42

febrero 2003, pp. 97-99

El Cálculo diferencial y el problema isoperimétrico

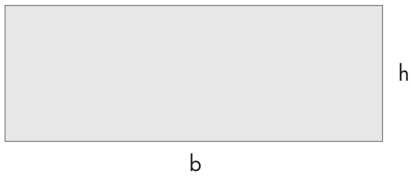
Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

HEMOS DEJADO PARA EL FINAL aquella resolución por la que comienza la mayoría del profesorado de Matemáticas: la basada en el uso del Cálculo Diferencial. Siempre que hemos propuesto el problema que planteábamos en la primera entrega en algún curso o seminario, la forma de abordarlo ha sido echando mano de las derivadas para la búsqueda de extremos de determinada función área. Como se habla de enmarcar un cuadro de 3 m de perímetro, siempre han comenzado pensando en formas rectangulares, por lo que el problema que se planteaban solía ser el siguiente:

> Entre todos los rectángulos de igual perímetro *P*, el cuadrado de lado *P*/4 es el que encierra la mayor área.

Y la forma de abordar la solución era, más o menos, como sigue.



Si denominamos b y h a las dimensiones del rectángulo, puesto que el perímetro es P, será $P = 2b + 2h$. Su área en función de b será:

$$b\left(\frac{P-2b}{2}\right) = P\frac{b}{2} - b^2$$

Consideramos entonces la función real de variable real:

$$A(b) = P\frac{b}{2} - b^2 \qquad b \in [0, P/2]$$

Puesto que $A'(b) = P/2 - 2b$, $A'(b) = 0$ si y sólo si $b = P/4$. Además $A''(P/4) < 0$, luego para $b = P/4$, la función tiene un máximo local.

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

De hecho es un máximo global de la función $A(b)$, ya que éste o se alcanza en los extremos del intervalo o en su interior, pero en los extremos hay valores mínimos:

$$A(0) = 0; \qquad A\left(\frac{P}{2}\right) = 0; \qquad A\left(\frac{P}{3}\right) = \frac{P^2}{18}$$

Si $b = P/4$, entonces $h = P/4$; es decir, el rectángulo de mayor área, entre los de un mismo perímetro P, es el cuadrado de lado $P/4$.

Bien, ya hay una solución. Rápidamente se piensa en que es el círculo de longitud P el que mayor área encierra. Sin embargo, la prueba correspondiente al crecimiento del área para polígonos regulares a medida que aumenta el número de lados no es inmediata. Esta será nuestra, por ahora, última resolución parcial del problema y despediremos al actual equipo director de SUMA haciendo las reflexiones finales y, tal y como anunciamos en su día, planteando el enunciado actual sobre el que se sigue buscando solución.

Comencemos por el caso más sencillo: el polígono regular de menor número de lados.

> Entre todos los triángulos de igual perímetro P, el triángulo equilátero de lado $P/3$ es el que encierra mayor área.

Recordando la fórmula de Herón, el área de un triángulo de lados a, b y c es:

$$\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right)}$$

donde P es el perímetro de dicho triángulo.

Como $c < a + b = P - c$, entonces $2c < P$ y por tanto $c < P/2$. Análogamente podemos ver que $b < P/2$ y que $a < P/2$.

Para resolver el problema planteado, deberíamos encontrar el máximo de la función:

$$g_1(a,b,c) = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right)}$$
$$\text{con } (a,b,c) \in \left[0, \frac{P}{2}\right] \times \left[0, \frac{P}{2}\right] \times \left[0, \frac{P}{2}\right]$$

con la ligadura $P = a + b + c$. Observamos que maximizar g_1 es equivalente a maximizar:

$$g_2(a,b,c) = \frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right)$$

Calcularemos entonces los extremos de la función:

$$g_1(a,b,c) = \frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right)$$
$$\text{con } (a,b,c) \in \left[0, \frac{P}{2}\right] \times \left[0, \frac{P}{2}\right] \times \left[0, \frac{P}{2}\right]$$

con la ligadura $P = a + b + c$.

Introduciendo la ligadura en la función a optimizar, puesto que $a = P - b - c$, se tratará de calcular el máximo de la función de dos variables:

$$g(b,c) = \frac{P}{2}\left(-\frac{P}{2} + b + c\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right)$$
$$\text{con } (b,c) \in \left[0, \frac{P}{2}\right] \times \left[0, \frac{P}{2}\right]$$

La existencia del valor máximo de la función g está asegurada por el teorema de Weierstrass ya que g es una función continua en un conjunto compacto del plano.

Analizaremos los puntos críticos interiores del dominio de la función y posteriormente los de la frontera.

Empezamos pues, buscando los puntos críticos de la función g en $(0,P/2) \times (0,P/2)$. Como:

$$\frac{\partial g}{\partial b}(b,c) = \frac{P(2b + c - P)(2c - P)}{4}$$
$$\frac{\partial g}{\partial c}(b,c) = \frac{P(b + 2c - P)(2b - P)}{4}$$

y en consecuencia el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial b}(b.c) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial c}(b.c) = 0 \end{cases}$$

tiene como únicas soluciones los pares $(0, P/2)$, $(P/3, P/3)$, $(P/2, 0)$ ó $(P/2, P/2)$.

En consecuencia el único punto crítico de la función g en $(0, P/2) \times (0, P/2)$ es $(P/3, P/3)$.

La frontera de $(b, c) \in [0, P/2] \times [0, P/2]$ está formada por los cuatro segmentos: $b = 0$ con $0 \le c \le P/2$, $b = P/2$ con $0 \le c \le P/2$, $c = 0$ con $0 \le b \le P/2$, $c = P/2$ con $0 \le b \le P/2$.

Así el estudio de los puntos donde las funciones reales de una variable real siguientes alcanzan sus extremos:

$$t_1(c) = g(0,c) = -\frac{P^2}{4}\left(\frac{P}{2} - c\right)^2 \qquad \text{si } 0 \le c \le P/2$$
$$t_2(c) = g\left(\frac{P}{2}, 0\right) = 0 \qquad \text{si } 0 \le c \le P/2$$
$$t_3(b) = g(b,0) = -\frac{P^2}{4}\left(\frac{P}{2} - b\right)^2 \qquad \text{si } 0 \le b \le P/2$$
$$t_4(b) = g\left(b, \frac{P}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } 0 \le b \le P/2$$

nos llevará considerar los puntos $(0, 0)$, $(0, P/2)$, $(P/2, 0)$ y $(P/2, P/2)$. teniendo en cuenta que:

$$g(0,0) = -\frac{P^4}{16}; \qquad g\left(0, \frac{P}{2}\right) = 0; \qquad g\left(\frac{P}{2}, 0\right) = 0$$
$$g\left(\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right) = 0; \qquad g\left(\frac{P}{3}, \frac{P}{3}\right) = \frac{P^4}{432}$$

el máximo absoluto de la función g será:

$$\frac{P^4}{432}$$

obtenido para $b = P/3$ y $c = P/3$. En consecuencia será $a = P - P/3 - P/3 = P/3$.

Por tanto el triángulo de perímetro P de área máxima será el triángulo equilátero de lados $P/3$.

> ¿Qué relación existe entre las áreas de dos polígonos regulares con distintos lados e igual perímetro P?

Según vimos en el número 37 de SUMA, el área de un polígono regular de n lados y perímetro P es:

$$\frac{P^2}{4n\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

Consideramos la función real de variable real:

$$g(x) = \frac{P^2}{4x\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{x}} \qquad \text{con } x \in [3,\infty)$$

que es continua y derivable. Veamos que la función g es creciente en $[3, \infty)$. Para ello comprobaremos que $g'(x) > 0$ si $x \in [3,\infty)$:

$$g'(x) = -\frac{P^2\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}}{4x^2} + \frac{P^2\pi\cdot \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{x}}{4x^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x\cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{x} + \pi\cdot \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x\cdot\cos\frac{\pi}{x}\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} + \pi = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{x}\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} = \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} = \frac{2\pi}{x}$$

Veamos ahora que no existe $x \in [3, \infty)$ que satisfaga la última ecuación. Para ello consideramos la función:

$$n(x) = \frac{2\pi}{x} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} \qquad \text{para } x \in [3,\infty)$$

Derivando tenemos:

$$n'(x) = -\frac{2\pi}{x^2} + \frac{2\pi\cdot\cos\frac{2\pi}{x}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 + \cos\frac{2\pi}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{x} = 2\pi m \qquad \text{con } m \text{ entero}$$

es decir si $x = 1/m$, siendo m un entero no nulo. Como esto no puede ocurrir, tenemos que $n'(x) \neq 0$ para $x \in [3, \infty)$. Puesto que n es continua y derivable en $[3, \infty)$ n será decreciente o creciente.

Como:

$$\lim_{x\to 3} n(x) = \frac{1}{6}(-3\sqrt{3} + 4\pi) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} n(x) = 0$$

la función n será decreciente en $[3, \infty)$ y además:

$$n(x) = \frac{2\pi}{x} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} > 0 \qquad \text{para } x \in [3,\infty)$$

En consecuencia $g'(x) \neq 0$ para $x \in [3, \infty)$, y por tanto la función continua y derivable g será creciente o decreciente en $[3, \infty)$.

Como:

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \frac{P^2}{12\sqrt{3}}, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{P^2}{4\pi}$$

y

$$\frac{P^2}{12\sqrt{3}} < \frac{P^2}{4\pi}$$

la función g será creciente en $[3, \infty)$.

En consecuencia si $n_1 < n_2$ son dos números naturales, entonces $g(n_1) < g(n_2)$, es decir el área del polígono regular de perímetro P con n_1 lados es menor que el del polígono regular de perímetro P con n_2 lados.