10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Propuesta taller para introducir el trabajo con sucesiones

Nini Johanna Bustos
Código: 20041145004
nibu116@hotmail.com
Sergio Andres Moreno Lopez
andreduende4@hotmail.com
Código: 20032145030
Universidad Distrital Francisco Jose De Caldas
Licenciaura En Matematicas

Introducción

En esta propuesta queremos dar a conocer un taller que consideramos fiable, para ser puesto en el aula de clase y puesto a prueba en el área escolar, especialmente en bachillerato en el área de matemáticas; donde el niño se enfrentará al descubrimiento por sí solo de lo que sucede en una figura y a partir de regularidades, patrones; pueda expresar lo que encuentra desde la representación gráfica y tabular para llegar a la representación algebraica y a el significado y esencia del concepto de sucesión.

Esta propuesta busca a través de figuras espiraladas introducir el trabajo con sucesiones donde se le propone al estudiante enfrentarse a una situación (observación de las figuras espiraladas)donde a partir de lo que ve: identifique, analice y deduzca el comportamiento de lo que sucede y pueda llevar esto a un lenguaje verbal y escrito con ayuda de representaciones gráficas y tabulares que le ayudarán a establecer regularidades y que permitirán dar sentido a lo que sucede con las figuras espiraladas.

Por otro lado es clave decir que de acuerdo a experiencias propias y a practicas docentes que hemos hecho como estudiantes de la UD, el abordaje del concepto de sucesión es un tema que asusta a muchos estudiantes y que los lleva a desistir desde un principio al conocimiento de este, es aquí la preocupación por dar alternativas e invenciones que lleven a atacar estas situaciones donde nuestra propuesta busca con gran anhelo que el estudiante desde un contexto particular y sencillo vaya construyendo un proceso que lo incentive a descubrir y a manifestar cosas que suceden a partir de la observación y por lo tanto análisis de una gráfica siendo libre el estudiante a lo que encuentra y autónomo en su proceso; esto con ayuda de una serie de preguntas que han sido planteadas especialmente como orientadoras y que han sido elaboradas pensando en lo que el niño puede sentir como incertidumbre ante un proceso como este.

La propuesta consta de unos objetivos, el marco teórico, una metodología que es el taller mismo y las conclusiones; todo esto trata de aclarar la pertinencia del taller y la misma iniciativa de nosotros por plantear estos tipos de talleres que consideramos pertinentes a lo hora de abordar un tema.

Objetivo general

Generar a partir de la propuesta de un taller (figuras espiraladas) la motivación por parte de los estudiantes de bachillerato para el abordaje del concepto de sucesión

Objetivos especificos

- Generar en el estudiante sentimientos de exploración ante una situación que lo llevara a la obtención de datos para llegar a formalizar sus propios procesos.
- Mostrarle al estudiante en contextos particulares que el concepto de sucesión es asequible a todos
- Obtener más familiarización de los conceptos que parecen abstractos a partir de hallazgos por parte de los estudiantes.
- Hacer participe al estudiante de la construcción del concepto con sus propios hallazgos mostrándole la gran importancia de su trabajo exploratorio.
- Reconocer el verdadero sentido del concepto de sucesión en los estudiantes de bachillerato.

Planteamiento del problema

¿Como lograr que los estudiantes especialmente de bachillerato lleguen a dar significado a la construcción del concepto de sucesiones?

Marco teórico

La espiral ha sido una imagen trabajada por mucho tiempo y que le han dado varios significados y usos en diferentes contextos. En el siguiente apartado daremos a conocer algunos significados que le han dado y que ha llevado a la ciencia a realizar algunas invenciones a partir de su curiosa forma:

- El trabajo y la investigación de las espirales desde la naturaleza como son las conchas animales la cuales fueron vistas como espirales logarítmicas
- Descripción desde la geometría de las conchas como el hecho de que estas se forman siguiendo una curva que rota en torno a un eje, de modo que la forma de la curva permanece constante pero su tamaño aumenta en progresión geométrica
- En las conchas Nautilus y amonites la curva generatriz gira en un plano perpendicular al eje y la concha se conforma como figura discoidal plana, siguiendo una forma hélice.
- La espiral como símbolo: es uno de los símbolos más antiguos y se encuentra en todos los continentes, habiendo jugado un papel fundamental en el simbolismo desde su aparición en el arte megalítico. Parece que en muchos lugares representaba el ciclo "nacimiento-muerte-renacimiento" así como al sol, que se creía seguía ese mismo ciclo, naciendo cada mañana, muriendo cada noche y renaciendo a la mañana siguiente.
- Actualmente, la espiral también es empleada como símbolo para representar el pensamiento cíclico, en diversas propuestas filosóficas, estéticas y tecnológicas
- Desde la ciencia natural se observó la aparición de espirales en la anatomía de diversos cuernos, dientes y algunas plantas..
- El borde de los pétalos de la rosa, que forman una espiral casi perfecta igualmente que la piña y el repollo.
- Igual que en el girasol, las piñas tienen espirales, según en el sentido en el que se mire la piña y el tipo de piña tiene una cantidad de espirales.

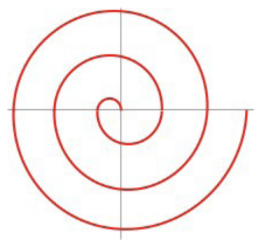
Es importante entonces retomar el significado de la espiral desde lo matemático lo cual nos apoya en el trabajo que se esta realizando reiterándonos el hecho de que la forma de la espiral permite la inspiración para generar ideas que contribuyan al mejoramiento de la educación matemática y de igual forma que hay diferencias entre lo que nosotros estamos tomando como figuras espiraladas.
Retomaremos de acuerdo a lo anterior el significado de ésta desde lo matemático daremos la

definición que de ella se tiene: Una espiral es una línea curva generada por un punto que se va alejando progresivamente del centro a la vez que gira alrededor de él. Normalmente se define con una función que depende de dos valores: el ángulo del punto respecto a un eje de referencia, y la distancia desde este punto al centro, situado en el vértice del ángulo.

Ante esta definición habría que aclarar algo con respecto a nuestra propuesta y es que estamos trabajando con figuras espiraladas y no exactamente un espiral como la definen. Son figuras que inspiran la forma de una espiral pero con segmentos no curvos. Se podría decir que la espiral permite abrir el campo de trabajo sobre ella sin perder su esencia.

A continuación mostramos los diferentes trabajos realizados sobre espirales y que motivan a nuestro trabajo matemático sobre ella.

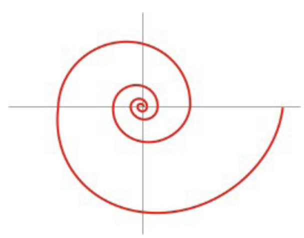
Espiral de Arquímedes



La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto, moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira con velocidad angular constante.

En coordenadas polares (r, θ) la espiral de Arquímedes puede ser descrita por la ecuación siguiente: $r = a + b \cdot \theta$ donde a y b son números reales que determinan el tamaño de la espiral y la distancia entre sus brazos.

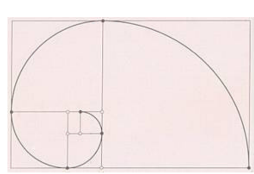
Espiral logarítmica



Definición

Una espiral logarítmica, espiral equiangular o espiral de crecimiento es una clase de curva espiral que aparece frecuentemente en la naturaleza. Fue descrita por primera vez por Descartes y posteriormente investigada por Jakob Bernoulli, quien la llamó Spira mirabilis, "la espiral maravillosa", y quiso una grabada en su lápida. Por desgracia, se grabó en su lugar una espiral de Arquímedes.

Espiral de Durero

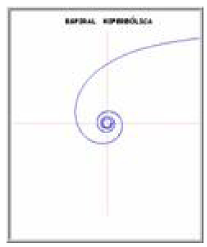


En 1525, tres años antes de morir, el genial pintor renacentista y gran enamorado de las Matemáticas, Alberto Durero (1471-1528) publica una obra titulada Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas. Es un precioso libro en el que pretende enseñar a los artistas, pintores y matemáticos de la época diversos métodos para trazar diversas figuras geométricas.

En esta obra Durero muestra cómo trazar con regla y compás algunos espirales y entre ellas una que pasará a la historia con su nombre: la Espiral de Durero.

No se trata de una espiral de Arquímedes ni de una espiral logarítmica pues ninguna de las dos puede construirse con regla y compás. Sin embargo se aproxima bastante a esta última. Es una de las espirales gnómicas basadas en el famoso número de oro, o mejor dicho, en los rectángulos áureos.

Espiral hiperbólica



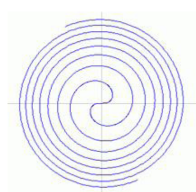
La espiral hiperbólica fue descubierta por Pierre Varignon en 1704. Fue estudiada por Johann Bernoulli entre 1710 y 1713 y también por Cotes en 1722.

Su ecuación es

$$r = \frac{a}{\theta}$$

Tomando el polo como centro de inversión la espiral hiperbólica se convierte en la espiral de Arquímedes de ecuación $r = a \cdot \theta$

Espiral de Fermat



La espiral de Fermat, denominada así en honor de Pierre de Fermat y también conocida como espiral parabólica, es una curva que responde a la siguiente ecuación: $r = \theta^{1/2}$

Es un caso particular de la espiral de Arquímedes.

Espirales en la naturaleza:

El concepto de sucesion visto en algunos libros de la educacion media

Esta vistas e introducidas desde libros de texto como:

Un arreglo de un conjunto de elementos, en un orden definido, produce un conjunto ordenado, por ejemplo; el conjunto de los números naturales es un conjunto ordenado, pues tiene un primer elemento, y cada elemento, a su vez, un sucesor inmediato.

El primer termino es el O; el segundo; 0+1=1; el tercero: 1+1=2; el cuarto: 2+1=3

Es de suponer entonces que el termino decimoctavo será: (18-1)=17 y así sucesivamente. Por lo tanto, el termino enésimo (n-ésimo) cumple la expresión (n-1).

Entonces las sucesiones o conjuntos ordenados cumplen que tiene:

- Primer elemento
- Cada elemento debe tener, a su vez, un sucesor inmediato.

Sucesiones infinitas: es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos Si f es una sucesión infinita, entonces, a cada entero positivo n le corresponde un numero real *f(n).*
Uno de los ejemplos que introducen al inicio del tema del libro es:
Sea la siguiente lista de números: 1, 14, 32,80…….
¿Cómo se hizo para ordenarla así?
¿Fue al azar, o existe un patrón para crear ese orden?
¿Qué numero sigue después del 80?

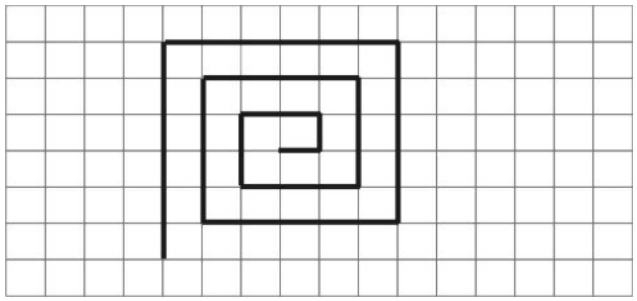
(Gustavo Centeno, Nelson Jiménez; Nueva matemática constructiva, 9º; 1997)

A partir de lo anteriormente citado consideramos que es necesario para la introducción a un tema tan importante como es el de las Sucesiones el abordaje de una situación que permita generar ese mismo conjunto ordenado pero de forma que el estudiante mismo lo genere mediante un proceso de indagación y hallazgo de regularidades y se de cuenta de lo que sucede al transcurso de encontrar este termino sucesor inmediato, logrando construir la expresión general de la sucesión que es lo que se hace en el siguiente taller propuesto:

Espirales y algo mas

1. ¿Te acuerdas cómo es la concha de un caracol, la vía láctea, la piña y el remolino de viento? ¿Que tienen en común?____________________

Si observas la siguiente figura podrías asemejarlas a las imágenes anteriores:



a) ¿Qué ves en la imagen y en la figura ____

b) ¿En qué se parece la anterior figura a las imágenes anteriores?___________________________

c) ¿Puedes observar y decir como está formada la figura?__________________________________

d) ¿Encuentras alguna juicio para explicar lo que sucede?_________________________________

2. En la siguiente tabla encuentras relacionado el número del segmento y la longitud por unidad de cada uno. Observa y completa la tabla. Representa con números el comportamiento que sigue la figura

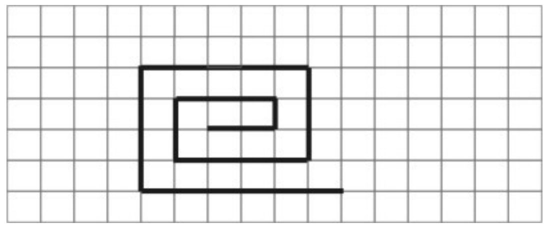
a) ¿Por qué la completaste así y no de otra forma?

b) ¿Qué regularidades encuentras en la tabla?

Posición segmento	Longitud por unidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
.	.
.	.

c) ¿Podrías establecer alguna razón entre la posición de los segmentos y la longitud del segmento sucesor? ____

3. Y ahora que opinas de la siguiente figura ¿Se parece a la anterior?, ¿En qué cambia?



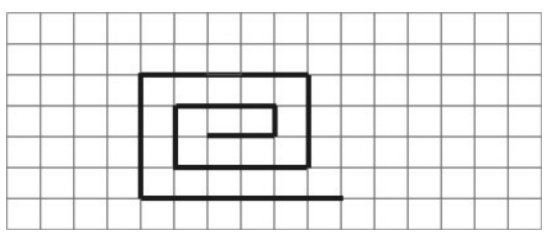
a) ¿Podrías con la siguiente tabla mostrarnos cual fue el cambio que sufrió la figura con respecto a la anterior?

Figura No 1	Longitud por unidad	Figura No 2	Longitud por unidad

b) Qué puedes decir de las tablas:____

c) ¿Cómo expresaría de forma algebraica del n ésimo segmento?

4. Y ahora en esta figura puedes decir ¿Qué sucede? ____



a) ¿Podrías seguir el comportamiento en la figura gráficamente?

b) ¿En que cambia con respecto a las anteriores? ¿Las tablas cambian, por qué?_______________

c) Realiza la tabla correspondiente y cuéntanos que sucede con el comportamiento y con cada uno de los segmentos y el segmento siguiente, ¿Hay alguna razón entre la longitud del segmento y su sucesor?.

d) ¿Cuál será la longitud del segmento que este en el Nº 50, en el Nº 100?____________________

e) ¿Cómo expresaría de forma algebraica del enésimo segmento?___________________________

5. Realiza la figura espiralada correspondiente a la siguiente tabla y completa la tabla:

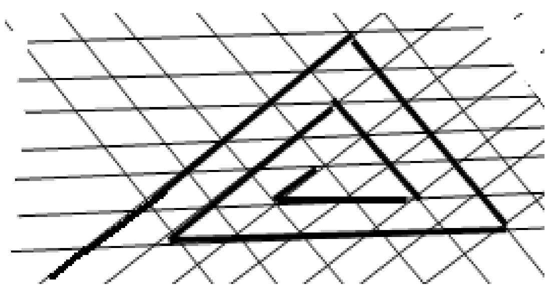
Posición segmento	Longitud segmento
1	1
2	3
3	3
4	4
5	1
6	3
7	3
8	
9	
.	
.	

a) ¿Qué regularidades encuentras en la tabla y en la figura espiralada que realizas?___________

b) ¿Cuál será la longitud del segmento que este en el Nº 50 , en el Nº 100?.__________________

c) ¿Cómo seria la expresión algebraica general del enésimo segmento? ____________________

6. Sabes que conjunto ordenado me representa la siguiente figura espiralada.



a)¿Como resumirías estos comportamientos? Realízalos en una tabla y generaliza___________

Tipo de analisis al cual se quisiera llegar con la actividad

Expresión general de $f(n)$, con los términos de $f(n)$ de la forma: $1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6$........

Posición segmento	Longitud segmento
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3

7	4
8	4
9	5
.	.
.	.
n	$f(n) = \{ n/2, n = 2k$ $f(n) = \{ n+1/2, n = 2k-1$

Razones de la posición n con la posición n+1

Posición segmento	Razón de n con n+1
1	1
2	½
3	2/2
4	2/3
5	3/3
6	¾
7	4/4
8	4/5
9	5/5
.	.
.	.
.	.
n	$f(n/n+1) = \{ n/n+1 \neq 1, n = 2k$ $f(n/n+1) = \{ n/n+1 = 1, n = 2k-1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, luego la sucesión $f(n) = 1/n+1$ es convergente, y por ser convergente es de Cauchy.

Ahora, considérese la espiral de la sucesión

$$f(n) = \{ n/2, n = 2k$$
$$f(n) = \{ n+1/2, n = 2k-1$$

pero solo hacia los sentidos de arriba, abajo, al lado izquierdo, y al lado derecho.

En el sentido hacia arriba

Posición segmento	Unidades
3	2
7	4
11	6
15	8
19	10
.	.
.	.
.	.
$4n-1,$	$f(n)=2n$

En el sentido hacia la izquierda

Posición segmento	Unidades
4	2
8	4
12	6
16	8
20	10
.	.
.	.
.	.
$4n$	$f(n)=2n$

En el sentido hacia abajo:

Posición segmento	Unidades
5	3
9	5
13	7
17	9
21	11
.	.
.	.
.	.
$4n+1$	$f(n)=2n-1$

En el sentido hacia la derecha:

Posición segmento	Unidades
6	3
10	5
14	7
18	9
22	11
.	.
.	.
.	.
$4n+2$	$f(n)=2n-1$

Conclusiones

De acuerdo al anterior taller podemos decir que es necesario que en las instituciones el trabajo que se haga con los estudiantes debe ser mas de construcción para entender el sentido del concepto y no memorizar que es lo que hace usualmente el individuo; es necesario que el trabajo que se haga sea consiente y de forma practica donde el estudiante tenga la experiencia de encontrar datos y formas que le permitan llegar a conclusiones.

En este taller y de acuerdo al análisis que se hizo se puede establecer varias regularidades y patrones, además de acuerdo a las preguntas orientadores que se hagan se puede promover un análisis mas interior que deje ver la construcción de un concepto y por lo tanto su profundización debido a que el niño tendrá en su mente y en su pensamiento el hecho de lo que significa términos sucesores y conjuntos ordenados; sabemos que la teoría de los números figurados fue y es muy importante y utilizado para encontrar regularidades y patrones, lo cual reiteramos con el trabajo de figuras espiraladas.

De acuerdo a nuestras practicas docentes nos hemos dado cuenta de que al estudiante le cuesta entender temas que tal vez para el no son de su gusto, es por esto que se quiere intentar tomar diferentes alternativas donde el estudiante se pueda motivar y a la vez construir con significado un concepto matemático y lo pueda relacionar con formas que contienen nuestro alrededor.

Se espera el taller recoja lo suficiente para ser aceptado y por lo tanto expuesto; sin embargo se espera recibir sugerencias de cambios o anexos en el momento en el que tengamos la oportunidad de exponerlo.

Bibliografía

- Gustavo C, Nueva matemática constructiva, Libros Y Libros S.A; 9º grado. 1997
- Wiki pedía, 2009. Espirales
- mundodelasmatematicas.placetotry.com/2006/06/espiral-de-ulam.html
- www.epsilones.com/paginas/i-curvas.html