sobre el agua sean dos pares de pilares independientes, siendo la longitud del entramado de vigas aproximadamente el mismo en los tres ojos que componen el puente.

Con esto, el volumen de material constructivo es mínimo y el volumen de paso de agua se optimiza, hecho que se puede apreciar en la figura 12.

La geometría de todo el puente es muy sencilla y los cálculos son aritméticos, ya que no hay ningún elemento curvilíneo.

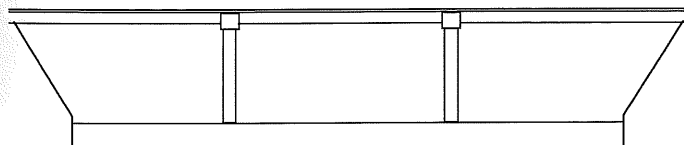


Figura 11. Alzado del Puente de la División Azul

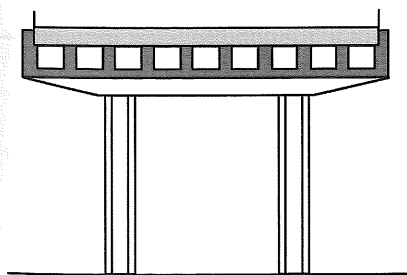


Figura 12. Sección transversal del Puente de la División Azul

De los alzados, por no repetir los comentarios de los puentes anteriores, sólo vamos a hacer una referencia a las ecuaciones de los pilares, que como ya hemos referido son de planta octogonal, y sus ecuaciones son: $x \leq a$, $x \geq b$, $y \leq c$, $y \geq d$, $y \leq x + p$, $y \leq x + q$, $y \geq -x + b$, $y \geq -x + k$. Sin embargo, sí que vamos a comentar la sección frontal del puente. En ella se aprecia que los pilares son prismas octogonales, que las vigas son vaciados de sección cuadrada, que aparecen voladizos laterales limitados por planos oblicuos de ecuación $ax + bz = c$, lo que permiten una vía muy ancha sin necesidad de tener que separar los pilares. La geometría de todo el puente es muy sencilla y los cálculos son aritméticos, ya que no hay ningún elemento curvilíneo.

Puente del Cabildo

Este puente se inauguró el 31 de diciembre de 1988 (Ayuntamiento de Valladolid, 1993), consta de tres arcos de hormigón armado, si bien, sólo el central está sobre el lecho. Éste descansa sobre dos pilares, que están separados 90 m. La longitud total es de 180 m, y, por tanto, éste es el puente más largo de Valladolid. La altura aproximada sobre el agua es de unos 10 m, y con un flujo de corriente de 10 km/h, en una hora se produce un gasto superior a los 10 hm³. Considerando un sistema de ejes cartesianos centrados en el lecho del río, la parábola que determina el arco tiene por ecuación $y = 10 - ax^2$, y el valor de a se determina imponiendo la condición de que la parábola pase por los puntos de los pilares (-45, 9) o (45, 9). Así resulta que $a = 1/2025$.

La superficie frontal comprendida entre los ejes de los dos pilares viene dada por la integral definida,

$$\int_{-45}^{45} \left(12 - \frac{1}{2025} x^2 \right) dx = 2 \int_0^{45} \left(12 - \frac{1}{2025} x^2 \right) dx$$

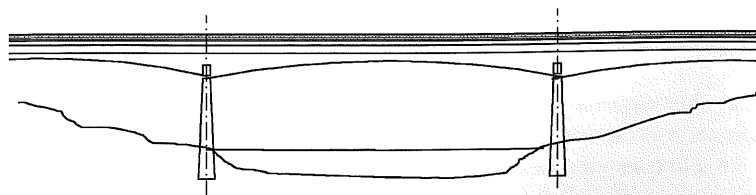


Figura 13. Alzado del Puente del Cabildo

Puente de Juan de Austria

Como reza en la placa del puente, se terminó en el año 1993 y consta de un arco parabólico de hormigón armado. Las dimensiones son parecidas al anterior, si bien, éste no tiene pilares, ya que el arco descende hasta el lecho del río. Sin embargo, este puente tiene dos aberturas laterales que en caso de grandes avenidas evacuarían un caudal considerable. Las ecuaciones son similares a las del puente del Cabildo y los cálculos se hacen igual.

Puente de Calatrava

Las pruebas de carga se hicieron en mayo de 1999. Es un puente de tirantes, hecho con acero y hormigón pretensado. Aunque en la margen derecha el puente descansa en un soporte de hormigón, los tirantes soportan la mayor parte de las cargas del puente y del tráfico a tracción con un mástil que enlaza el extremo de los contrapesos. El puente tiene una longitud total de 156 m, siendo la luz del tramo atirantado de 120 m, lo que proporciona un gasto próximo a los 10 hm³/h, considerando siempre un flujo de corriente de 10 km/h.

Los tensores son fuerzas y por lo tanto vectores que tienen su punto de acción en el puente, su línea de acción en rectas de ecuaciones $\{z=0, y=mx+n\}$ y sentido hacia el punto en el que concurren. Es un ejercicio interesante obtener las ecuaciones de estas rectas midiendo distancias y ángulos, así como de los soportes de la estructura de los tirantes y de los tirantes del contrafuerte.

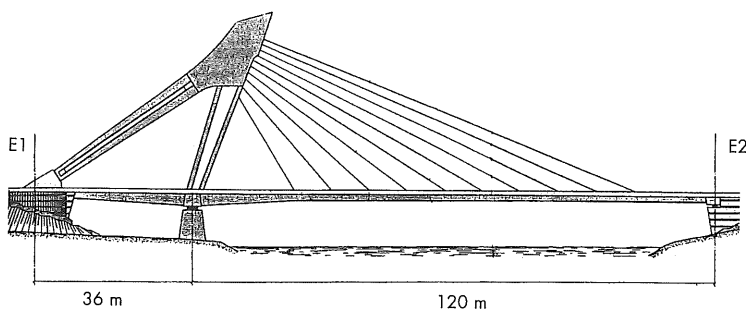
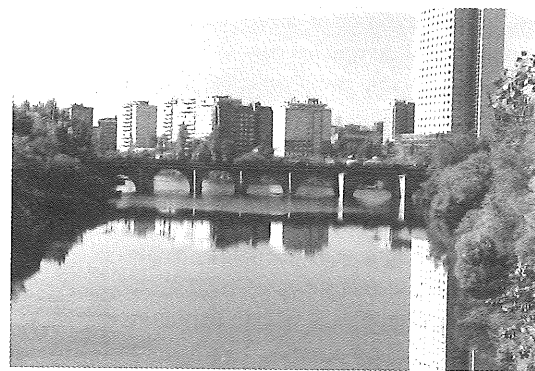


Figura 14. Alzado del Puente de Calatrava

Puente de la Condesa de Eylo

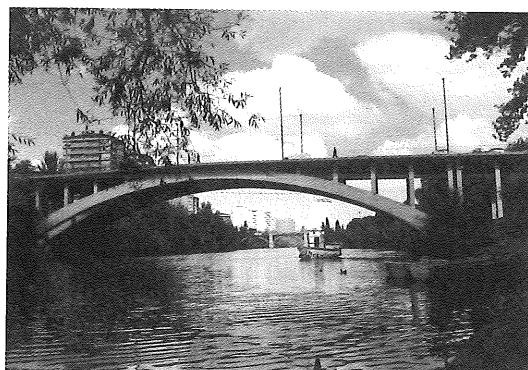
Es el último puente de Valladolid. Es un puente hecho con hormigón pretensado, su estructura es de vigas continuas y sus puntales soportes están inclinados. El puente es el más largo de Valladolid y, para embocar con las calles de ambos márgenes, tiene una «doble curva» que enlaza



Puente Mayor



Puente colgante



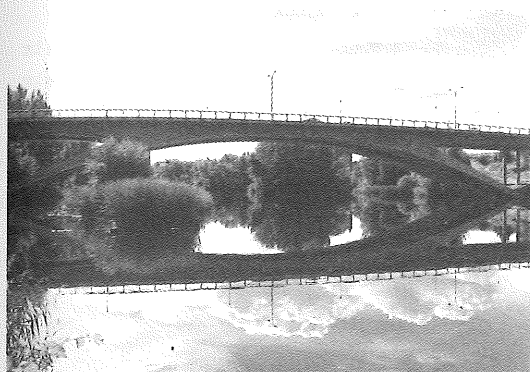
Puente de Isabel la Católica



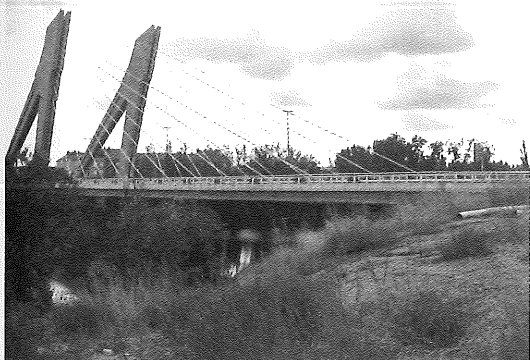
Puente de Poniente



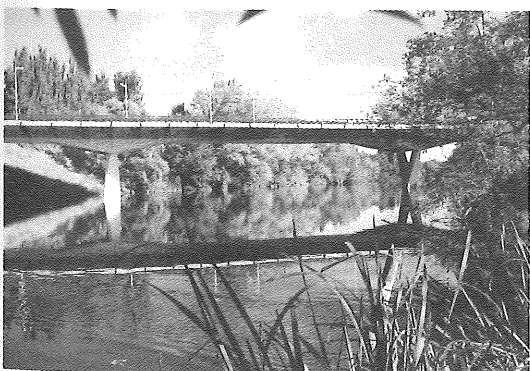
Puente de la División Azul



Puente de Juan de Austria



Puente de Calatrava



Puente de la Condesa de Eylo

tangencialmente con ellas. Tiene una longitud proyectada de 130 m, lo que da una mayor longitud real, la luz entre los puntales centrales es de 50 m y en los laterales de sendos tramos de 39 m, recortados ambos por dos planos inclinados en las márgenes con una pendiente de $2/3$. La altura de los puntales es de 6,8 m, lo que permite un gasto de $8,26 \text{ hm}^3$ de agua, desplazándose ésta a 10 km/h. La figura 15 reproduce el alzado de este puente.



Figura 15. Alzado del Puente Condesa de Eylo

Más interesante resulta la planta, que se reproduce en la figura 16, que contiene dos curvas que son tangentes entre sí el centro y también con las rectas de las calles en las que emboca a unos 10 metros de los apoyos laterales.

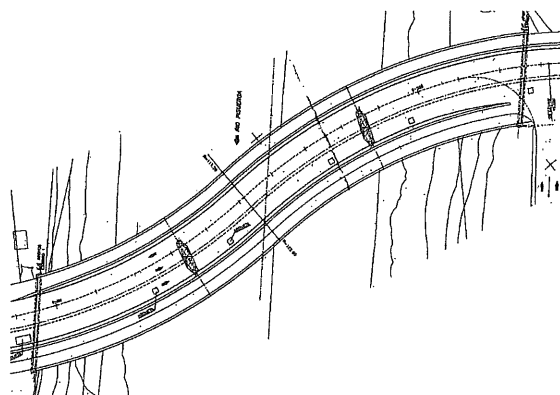


Figura 16. Planta del Puente Condesa de Eylo

Para que las curvas enlacen con suavidad tienen que coincidir, tanto ellas como sus derivadas en los puntos de enlace, es decir, deben ser *splines cúbicos*. Sin embargo, por razones de simetría estos empalmes también se consiguen mediante dos arcos de circunferencia, hecho que se muestra en la figura 17, que representa la línea central del puente —la mediana— y el trazado de los arcos de circunferencia que enlazan las calles. La planta de la figura 16 se ha solucionado de esta forma y, en la práctica, cuando el tráfico es lento, como en este caso, los empalmes se suelen resolver con arcos de circunferencia.

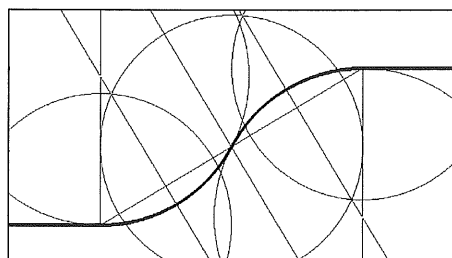


Figura 17: Enlace con dos arcos de circunferencia

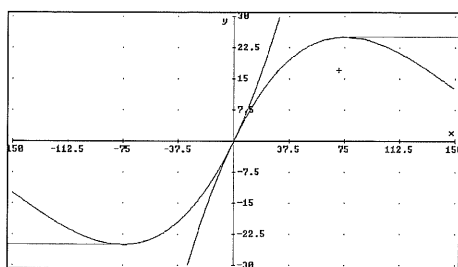


Figura 18: Enlace mediante dos esplines cúbicos

Para calcular los esplines se considera un sistema cartesiano con origen en el centro del puente, las dos curvas, medianeras del puente, que enlazan con las medianeras de las calles tienen que tener ecuaciones del tipo:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y = px^3 + qx^2 + rx + s$$

y, además, considerando como unidad de medida el metro, se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

Ambas deben pasar por (0, 0), lo que implica que $d = s = 0$. Las derivadas de ambas en (0, 0) deben ser iguales, lo que implica que $c = r$.

Además, la primera curva de la primera función debe pasar por (75, 25) y su derivada en $x = 75$ debe ser 0, lo que implica, por una parte, que $25 = -421875a + 5625b - 75c$, y, por otra, que $0 = 16875a - 150b + c$.

Análogamente, la curva de la segunda función debe pasar por (75, 25) y su derivada en $x = 75$ debe ser 0, lo que implica, por una parte, que $25 = 421875p + 5625q + 75c$, y, por otra, que $0 = 16875p + 150q + c$.

Por otra parte, ambas curvas deben ser simétricas respecto del origen y, por tanto, para cualquier x del intervalo $(-75, 0)$, entonces $-x$ está en $(0, 75)$ y se debe cumplir que

$$ax^3 + bx^2 + cx = -(p(-x)^3 + q(-x)^2 + r(-x))$$

y, por tanto,

$$(a - p)x^3 + (b + q)x^2 + (c - r)x = 0,$$

lo que implica que $a = p$, $b = -q$ y $c = r$ (esta última identidad ya había sido obtenida).

Así se tiene el siguiente sistema:

$$-25 = -421875a + 5625b - 75c$$

$$0 = 16875a - 150b + c$$

$$25 = 421875a - 5625b + 75c$$

$$0 = 16875a - 150b + c$$

Finalmente, se exige que la tangente a ambas curvas en el origen sea la perpendicular a la recta que une los centros O1 y O2, de las circunferencias de la figura 17. Imponiendo que O1 = (-17, R-25) y que la circunferencia de ecuación,

$$(x + 75)^2 + (y - R + 25)^2 = R^2$$

pase por (0, 0), se obtiene que $R = 125$ y, por tanto O1 = (-15, 100). Análogamente, por simetría, O2 = (75, -100) y

en consecuencia, como la pendiente de la recta que une ambos centros es:

$$m = \frac{-100 - 100}{75 + 75} = -\frac{4}{3}$$

la de la recta tangente a ambas circunferencias es $c = 3/4$. Por tanto, en el sistema inicial, las ocho incógnitas se reducen a dos en éste:

$$25 = 421875a - 5625b + 25$$

$$0 = 16875a - 150b + 1/3$$

Cuya solución es $a = 1/67500$, $b = 1/150$. Como se sabía que $c = 3/4$ y que $d = 0$, los esplines que resultan son:

$$y = (1/67500)x^3 + (1/150)x^2 + (3/4)x$$

$$y = (1/67500)x^3 - (1/150)x^2 + (3/4)x$$

y siendo más precisos, la solución se puede escribir como una función definida a intervalos de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{67500}x^3 + \frac{1}{150}x^2 + \frac{3}{4} & x \in [-75, 0] \\ \frac{1}{67500}x^3 - \frac{1}{150}x^2 + \frac{3}{4} & x \in (0, 75] \end{cases}$$

Quedan abiertas otras cuestiones como cuál es la ecuación de las curvas que definen los bordes de la calzada —en el sentido de saber si son trasladadas de ésta—, y, una vez determinadas hallar el área de la calzada, suponiéndola plana.

Se puede estudiar la diferencias de comportamiento entre unos enlaces y otros, y se puede ir más lejos, ya que se podría pensar en curvas tales que su curvatura varíe de forma uniforme en función del arco: las *clotoides*, pero no se estudian aquí por razones obvias.

Bibliografía

- ARNUNCIO, J.C. (1996): *Guía de Arquitectura de Valladolid*, Colegio de Arquitectos, Valladolid.
- AYUNTAMIENTO DE VALLADOLID (1993): *Actualización del plan General de Ordenación Urbana de Valladolid*, Valladolid.
- AYUNTAMIENTO DE VALLADOLID (1982): *Valladolid, guía histórica monumental y moderna*, Valladolid.
- GIGOSO, P., y M. SARAVIA, (1997): *Arquitectura y Urbanismo de Valladolid en el siglo XX*, Ateneo de Valladolid, Valladolid.
- MARTÍNEZ, V. (1892): *El Puente Mayor*, Biblioteca Histórica de la Universidad de Valladolid, Valladolid.

Elena Ortega
Tomás Ortega
Universidad de Valladolid