

Interacciones y aprendizaje en Matemáticas: análisis de una experiencia didáctica

**Marcela Cristina Falsetti
Mabel Alicia Rodríguez
Adriana Judith Aragón***

De acuerdo con el interaccionismo simbólico (Godino y Llinares, 2000) asumimos que los aspectos culturales y sociales son una parte importante del aprendizaje matemático para nuestra población de estudiantes ingresantes a la universidad. Presentamos aquí una experiencia didáctica, realizada en el marco de un proyecto de investigación, en la que pretendemos observar y registrar los comportamientos y aprendizajes de estudiantes preuniversitarios de Matemáticas con relación a cierto tipo de interacciones intencionalmente provocadas y observables. Esta experiencia fue diseñada con la intención de hacer surgir una diversidad de interacciones alrededor de la realización de un problema, a través del cual se introducen los temas: función cuadrática y modelización usando la función cuadrática.

EN EL ÁMBITO educativo institucional, gran parte del aprendizaje se realiza, en general, a través de, o mejor dicho «gracias a», interacciones entre los actores que integran dicho ámbito. Nos referiremos particularmente en este trabajo a las interacciones en la clase de Matemáticas. Si asumimos que los aspectos culturales y sociales son una parte importante del aprendizaje matemático (Godino y Llinares, 2000), el docente, en sus programaciones, debería diseñar actividades, o adecuar o seleccionar entre las ya existentes, para que surjan interacciones. Cuando hablamos de interacciones nos referimos al intercambio comunicativo, recíproco y voluntario entre actores que participan de un acto intencionado como es el de enseñar o aprender. Dicho intercambio conlleva en sí mismo la potencialidad de provocar alguna transformación (en lo intelectual o en lo actitudinal) entre los sujetos participantes. El intercambio puede ser de experiencias, interpretaciones, opiniones, conocimientos, actitudes, etc., y están focalizados en un mismo objeto (problema, concepto, acción, etc.). Las interacciones en la clase pueden ser entre: docente-alumno, docente-colectivo (clase completa), alumno-alumno (por parejas o en grupo), docente-pequeño grupo, pequeño grupo-pequeño grupo. Resulta difícil para los actores, incluso para el docente, realizar un análisis profundo de las interacciones en las cuales se encuentra involucrado para reflexionar y obtener conclusiones sobre ellas. Por esta razón, contamos con poca información sobre los alcances de los distintos tipos de interacciones en el aprendizaje matemático.

Con la intención de indagar sobre este último aspecto nos propusimos diseñar una secuencia didáctica, organizada en una clase de dos horas, para obtener información sobre qué aprenden nuestros estudiantes preuniversitarios con

* Las tres autoras son integrantes del proyecto *Las relaciones interactivas en el aula en cursos introductorios de Matemática de la UNGS*, que recibe subsidio del Ministerio de Educación de la Nación (Argentina).

relación a ciertas interacciones provocadas y observables. A modo exploratorio aplicamos esta secuencia en dos grupos de, aproximadamente, veinte alumnos cada uno. La elaboración de la secuencia se adecua a las reglas de la llamada «ingeniería didáctica» (Douady, 1995) por cuanto la misma es concebida por un grupo de investigadores-docentes con el fin de llevar a cabo un proyecto de aprendizaje por interacciones que son reguladas por las intervenciones del profesor.

Elaboración de una secuencia didáctica para analizar interacciones

Criterios de elaboración

La secuencia presentada es para introducir los temas «función cuadrática» y «modelización por función cuadrática». Los alumnos tienen, al iniciar esta actividad, práctica en el trabajo en forma grupal y colectiva, resolviendo problemas. Acaban de estudiar los temas «funciones» y «función lineal» bajo el contexto de modelización. Los criterios usados para diseñar la secuencia son los siguientes:

- Proponer una tarea compleja que demande habilidades múltiples en un lapso de tiempo acotado.
- Dar lugar a interacciones: entre alumnos en un grupo, entre grupos, entre el profesor y cada grupo, entre el profesor y el colectivo (la clase completa).
- Dar ciertas indicaciones al docente sobre sus intervenciones durante la tarea asignada.
- Dar lugar al cambio productivo de opinión, a la reflexión sobre la tarea designada, a la confrontación ya sea entre grupos, entre el profesor y cada grupo, o entre el profesor y el colectivo.
- Que los cambios conceptuales que se den en cada alumno estén sustentados en mecanismos de validación que no dependan del profesor.
- Indicar al observador qué variables y acciones tiene que observar.
- Proponer, para la tarea asignada, algunos indicadores de aprendizaje a observar.

Estos criterios persiguen, por un lado, dar sentido al trabajo grupal y crear la condición de interdependencia y responsabilidad individual imprescindibles para el trabajo en pequeños grupos; por otro lado, se quiere garantizar que aparezcan los dos aspectos funcionales más importantes del trabajo en equipo que son: los aprendizajes que cada miembro del equipo logra individualmente y la producción grupal donde todos deben responder por un producto que represente a las producciones individuales (Shulman y otros, 1999).

Descripción de la secuencia

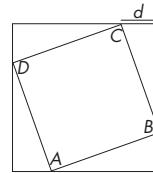
Proponemos trabajar sobre un problema en grupos formados espontáneamente. Debe haber un número par de

grupos y con cinco integrantes a lo sumo en cada uno de ellos.

En el momento de realizar la actividad se había ya enseñado y trabajado sobre Álgebra y Geometría elemental (campos numéricos, expresiones algebraicas, ecuaciones, construcciones geométricas, lugares geométricos, teorema de Thales, semejanza, teoremas de Pitágoras, trigonometría); sobre el concepto de función y su utilidad en la modelización; sobre funciones lineales y problemas modelizables a través de la función lineal (Almeida y otros, 2001; Falsetti y otros, 2001).

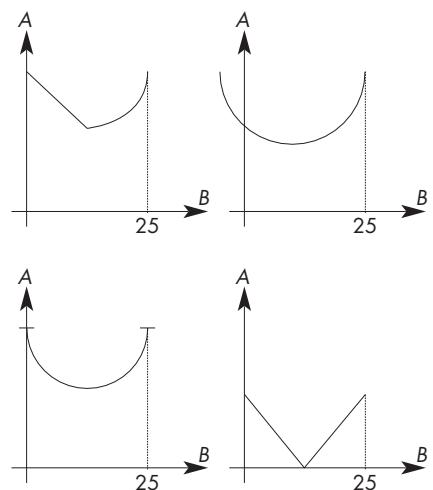
Problema

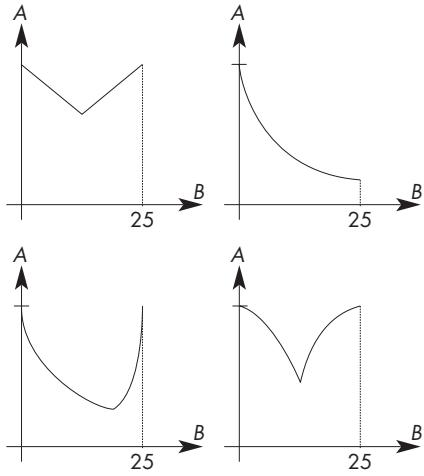
Se tiene un cuadrado de 25 cm de lado y se considera el cuadrado $ABCD$ cuyos vértices están a una misma distancia d de los vértices del cuadrado original como indica la figura:



...se quiere garantizar que aparezcan los dos aspectos funcionales más importantes del trabajo en equipo que son: los aprendizajes que cada miembro del equipo logra individualmente y la producción grupal donde todos deben responder por un producto que represente a las producciones individuales...

- Construir otros cuadrados inscritos de forma análoga al $ABCD$ para otros valores de d . Describir el comportamiento de las áreas de los cuadrados.
- ¿Cuál de los siguientes gráficos puede corresponder a la representación del área del cuadrado que se forma en función de la distancia d ?





Las consignas para dirigir la actividad en clase son:

1. Resolver en grupo la parte a) del problema dado.
2. Cada grupo deberá escribir en la pizarra la resolución. Una vez que todos hayan escrito su respuesta cada grupo deberá explicarla.
3. Resolver en grupo la parte b) del mismo problema. Explicitar, por escrito, las razones por las cuales cada uno de los gráficos ha sido elegido o descartado.
4. Entregar la producción al profesor.
5. Cada grupo recibirá del docente la producción de otro grupo, la cual deberá corregir indicando si está bien o no y explicando, al otro grupo, las razones por escrito.
6. Devolver a cada grupo su producción.
7. Analizar las correcciones hechas en la producción propia por el otro grupo, ¿harían algún cambio?

Todos los puntos deben estar desarrollados por escrito para entregarlos. Cada grupo debe entregar un único ejemplar al docente.

Cuadro 1

Analizaremos las instancias 1, 2, 3, 5, 7 con respecto a interacciones.

1. Trabajo en cada grupo

i) ¿Qué hace el profesor mientras los estudiantes comienzan a desarrollar la tarea?

Pueden probar con dos valores únicamente e inferir un mismo tipo de crecimiento para todo el dominio.

Pueden modelizar usando el teorema de Pitágoras y dar la expresión del área en función de d.

El docente rotará por los grupos observando qué hacen los alumnos y, de ser necesario, los ayudará sin decir cómo se hace el problema.

ii) ¿Qué hace el observador?

Pasando por los grupos, el observador toma registro escrito y puede grabar. Proponemos que el observador al registrar tenga en cuenta los siguientes puntos:

- Qué conocimientos ya adquiridos ponen de manifiesto y cómo lo hacen.
- Dinámica grupal: cómo intervienen cada uno de los participantes, cuáles son los comentarios, qué decisiones se toman, etc.
- Qué escriben en el cuaderno, quiénes escriben, cómo traducen al lenguaje escrito lo que intercambian oralmente.
- El tipo de justificaciones (se pueden basar en: atributos del dibujo, propiedades deducidas a partir del dibujo como figura de análisis, explicación ligada al proceso operacional de producción de la solución, propiedades en general, etc.).

iii) Algunas formas de acción previstas para resolver la tarea

En relación con la matemática:

- Pueden probar con dos valores únicamente e inferir un mismo tipo de crecimiento para todo el dominio.
- Pueden probar con algunos valores e inferir el crecimiento y el decrecimiento.
- Pueden modelizar usando el teorema de Pitágoras y dar la expresión del área en función de d.

En relación con la dinámica grupal:

- Interactuar con otro sujeto de modo que sirva a cada alumno para entender el problema, sistematizar sus conocimientos, seleccionar las estrategias, reflexionar, relacionar, etc.

iv) ¿Cuáles son los posibles indicadores de la evolución en el aprendizaje?

- El alumno (que probó con valores de manera que concluyó un determinado sentido de la desigualdad), *empieza a concebir* la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas y, el tipo de dependencia.
- El alumno (que hasta el momento en el curso sólo estudió, con detalle matemático, las funciones lineales), comienza a concebir que un fenómeno pueda tener intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- El alumno es capaz de exponer con algún soporte (puede ser el gráfico) las diferencias respecto a los modelos estudiados anteriormente, más precisamente la «no proporcionalidad» en el proceso.

2. Cada grupo expone

i) ¿Qué hace el docente?

- Modera el intercambio.
- Propone, en caso de ser necesario, que sean dos o más compañeros de un mismo grupo los que expongan para todos lo realizado en el seno de su grupo.
- En caso de ser necesario, hace preguntas que crea que posibilitarían una mayor comprensión, sin pronunciarse al respecto ni hacer valoraciones.

ii) ¿Qué hace el observador?

Presta atención a:

- Qué y cómo comunica de manera escrita cada grupo su producción.
- Qué y cómo comunica de manera oral cada grupo su producción.
- La *exposición* del grupo observado en la instancia de producción grupal, *comparándola* con lo observado en el interior del mismo (como por ejemplo, qué es lo que ellos seleccionan para comunicar).
- La presencia o falta de justificaciones y a su tipología (como por ejemplo, si fueron lo suficientemente explícitos para los demás compañeros).
- Al tipo de comportamiento de los alumnos que no pertenecen al grupo que expone:
 - si escuchan;
 - si lo toman en cuenta;
 - si consideran lo que dice el otro como un *pensamiento/razonamiento consistente y fundado* que los podría hacer cambiar de opinión.
- Cómo juega la valoración de las personas en el momento de escuchar la exposición.
- En qué medida consideran relevante lo hecho por sus compañeros en comparación con lo del docente.

iii) Algunas formas de acción previstas.

- Cada grupo escribe en la pizarra su producción y la explicará. Dentro de las posibles explicaciones unas serán de carácter más procesual y otras de carácter más general.
- Prever su postura ante el problema, pudiendo cambiarla o seguir sosteniendo la misma.

iv) ¿Cuáles son los posibles indicadores de la evolución en el aprendizaje?

- Cambio de opinión.
- Uso de expresiones y notación matemática.
- Mayor nivel de formulación de ciertas preguntas.
- Mayor nivel de justificación de la resolución.

3. Se resuelve en grupo la parte b) del problema

En esta instancia sugerimos las mismas indicaciones que en la instancia 1 para el docente y el observador.

i) Algunas formas de acción previstas.

- «Fuerzan» la situación tratando de aplicar algún modelo que involucre la función lineal que es lo que ellos conocen mejor.
- No tienen en cuenta el rango de las variables involucradas.
- Hacen su propio gráfico de acuerdo a lo obtenido en el punto a) a través de puntos y después ven cuál de los gráficos es el que más se parece a lo que ellos realizaron.
- Explican qué representaría cada gráfico sin relacionarlo con la parte a).

ii) ¿Cuáles son los posibles indicadores de la «evolución en el aprendizaje»?

- El descarte del gráfico que involucra funciones lineales.
- El poder pasar de un tipo de gráfico de situación (como el de los cuadrados) a una representación simbólica intermedia, explícita o no, para obtener información que luego vuelven en un tipo de representación gráfica de tipo matemático-analítico (por ejemplo, interpretar en un gráfico matemático la simetría de los tamaños de los cuadrados a medida que varía la distancia a uno de los vértices).

• Mayor nivel de justificación.

• Coherencia con la resolución de la parte a).

5. Corrección cruzada entre grupos

i) ¿Qué hace el docente?

Supervisa que la corrección sea completa, esté explicada y lo suficientemente justificada.

ii) ¿Qué hace el observador?

- Detecta si hay un cambio de actitud en el grupo que pasó a tener el rol de «evaluador» (si son muy exigentes o no, con qué compromiso realizan

<p>la tarea que servirá para utilizar a otro grupo de compañeros, etc.).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Detecta cómo juega la valoración de las personas en el momento de la corrección (puede ser que los integrantes de un grupo consideren que los integrantes del grupo asignado son flojos y entonces esta valoración sea suficiente para no intentar leer en detalle lo escrito por sus compañeros). <p>iii) Algunas acciones previstas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los alumnos discuten las respuestas de sus compañeros de acuerdo con lo resuelto por ellos y no con lo que sus compañeros escribieron. • No saben cómo corregir. • Dicen que están de acuerdo o no sin dar ninguna valoración de lo que están revisando. • Evitan pronunciarse al respecto. <p>iv) ¿Cuáles son los posibles indicadores de la evolución en el aprendizaje?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mayor nivel de justificación de lo corregido. • Cambio de opinión. • Reconocimiento de aportes del modo de resolución del otro grupo. • Uso de lenguaje y notación adecuados. <p><i>7. Análisis de correcciones hechas por otro grupo</i></p> <p>i) ¿Qué hace el docente?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Controla que todos los grupos reciban su devolución. • Es mediador, en caso de ser necesario, entre los «correctores» y los «corregidos». • Ayuda a los alumnos que reciben las correcciones para que las entiendan. <p>ii) ¿Qué hace el observador?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Detecta si hay buena recepción de los trabajos corregidos por los compañeros. • Registra los cambios de ideas y nociónes a partir de esas correcciones. 	<p><i>Controla que todos los grupos reciban su devolución.</i></p> <p><i>Es mediador, en caso de ser necesario, entre los «correctores» y los «corregidos».</i></p> <p><i>Ayuda a los alumnos que reciben las correcciones para que las entiendan.</i></p>	<p>iii) Algunos resultados previstos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los alumnos no entienden las correcciones hechas. • Se provocan discusiones por no querer aceptar correcciones por parte de sus compañeros y solicitan mayor fundamentación o bien dan una mejor explicación, como por ejemplo: «aquí nosotros quisimos escribir tal o cual cosa...». • Reconocen los errores. <p>iv) Indicadores de evolución en el aprendizaje</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de errores. • Entendimiento de correcciones bien hechas. • Mejor justificación de lo realizado. • Análisis crítico de la propia producción. • Reelaboración de la forma incorrecta en función de lo corregido.
---	--	---

Breve descripción de lo sucedido durante el desarrollo de la experiencia

Presentación del primer grupo

El primer grupo en donde se aplica la experiencia era muy heterogéneo, con mayoría de aspirantes a ingresar a la universidad entre los veinticinco a cuarenta años de edad, con experiencia escolar largamente interrumpida. Además, salvo pocas excepciones, en cuanto a habilidades y competencias matemáticas, la clase era de «alumnos flojos». El profesor solía en este curso explicar detalladamente y asistir a cada uno de los estudiantes, o a cada grupo que se formaba espontáneamente, corrigiendo los errores y explicando nuevamente, en forma personalizada y de otras maneras, en caso de notar que no hubo entendimiento. Frente a las distintas tareas asignadas en clase, los estudiantes tenían un tiempo acotado para pensar cómo la desarrollarían y para trazar una estrategia de desarrollo. Pasado este tiempo, el profesor, mediante una exposición dialogada y participativa con la clase completa, recopilaba lo hecho y desarrollaba el tema en forma teórico-práctica. Este curso contaba con poca experiencia de trabajo en pequeños grupos con una actividad especialmente diseñada para ello.

Descripción del desarrollo de la secuencia

En el momento de la experiencia, el profesor les presentó la modalidad de trabajo y frente a la consigna del cuadro 1, los estudiantes se agruparon respetando la disposición en la que estaban ubicados, que responde a afinidades personales. Se organizaron seis grupos con una cantidad de integrantes de entre 3 a 5 personas. En todos ellos hubo

initialmente una lectura silenciosa e individual del ejercicio propuesto. En algunos grupos, en los cuales no hubo un intento conjunto de entender el enunciado, llamaron directamente al profesor quien les explicó y dio pautas de acción. Surgió como obstáculo no previsto la dificultad por entender qué significa estar «inscrito». En general, salvo en uno de los grupos, se planteó un trabajo colaborativo, es decir todos abordaron la misma tarea; en el restante, en cambio, decidieron trabajar individualmente para comparar después. En todos estos grupos, salvo uno, la figura del líder no apareció claramente; sí es notorio que en todos ellos uno o dos integrantes tomaron la responsabilidad de hacer los cálculos, los dibujos del análisis, mientras el resto pensaba, obtenía conclusiones, dilucidaba y anticipaba sobre lo producido por esa persona y registraba en sus cuadernos cuando creía estar seguro de que se habían realizado bien las cosas. En el grupo restante, formado por cinco personas, una mujer parecía tener la voz cantante pero en realidad esbozaba ideas en voz alta para que otro compañero, más tímido pero más «matemático», le corrigiera y así juntos iban diseñando una estrategia de acción mientras el resto esperaba el acuerdo entre estos dos para comenzar a actuar. En algunas ocasiones el profesor, que supervisaba los grupos, intervino ayudando y contestando más de lo que el grupo solicitaba o haciendo notar que el camino tomado no era el correcto.

Respecto a poner en juego conocimientos ya adquiridos, en todos los grupos se comenzó a concebir la variabilidad de la magnitud d . Es notorio lo sucedido en dos de los grupos en donde establecieron una hipótesis anticipatoria, o presupuesto, que pretendían corroborar con sus cálculos. En uno de ellos, bajo una visión analítica, se aprestaron a dar valores a la distancia d presuponiendo de antemano que para diferentes valores obtendrían el mismo lado del cuadrado menor y, por lo tanto, el área sería constante. En el otro, bajo una visión geométrica, supusieron que el cuadrado inscrito es el rotado de uno fijo (algunos dijeron que era el rotado del cuadrado mayor) y concluían directamente que el área era constante. Para estos grupos fue costoso reconocer el tipo de dependencia entre las variables. El resto de los grupos reconoció rápidamente que había crecimiento y decrecimiento de los valores del área de acuerdo a la posición del inscrito y la *simetría* fue identificada porque «se vuelven a alcanzar los mismos valores del área una vez que el vértice del cuadrado inscrito se corrió de la mitad del cuadrado original». Enseguida pasaron a los gráficos de la parte b) del ejercicio e indicaron que los que podían corresponder estaban entre los gráficos 1, 4, 7 y 8.

Al finalizar el tiempo asignado, todos los integrantes de los grupos manifestaban los siguientes indicadores de aprendizajes *umbrales*: concibieron la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas; concibieron un tipo de comportamiento combinado en cuanto al crecimiento; descubrieron que en un cierto rango de variabilidad de d

Al finalizar el tiempo asignado, todos los integrantes de los grupos manifestaban los siguientes indicadores de aprendizajes umbrales: concibieron la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas; concibieron un tipo de comportamiento combinado en cuanto al crecimiento...

los valores del área crecen o decrecen. Sin embargo, no todos fueron capaces de establecer el tipo de dependencia entre las variables ni de exponer justificadamente lo realizado. De los seis grupos, destacamos sólo dos cuyos indicadores de aprendizaje fueron más elevados por cuanto justificaron mejor y establecieron claramente las diferencias con el modelo lineal conocido. Cabe destacar que sólo uno de esos dos grupos realizó la modelización usando el teorema de Pitágoras.

La exposición de los grupos se realizó en forma ordenada. Durante la misma los demás estudiantes permanecían callados sin manifestar si entendían o no lo que los compañeros estaban explicando. El profesor debería haber fomentado mayor intercambio en ese momento. Después de la exposición de cada grupo, la clase identificó como forma más adecuada aquélla donde se usó el teorema de Pitágoras para modelizar la variabilidad; sin embargo, no pudieron inferir un comportamiento global de la dependencia a través de esta fórmula, ya que al realizar la parte b) del ejercicio, cometieron errores. En principio no hubo inconvenientes en descartar aquellos gráficos que no mostraban simetría, sin embargo, en su mayoría, no supieron descartar los modelos que involucraban la función lineal y los pocos que lo hicieron no lo hicieron justificadamente.

En cuanto a la dinámica grupal de las instancias siguientes, hubo más inconvenientes en los momentos de realizar la corrección y de recibir la corrección. Es decir, que hubo dificultades en presentar un *producto grupal* (la exposición y defensa de lo realizado por el equipo a la clase, la presentación de una selección justificada de gráficos para ser corregido, la corrección de la producción de otro grupo). Cabe aclarar que era la primera vez en la que se les solicitaba y evaluaba una producción grupal. Consideramos que, según los indicadores formulados, en el punto 7 no hubo el aprendizaje esperado pues las correcciones realizadas por los grupos no eran claras ni justificadas.

Presentación del segundo grupo

Este curso contaba, en el momento de observar la experiencia, con práctica en el desarrollo de actividades grupales. En estas actividades, los estudiantes trataban de resolver la tarea propuesta en grupos mientras el profesor asistía y guiaba la tarea de cada grupo. Luego, mediante una exposición dialogada y participativa con la clase completa, desarrollaba una puesta en común, con los distintos razonamientos proporcionados por los diferentes grupos. En el momento de la experiencia, el profesor les presentó la modalidad de trabajo y frente a la consigna del cuadro 1, los estudiantes se agruparon respetando la disposición en la que estaban ubicados que respondía a afinidades personales. Se formaron así 14 grupos con entre 5 a 8 integrantes.

En este caso, contamos con una observación localizada, de un equipo en particular que fue elegido al azar. El mismo contaba con 7 integrantes. Tres de los cuales tenían entre 19 y 25 años aproximadamente, los otros cuatro entre 25 y 55 años aproximadamente. En un principio, cada integrante leyó silenciosa e individualmente el ejercicio propuesto. Algunos escribieron solos en sus cuadernos, otros se quedaron observando lo que hacía el compañero; nadie pedía explicación. Cabe destacar que en este grupo tres participantes pensaban seguir la mención de administración y, casualmente, estaban sentados alineados los tres juntos. Ellos fueron los primeros del grupo en obtener alguna conclusión. En un principio se comunicaban entre sí, sin compartir sus razonamientos a los demás. El resto de los integrantes trabajaba solo o no trabajaba. Al poco tiempo, uno de los participantes que no trabajaba, se anima a preguntarle al resto, sobre el enunciado del problema, aduciendo no entender el enunciado «No entiendo... ¿qué hay que hacer?». Ahí, el subgrupo de tres personas que se había formado, trata de explicarle, con sus palabras lo que habían entendido. Destacamos como dificultad no prevista, el entendimiento del enunciado del problema propuesto. También surgió aquí como obstáculo la dificultad por

De los catorce grupos, destacamos sólo uno cuyos indicadores de aprendizaje fueron más elevados por cuanto justificaron mejor y establecieron claramente las diferencias con el modelo lineal conocido. Cabe destacar que sólo éste realizó la modelización usando el teorema de Pitágoras.

entender qué significa estar «inscrito», y la movilidad de la figura de análisis a través de la variabilidad de d . Una vez que ellos lograban con sus palabras comunicarse y entenderse, avanzaban en cuanto al análisis del problema. En este grupo, enseguida se manifestó este subgrupo de tres personas que llevaban la «voz cantante», estos integrantes si bien comunicaban sus conclusiones al resto, sólo integraban al resto de los participantes en el caso de que alguno de ellos lo requiriera expresamente pidiendo ayuda.

Así, fueron obteniendo conclusiones como la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas; concibieron un tipo de comportamiento combinado en cuanto al crecimiento, descubrieron que en un cierto rango de variabilidad de d los valores del área crecen o decrecen, se dieron cuenta de la simetría del problema. Esto lo consiguieron proponiendo distintos valores de d .

Los integrantes de este grupo manifestaban los siguientes indicadores de aprendizajes *umbrales*: concibieron la variabilidad de las magnitudes, la dependencia entre ellas; concibieron un tipo de comportamiento combinado en cuanto al crecimiento, descubrieron que en un cierto rango de variabilidad de d los valores del área crecen o decrecen. Sin embargo, no fueron capaces de establecer el tipo de dependencia entre las variables ni exponer justificadamente lo realizado. De los catorce grupos, destacamos sólo uno cuyos indicadores de aprendizaje fueron más elevados por cuanto justificaron mejor y establecieron claramente las diferencias con el modelo lineal conocido. Cabe destacar que sólo éste realizó la modelización usando el teorema de Pitágoras.

La exposición de los grupos se realizó en forma medianamente ordenada. Durante la misma, algunos estudiantes hacían comentarios entre ellos de las soluciones que aparecían en la pizarra, otros permanecían callados sin manifestar si entendían o no lo que los compañeros estaban explicando.

Aunque muchas de las conclusiones explicitadas eran carentes de formalización en lenguaje matemático, hubo buen intercambio en esta instancia. En esta clase, mientras algunos grupos exponían, hubo intervención del resto para entender la exposición.

Después de la exposición de cada grupo, la clase identificó como forma más adecuada aquélla donde se usó el teorema de Pitágoras para modelizar la variabilidad. Todos los grupos prestaron especial atención a la construcción de la fórmula, anotaban en sus cuadernos y se explicaban entre ellos.

Al realizar la parte b) del ejercicio indicaron que los que podían corresponder estaban entre los gráficos 1, 4, 7 y 8. En principio no hubo inconvenientes en descartar aquellos gráficos que no mostraban simetría, sin embargo, les costó descartar los modelos que involucraban la función lineal y aquéllos que lo descartaron no lo hicieron justificadamente.

En este curso, debido a la cantidad de alumnos, no se pudo avanzar más en el desarrollo de la propuesta.

Conclusiones

Las interacciones pueden servir para relacionar los significados nuevos con los que ya se tienen para ir, de este modo, construyendo un concepto matemático. El conocimiento matemático responde a ciertas reglas rigurosas de estructuración; en la sociabilización de este tipo de conocimiento mediante las interacciones se exige hacer explícitas esas reglas en forma clara para que pueda haber comunicación y, por lo tanto, no pueda eludirse el conocimiento de las mismas.

En el seno del grupo las interacciones son espontáneas, la comunicación se realiza a través de un lenguaje más informal y los integrantes parecen entenderse mediante expresiones poco precisas. En cambio, cuando deben presentar una producción grupal y responder por ella (momentos 5, 6 y 7) les resulta más complicado, pues la negociación de significados (Godino y Llinares, 2000) se produce a un nivel superior, de ahí la dificultad con la que se encuentran los alumnos y que no pudieron superar.

Esta experiencia nos alerta, además, sobre la importancia de dar lugar a diversos tipos de interacciones y aprendizajes sociales para llegar a una forma acabada de aprendizaje matemático. Si en lugar de realizar las indicaciones 3, 4, 5, 6 y 7 del recuadro 1 para realizar la parte b) del ejercicio propuesto, hubiese sido simplemente «indicar con una cruz el o los gráficos que pueden corresponder a la representación del área del cuadrado» las observaciones muestran que es altamente probable que muchos grupos habrían respondido correctamente con una cruz debajo de la figura 7. Sin embargo, aun cuando la respuesta hubiera sido correcta, y pudiera considerarse que entonces hubo entendimiento y algún aprendizaje, de esta forma no habrían surgido las contradicciones en los significados y errores matemáticos que conviven en los estudiantes como las que mostramos en los documentos del anexo.

En relación a esto hemos visto que esta experiencia logró «complejizar» un contenido matemático desde una perspectiva personal y social para enriquecerlo y llegar a él de una forma más consciente y, por lo tanto, más reflexiva revalorizando los recursos de validación.

Bibliografía

ALMEIDA, M., A. ARAGÓN, M. FALSETTI, A. FORMICA, L. KULESZ, M. MARTÍNEZ y M. RODRÍGUEZ (2001): *Guía de Matemática para el Curso de Aprendamiento Universitario. Módulo I: Álgebra y Geometría*, Serie Material Didáctico 6.1, UNGS.

DOUADY, R. (1995): «La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento», en *Ingeniería Didáctica en*

Educación Matemática, Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, 61-97.

FALSETTI, M., A. FIGLIOLA, L. KULESZ y M. RODRÍGUEZ (2001): *Guía de Matemática para el Curso de Aprendamiento Universitario. Módulo II: Modelización*, Serie Material Didáctico 6.2, UNGS.

GODINO, J. y S. LLINARES (2000): «El interaccionismo simbólico en Educación Matemática», *Educación Matemática*, vol. 12(1), n.º 12(1), 70-92.

SHULMAN, J., R. LOTAN y J. WHITCOMB (comp.) (1999): *El trabajo en grupo y la diversidad en el aula*, Amorrortu, Buenos Aires.

Anexo

El gráfico nº 1 no puede ser porque estás hablando del área de un cuadrado que está dentro de otro cuadrado y la alejando del vértice muy bruscamente, pero es una función lineal.
También puede ser porque: estás hablando del área de un cuadrado que es L² por lo tanto es una función cuadrática, pero gráficamente es una parábola.

El gráfico nº 2 no, porque no demuestra que a la medida del cuadrado, incluye a aumentar el área del mismo.

El gráfico nº 3 no, porque aumenta el gráfico a más de la mitad y no es lo que representa en lo que graficamos.

El gráfico nº 4 no, porque es parecida al gráfico nº 1 pero con la diferencia que este no es lineal.

El gráfico nº 5 no, porque es una mezcla de función lineal con cuadrática.

El gráfico nº 6 no, porque no existe un área negativa.

El gráfico nº 7 si, porque representa el área del cuadrado cuya gráfica es una parábola y representa el gráfico. Cuando va creciendo suyendo y aumentando el área según nos alejamos del vértice.

El gráfico nº 8 no, porque disminuye muy bruscamente y es como si en el medio desapareciese el gráfico y comienza de cero o aumente.

Corrección de otro grupo

(1) Con razón porque el gráfico no presenta el área del cuadrado.

(2) El área de escalar.

(3) " "

(4) No coincide porque, en vez que sea la misma y tienen puntos de.

(5) Estos son el escalar.

(6) Si, porque figura a los de trazar el área dentro del cuadro.

(7) Es la otra de escalar.

(8) no atiende la justificación.