10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Pruebas sin palabras: una propuesta para la formulación, argumentación y demostración en el áula de matemáticas

Carolina Herrera
caher08@gmail.com
Estudiante Universidad Distrital Francisco José de Cáldas[1]

Resumen

Se presenta una propuesta para la formulación, argumentación y demostración en el aula de matemáticas a través de actividades que potencien el sentido y la comprensión del trabajo del pensamiento matemático en la escuela. Para ello se busca desarrollar procesos generales como el planteamiento y la resolución de problemas, el razonamiento matemático, la modelación matemática y la comunicación matemática, atendiendo a las exigencias de documentos oficiales como los Lineamientos curriculares de matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2002). Motivando, de esta manera, a que el estudiante busque distintos caminos de solución, proponga soluciones, las confronte con las de sus compañeros, las defienda o las discuta, y ejercite su capacidad de modelar situaciones cada vez más complejas, que dependiendo del grado en que se trabajen, potenciarán mucho más su grado de generalización. Logrando así uno de los objetivos esenciales (y al mismo tiempo una de las dificultades principales), que lo que se enseñe esté cargado de significado y tenga sentido para el estudiante.

Introducción

Al concebir el trabajo de la Educación Matemática en Colombia como un espacio de construcción e interacción entre maestro-saber-estudiante –sin dejar de lado al entorno en que éstas se gestan– es de vital importancia reconocer que dichas interacciones son determinantes en la comprensión del conocimiento matemático.

Teniendo en cuenta lo anterior y siguiendo los planteamientos de algunos autores como Polya (1982), la importancia que desempeña la resolución de problemas en la matemática escolar, debe propender porque los estudiantes sean resolutotes competentes de problemas. Charnay (1988) menciona que los estudiantes además, deben ser capaces no sólo de repetir o rehacer, sino también de "… resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas", acciones que el estudiante logrará realizar con la interacción estudiante–saber, estudiante-estudiante y estudiante-maestro, la cual se desarrollará dependiendo del contexto en que se trabaje".

Por su parte Brousseau (1983) menciona que uno de los objetivos esenciales (y al mismo tiempo una de las dificultades principales) es precisamente que –por una parte– lo que se ha enseñado esté cargado de significado –y por otra– que tenga sentido para el alumno.

1 Conferencia realizada para X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa asesorado por Gabriel Mancera profesor del proyecto curricular de la Licenciatura de Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital Francisco José de Cáldas

Teniendo cuenta lo anterior, resulta evidente ver que las interacciones que se dan alrededor de la triada didáctica (maestro, saber, estudiante) entorno a un conocimiento matemático, pueden generar una actividad matemática potente como la resolución de problemas, toda vez que ésta permite dar repuesta a preguntas como "¿cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo? ¿cómo y por qué funciona tal herramienta? (por ejemplo, ¿cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado?)" (Charnay, 1988).

De esta manera se busca fortalecer la implementación de actividades que potencien el sentido y comprensión del trabajo del pensamiento matemático en la escuela, actividades que desde una perspectiva social y cultural, llenen de significado la labor de las matemáticas en la sociedad. De ahí la importancia y la responsabilidad de los maestros en proponer tareas pertinentes que doten de sentido y utilidad el trabajo matemático.

Es así como surge la propuesta de trabajar con actividades descritas en el libro pruebas sin palabras, las cuales permiten al estudiante formular, argumentar y demostrar –a través de gráficos relacionados con una expresión matemática– conceptos matemáticos.

Planteamiento del problema

Cuando se habla de la clase de matemáticas, los estudiantes suelen tener una actitud de desinterés hacia las actividades que allí se les plantean, pero ¿Cuál es la razón del por qué los estudiantes asocian las matemáticas como una materia árida y sin sentido?

Una primera respuesta a este interrogante podemos obtenerla al revisar el desarrollo que antiguas civilizaciones como los babilonios, mayas y egipcios, hicieron al intentar solucionar problemas sociales y políticos propios de su cultura. Estos procedimientos son enseñados (hoy en día) en las aulas de matemáticas sin ninguna referencia, así es de vital importancia reconocer que en ese entonces las necesidades eran muy diferentes a las necesidades e intereses que actualmente tienen los estudiantes, y que posiblemente esa diferencia de necesidades e intereses hace que los contenidos enseñados carezcan de sentido y utilidad.

El camino que ha seguido la Educación Matemática a atravesado diferentes etapas. Es aquí donde entran en juego tres aspectos considerados fundamentales: la matemática como objeto de estudio, la manera como ésta es enseñada en la escuela y lo que el estudiante puede realizar con esa matemática que ha aprendido.

A través de la historia se ha visto cómo en la escuela se le ha dado mayor importancia a alguno de los anteriores aspectos; así, por ejemplo, en muchas escuelas, lo más importante es formar estudiantes con muchos conceptos matemáticos, aunque los estudiantes no sepan qué sentido tienen éstos. En cambio, en otras, es fundamental la forma empleada para enseñar el conocimiento (prestando mayor atención a cómo se enseña, que a lo que verdaderamente entiende el estudiante de lo que le enseñan).

En relación con lo que el estudiante puede realizar con las matemáticas que ha aprendido en la escuela, muchas personas se preguntan: ¿de qué me sirve aprender matemáticas, si en el momento de desempeñarme laboralmente (por ejemplo) no voy a necesitar conocimientos de álgebra o de cálculo? El motivo por el cual esas personas desconocen la importancia de las matemáticas se debe, en parte, a que no se conciba su utilidad, ¿cómo un ser humano puede ver la importancia de las matemáticas, cuando en la escuela a la que ha asistido se le ha enseñado una serie de algoritmos carentes de sentido?

En este sentido, los Lineamientos Curriculares de matemáticas (MEN, 1998), buscan que los estudiantes sean matemáticamente competentes, para ello se requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de procesos generales como planteamiento y resolución de problemas, razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración), modelación matemática y comunicación matemática; los cuales deben pasar por distintos niveles de competencia. Además se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico y variacional.

Es aquí donde radica la importancia de las actividades y situaciones problemas que el maestro proponga, y la intervención pertinente del mismo, para que, involucrando esos pensamientos y procesos generales, se le pueda dar solución.

Es por ello que se considera necesario implementar una actividad matemática potente, como lo es la resolución de problemas, que con actividades como las propuestas en el libro pruebas sin palabras, la clase de matemáticas se convierta en un espacio donde los estudiantes desarrollen su capacidad de formular, argumentar, demostrar y aprender matemáticas.

Consideraciones teóricas

Atendiendo a la organización de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2002), se consideran cuatro aspectos que siempre deben estar presentes:

- Planteamiento y resolución de problemas.
- Razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración).
- Modelación matemática
- Comunicación matemática (consolidación de la manera de pensar coherente, clara, precisa).

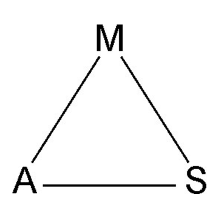
En relación con la formulación, tratamiento y resolución de problemas, se parte por compartir que ésta debe ser un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y sin sentido que no tiene en cuenta los intereses de los estudiantes.

Según los lineamientos, las situaciones problema: "… proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos." (MEN, 1998).

La formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas suscitados por una situación problema, permiten desarrollar " … una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas" (MEN, 2002).

En relación con la resolución de problemas Charnay (1988) considera que una situación de enseñanza puede ser observada a través de las relaciones que se "juegan" entre tres polos (maestro, alumno, saber), proponiendo así tres modelos de aprendizaje:

- El modelo "normativo" (centrado en el contenido).
- El modelo "incitativo" (centrado en el alumno).



- El modelo “aproximativo” (centrado en la construcción del saber por el alumno).

Por los intereses del presente escrito, a continuación se ahondará en el aproximativo, el cual se propone partir de “… de concepciones existentes en el alumno y “ponerlas a prueba” para mejorarlas, modificarlas o construir nuevas” (Charnay, 1988), buscando con ello que el alumno ensaye, busque, proponga soluciones, las confronte con las de sus compañeros, las defienda o las discuta. Mientras que el maestro –como uno de sus roles– debe centrarse en:

- Proponer y organizar una serie de situaciones con distintos obstáculos (variables didácticas dentro de estas situaciones).
- Organizar diferentes fases (investigación, formulación, validación, institucionalización).
- Organizar la comunicación de la clase, propone en el momento adecuado los elementos convencionales del saber (nota¬ciones, terminología).

Teniendo en cuenta lo anterior, puede concluirse que bajo este modelo se generan roles específicos tanto para el estudiante como para el docente. En la siguiente tabla, presentada por Camelo y Mancera (2006), se explicitan dichos roles.

Responsabilid ad del Maestro	Diseño de situaciones (tenidoen cuenta).	Conjunto de conocimientos y competencias pre-existentes en el estudiante “Conjunto” de conceptos que se relacionan con las situación Medios disponibles Contexto y/o entorno Conocimiento disciplinar
Responsabilidad del Estudiante	Asumir una actitud matemática (para lo cual debe)	Intervenir Formular Probar Construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, … Comunicar y discutir sus ideas a con otros Validar
Responsabilid ad del Maestro	Institucionalización	Nueva herramienta conceptual Ejercicios y situaciones de mecanización. Síntesis, leguaje convencional Resignificación para el estudiante.

De manera paralela autores como Guzmán (1984), al referirse a la resolución de problemas, concluyen que:

[…] lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas.

En correspondencia con el razonamiento matemático se considera de vital importancia resaltar que las actividades propuestas, tal y como se resalta en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2002), deben:

- Permitir percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.
- Ayudar a comprender (a través de modelos y materiales físicos y manipulativos) que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas.
- Propiciar el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente.

Puesto que la actividad propuesta se desarrollará en el aula de clase, es trascendental que para que ésta cobre sentido, los estudiantes comuniquen sus ideas de una forma clara y concisa.

La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos (MEN, 2002).

Así mismo, el documento de los Estándares consideran que las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas.

Por otra parte, la actividad propuesta (de pruebas sin palabras) potencia, la modelación matemática en los estudiantes, puesto que un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible, situación que es evidente en el planteamiento de las actividades de pruebas sin palabras.

Así, la modelación, según los Estándares (2002):

- Puede hacerse de formas diferentes, que simplifican la situación y seleccionan una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella. Un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido.
- Permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

Consideraciones metodológicas

La metodología que se busca implementar en la propuesta, debe posibilitar la formulación, argumentación y demostración en el aula de matemáticas. En este sentido y siguiendo al Grupo Pretexto (1996) se comienza por plantear actividades que permitan

- Buscar que los estudiantes comuniquen sus soluciones (éstas interesan, más que el resultado)
- Proponer situaciones sobre generalizaciones y patrones
- Proponer situaciones sobre el continuo numérico ligadas a la variación.
- Proponer trabajos con la igualdad como relación de equivalencia.
- Proponer actividades para la interpretación de la letra.
- Proponer actividades para la interpretación de la variable a través de tablas y gráficas.

Para ello, se tendrán en cuenta las reflexiones descritas en el apartado Consideraciones teóricas sobre el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación y la modelación.

Por otra parte y siguiendo a los Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998), la metodología busca, entre otras:

- Considerar la clase de matemáticas como una comunidad matemática en permanente interacción, en lugar de verla como una colección de individuos. (MEN, 1998).
- Enfocar la atención en procesos de razonamiento, generales o relacionados con los dominios específicos de las matemáticas, en lugar de centrar el trabajo en el conocimiento de procedimientos rutinarios. (MEN, 1998)
- Privilegiar como contexto para el hacer matemático escolar la resolución de problemas, en lugar de imaginar la matemática como un cuerpo de conocimientos y procedimientos aislados. (MEN, 1998)
- Responsabilizar al estudiante de los procesos de validación compartiendo con él la búsqueda de evidencias y justificaciones, en lugar de considerar que el profesor es el único poseedor de la verdad. (MEN, 1998)

Así la ponencia busca ser una propuesta sobre cómo generarse actividades que permitan potenciar procesos lógicos como la formulación, argumentación y demostración en el aula de matemáticas. Experimentando así, un acercamiento a las matemáticas que propenda por:

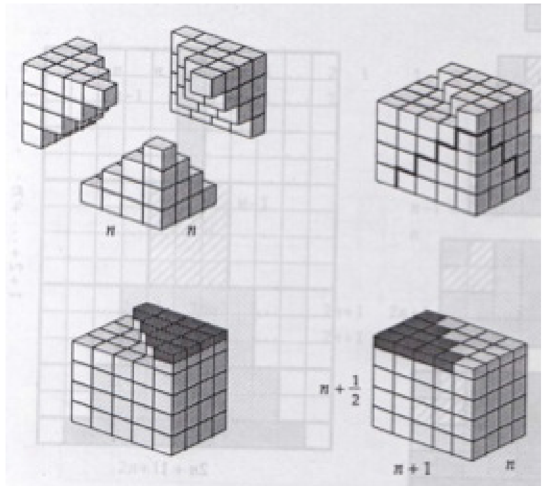
Crear situaciones problemáticas que permitan al alumno explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; estimular representaciones informales y múltiples y, al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción (MEN, 1998).

Análisis de datos

La propuesta de trabajar con actividades como las descritas en el libro pruebas sin palabras, tienen como finalidad que el estudiante pueda formular, argumentar y demostrar –a través de gráficos relacionados con una expresión matemática– conceptos matemáticos.

Así por ejemplo, a partir del siguiente dibujo el estudiante debe explicar por qué

$$1^2 + 2^2 + ¼ + n^2 = \frac{1}{3} n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$



Encontrando que una actividad como la anterior permite un trabajo en torno a:

- la generalización y patrones
- el continuo numérico ligado a la variación.
- la igualdad como relación de equivalencia.
- la interpretación de la letra.

Además y en relación con los estándares de matemáticas potencia, entre otros, estándares como:

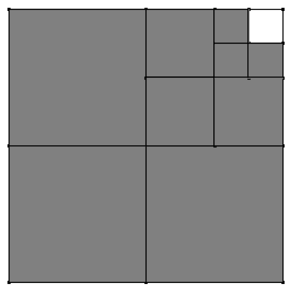
Nivel	Tipo de Pensamiento	Estándar
Octavo y noveno	Pensamiento y sistemas numéricos	• Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
	Pensamiento métrico y sistema de medidas	• Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	• Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. • Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Por otra parte, permite a los estudiantes percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones, tal y como se planteó en el razonamiento matemático. Situación que genera interacciones entre el conocimiento, el estudiante y el profesor, lo que le posibilita al estudiante:

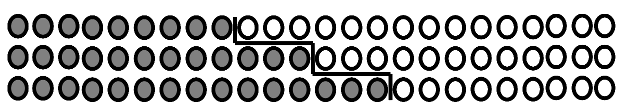
- Intervenir
- Formular
- Probar
- Construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, …
- Comunicar y discutir sus ideas a con otros
- Validar

Además, actividades como la anterior, pueden ser complementadas con situaciones como:

- En el siguiente dibujo se hace un proceso de partición hasta un tercer momento. Si el proceso de partición continua indefinidamente, argumente de manera gráfica y numérica cuál es el resultado que muestra la gráfica.



- La siguiente gráfica muestra la suma de los tres primeros términos de una sucesión específica.



- o Encuentre una igualdad que represente la suma de los *n* primeros términos en la anterior gráfica.
- o Demuestre por inducción la anterior igualdad.
- o Encuentre una expresión para la suma de un k-ésimo término a un n-ésimo término.

Actividades complementarias que permiten, entre otras:

- Estudiar propiedades de los números, pasando de lo particular a lo general (dando cuenta de los procesos). En este sentido puede hacerse un trabajo alrededor de la aritmética generalizada.
- Trabajar en clase el estudio de las afirmaciones matemáticas buscando “lo invariante”. En este sentido Mason (1996), señala que esta tarea de lograr que los alumnos reconozcan los indicadores de generalidad no es para nada obvia y sí sumamente rica.

Conclusiones

- Mediante la actividad de resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea. Siempre y cuando dichos problemas no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única, sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones. Además debe intervenir desde el comienzo del aprendizaje.

- Las actividades propuestas en el libro pruebas sin palabras atienden, desde los estándares de matemáticas, la necesidad de los estudiantes de construir los diferentes conceptos, a partir de diferentes modelos como gráficos o expresiones matemáticas.
- Por medio de las actividades de pruebas sin palabras se potencia la capacidad de modelar en los estudiantes, claro está, entendiéndose que la modelación puede hacerse de formas diferentes, donde se simplifica la situación y se selecciona una manera de representar mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos.
- Un buen modelo mental o gráfico (en este caso gráfico como los expuestos en pruebas sin palabras) permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, y ejercitar su capacidad de modelar situaciones cada vez más complejas, que dependiendo del grado en que se trabajen, potenciarán mucho más un concepto que otro.

Bibliografía

- Brousseau, G (1983). *Les obstacles epistémologiques et les problémes d'enseignement", Recherches en didactique des mathématiques* (La Pensée Sauvage), 1983, ns 4.2., pág. 170.
- Camelo, F. y Mancera, G. El sentido, una característica importante en las situaciones didácticas y en los campos conceptuales: una propuesta metodológica para el aprendizaje de las matemáticas. En Tecné, Episteme y Didaxis. 18. pp. 5-16.
- Grupo PRETEXTO (1996). La variable en matemáticas como problema puntual: búsqueda de causas en octavo grado. Informe final de investigación. Santa fé de Bogotá. D.C: Universidad Distrital Francisco José de Caldas-Colciencias.
- Mason, J. (1996). Approaches to Algebra. En: Exprssing generality and roots of algebra. Mathematics Education Library vol. 18, (pp. 65-86). Netherlands: Kluwer Academia Publisher.
- MEN (1998). Lineamientos curriculares en Matemáticas. Bogotá
- MEN (2002) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá
- R. Charnay (1988). Aprender por medio de la Resolución de Problemas.
- R. NELSEN (1993) *Proofs Without Words, Exercises in Visual Thinking*. Chapter: Geometry and algebra. Mathematical Association of America, Washington.