Ver, describir y simbolizar en el club de matemáticas de la universidad pedagógica nacional

Luisa Fernanda Sánchez
luchis_assez@hotmail.com
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Álgebra
Oscar Orlando García
obex_lds@hotmail.com
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Álgebra
Lyda Constanza Mora Mendieta
lmendieta@pedagogica.edu.co
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Álgebra

Introducción

Este artículo surge como consecuencia de la experiencia de dos de los autores de esta memoria como monitores de investigación durante la fase tres (observación y recolección de la información) del proyecto "El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para identificar talentos matemáticos", coordinado por Lyda Mora, y llevada a cabo en el primer semestre de 2009, y como practicantes del Club de Matemáticas, un espacio que busca atender a una población generalmente desatendida, los estudiantes más capaces en matemáticas.

Durante la fase de recolección de la información se llevaron a cabo observaciones de las estrategias y procedimientos a los cuales recurrieron los estudiantes participantes en el curso Ecuaciones ofrecido en el primer semestre de 2009 en el Club de Matemáticas. El propósito del curso era abordar el estudio de las ecuaciones partir de procesos de generalización, para lo cual se propusieron problemas de tipo geométrico y numérico que buscaban evidencias sobre el proceso: ver-describir-escribir, planteado por el grupo Azarquiel.

El objetivo de este escrito es mostrar un ejemplo, basado en la trascripción de un video de clase, donde se visualiza la presencia de los tres procesos antes mencionados en la solución dada a un problema matemático planteado a los estudiantes del Club de Matemáticas, y cómo tal solución es el resultado de la interacción social, la discusión y la formulación de acuerdos, guiados por el profesor que orientó el curso en el cual se llevó a cabo la investigación.

Planteamiento del problema

En el año 2008, el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional se aprobó el proyecto de investigación: "El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para identificar talentos matemáticos", cuyo interés ha sido indagar acerca de los niños, niñas y jóvenes talentosos en matemáticas; de esta manera, la pregunta de investigación que se ha formulado es como sigue: Desde el modelo teórico sociocultural para el estudio del talento, ¿qué características de talento matemático se identifican en los estudiantes que participan en el Club de Matemáticas de la UPN por medio de la resolución de problemas de generalización de tipo numérico y geométrico y el reconocimiento de su contexto individual, familiar y escolar?

Después de la apropiación del marco teórico, la revisión los antecedentes pertinentes para los propósitos de la investigación y el diseño de instrumentos, se llevó a cabo la recolección de la información a través de varios mecanismos, uno de ellos, las actividades propuestas en las clases, cuyas planeaciones didácticas estuvieron a cargo de los autores de este artículo.

La información recogida de las clases brinda evidencia relevante para la investigación; no obstante, resulta razonable que no se haga énfasis en mostrar los procesos de los estudiantes frente a las actividades que desarrollan, dados los tiempos, cronograma y objetivos finales de la investigación. Sin embargo, en los videos tomados sobre las clases se encuentran caminos de solución y estrategias innovadoras, originales e interesantes que resultan ser insumos apropiados para la divulgación y socialización en la comunidad de Educación Matemática interesada en el tema del Talento Matemático, interés que se refleja en las discusiones propuestas por el grupo 6 Actividades y programas para estudiantes talentosos o superdotados en el ICME 11 que tienen que ver con la identificación de características y los materiales presentados a los niños talentosos.

Con lo anterior y teniendo en cuenta que la revisión de casos específicos posibilita ver ejemplos en acción, captar y reflejar elementos que le dan significado a los objetos sobre los que se investiga(Grupo L.A.C.E. Hum 109 1999),considramos que mostrar casos, como el que contiene esta memoria, es una alternativa idónea para profundizar un poco más en los procesos de pensamiento divergente en niños talentosos en matemáticas haciendo especial énfasis en los procesos y estrategias que se llevan a cabo en los diferentes caminos de solución a los problemas sugeridos.

Marco teórico

Generalización: Ver- Describir-Simbolizar

El estudio de las matemáticas y la actividad matemática en sí misma requiere procesos de razonamiento presentes en todos los campos del conocimiento. Comparar, invertir, analizar, ordenar, no son actividades exclusivas de las matemáticas, sin embargo, sí son procesos relevantes en el hacer matemático. Según Dreyfus (1991), la generalización es uno de los procesos que ocurren en cualquier nivel del pensamiento matemático y que está incluido en uno más global, el proceso de abstraer, según este autor “To generaliza is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity” (p. 35).

Así, por ejemplo, se hacen generalizaciones en geometría o en álgebra, de hecho, algunos investigadores han manifestado que este proceso es una vía interesante para el aprendizaje del álgebra inicial, “llegar a las ecuaciones desde el punto de vista de la variable, de fórmula o de número en general, pondría en mejor condición a los alumnos para atrapar el sentido de éste objeto matemático en toda su riqueza” (Sessa, 2005, p.72)

Observando detenidamente la solución que se da a situaciones que incluyen la generalización es posible identificar momentos que están implícitos en estos contextos de manera regular. Cuando un estudiante se enfrenta a resolver un problema que implica la generalización, no formula un resultado de inmediato, por el contrario, pasa por diferentes etapas que le permiten llegar con éxito a una respuesta final, tales fases han sido ampliamente desarrolladas por el grupo Azarquiel (1993). Este grupo postula que los procesos de generalización, específicamente aquellos que están involucrados en el álgebra requieren de tres etapas:

1. Ver la regularidad, las relaciones y diferencias. Se constituye en el proceso mental por el cual se distingue lo que es propio de cada situación y lo que es común a todo, lo que no varía. Para esta etapa es necesario reparar en las figuras que se tiene e intentar mostrar la que sigue la secuencia, considerando así características que puedan no ser perceptibles a simple vista.
2. Describir de manera verbal lo que ocurre. Enunciar en lenguaje natural permite identificar la manera más precisa de comunicar lo que se observa, buscando así decantar y puntualizar sobre la relación que se encuentra.
3. Escribir de manera concisa lo que sucede. Llevar a la expresión escrita, la etapa anterior, es la fase más avanzada del proceso de generalización. Llamar a esta última etapa Escribir se debe a que el grupo Azarquiel contempla la posibilidad de que el registro escrito no esté hecho de manera simbólica, ya que ésta no es precisamente la más natural para el estudiante. No obstante, en este escrito se ha decidido modificar la nominación de esta etapa llamándola Simbolizar, ya que en la investigación a la cual alude esta memoria se encontró que dadas las condiciones de los estudiantes (jóvenes con alto rendimiento en matemáticas, actitudes positivas hacia ellas e identificados como talentosos) para ellos resulta natural y además necesario, el empleo de símbolos matemáticos, no se muestran satisfechos con un resultado hasta que no lo expresan en forma simbólica.

Por otra parte, el grupo Azarquiel identifica generalizaciones de tipo numérico y de tipo geométrico, sin embargo, en la selección y planteamiento de los problemas planteados en la fase de recolección de información se halló que estos dos tipos de generalización abarcan otro tipo de planteamientos aún más específicos, por ello, se proponen otras sub-categorías que complementaron el proceso de generalización al interior del desarrollo del curso Ecuaciones.

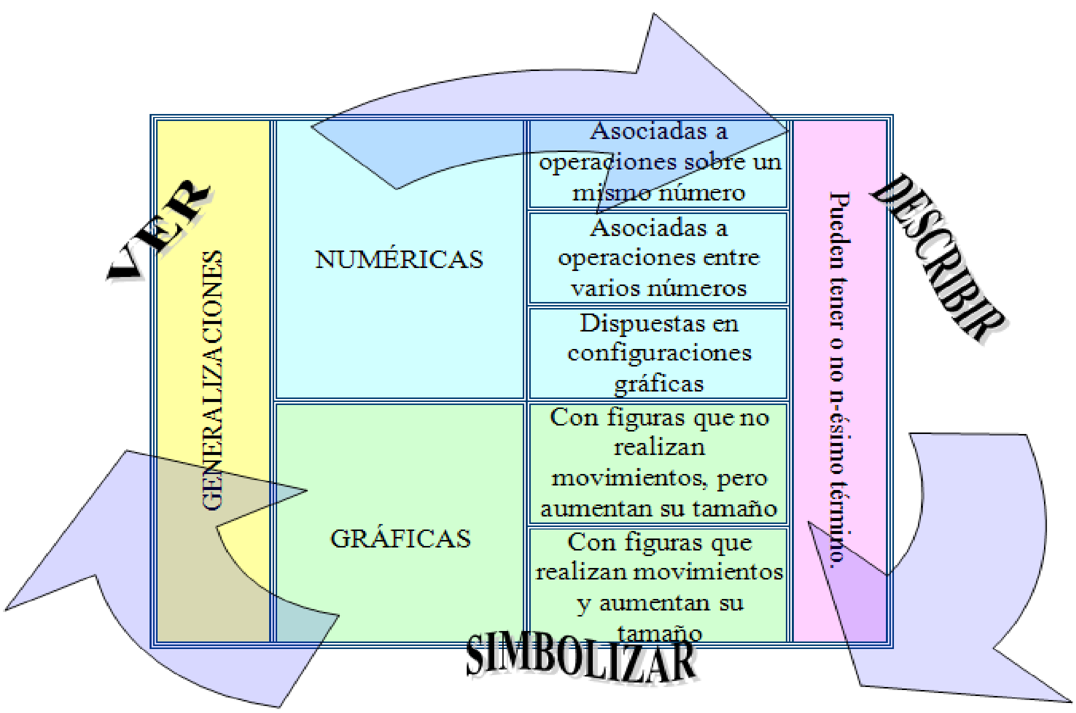


Figura 1. Cuadro de fases de generalización

Dado que el interés primordial de la investigación a la que se ha hecho referencia es identificar características de talento matemático, consolidadas previamente por el grupo de investigación, durante la fase 3 de la investigación se hallaron situaciones idóneas para la identificación de tales características, una de las cuales se presenta más adelante como un caso específico.

Características de talento matemático

El grupo de investigación que desarrolla el proyecto antes mencionado, ha determinado que una persona talentosa en matemáticas posee principalmente tres tipos de características a saber: Pensamiento divergente en matemáticas, pensamiento convergente en matemáticas y actitudes positivas hacia las matemáticas.

Esta presentación se centra en las características que atañen al pensamiento divergente[1], correspondiente a uno de los componentes de la "estructura del intelecto" propuesta por Guilford (1971), que permite identificar aptitudes en relación con el rendimiento creativo de los individuos.

Las características que según Guilford (1971) identifican el pensamiento divergente son la flexibilidad, la fluidez y la elaboración. Dentro de la revisión realizada por el grupo se han incluido otras características indicadoras de creatividad, como se ve en la Figura 2.

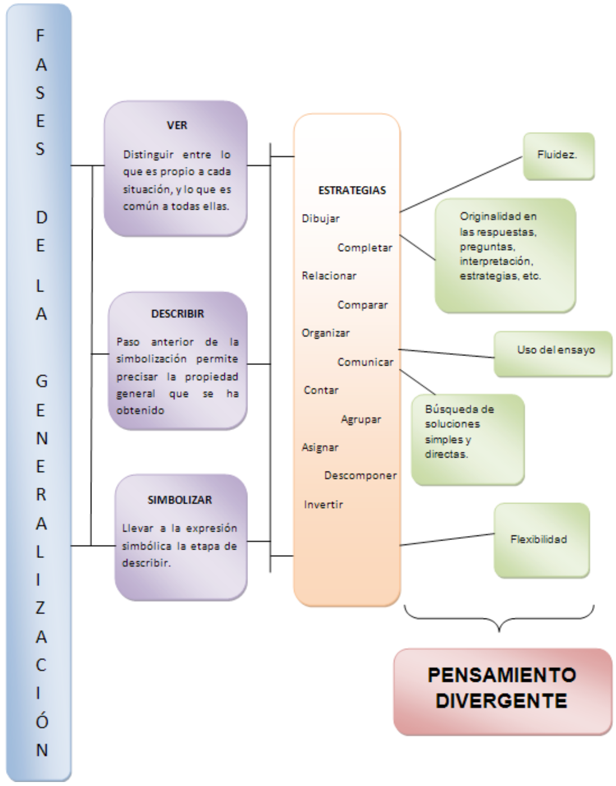
Elementos considerados en la determinación de Talento Matemático	Características principales	Características secundarias	Características terciarias
Pensamiento divergente en matemáticas	Fluidez, riqueza de ideas, abundancia de respuestas al resolver problemas.	Búsqueda de múltiples respuestas	
		Desarticulación de esquemas rígidos	Modificación de las condiciones iníciales del problema.
			Hacer procesos de análisis a partir de asociaciones innovadoras (descomponer el todo en sus partes)
		Establecimiento de asociaciones innovadoras	Poco apoyo en suposiciones únicas y previas.
		Formulación de problemas de manera espontánea	
	Originalidad en las respuestas, preguntas, interpretación, estrategias, etc.		
	Búsqueda de soluciones simples y directas.		
	Flexibilidad para proponer caminos de solución a situaciones matemáticas e interpretar la información. Capacidad de ver las situaciones a las que se enfrentan desde diversos ángulos, desde las perspectivas propias y ajenas utilizando o construyendo estrategias múltiples que aportan a la solución de tales situaciones, sin estar sujetos a técnicas de solución y hacer reajustes cuando éstas fallan .	Búsqueda de múltiples respuestas	
		Desarticulación de esquemas rígidos	Modificación de las condiciones iníciales del problema.
			Hacer procesos de análisis a partir de asociaciones innovadoras (descomponer el todo en sus partes)
			Poco apoyo en suposiciones únicas y previas.
		Establecimiento de asociaciones innovadoras	
		Formulación de problemas de manera espontánea	

Figura 2. Características de pensamiento divergente

Esta tabla hacer parte de la matriz de características de talento consolidadas por el grupo de investigación. (Mora, L., et al., 2008)

Como consecuencia de lo anterior, enseguida se relacionan algunas características que se asocian a las fases de la generalización basados en las estrategias que los estudiantes utilizan para llevar a cabo cada tarea. A continuación se muestra un esquema que resume estas relaciones:

1 Entendiendo el pensamiento divergente como "la generación de alternativas lógicas a partir de una información dada, cuya importancia se halla en la variedad, cantidad y relevancia de la producción a partir de la misma fuente" (Romo, 1987, p. 181)



Metodología

El curso Ecuaciones del Club de Matemáticas de UPN, desarrollado en el primer semestre del 2009, se concibió como el curso pretexto para desarrollar los objetivos trazados en la tercera fase del proyecto de investigación "El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para identificar talentos matemáticos", tales objetivos apuntaban a realizar una exhaustiva observación y recolección de información de los estudiantes, acerca de su desempeño en el Club, en su vida escolar y familiar.

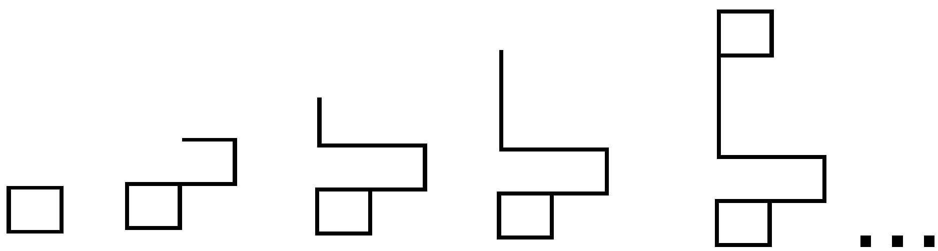
La grabación en video y los diarios de campo se convirtieron en los instrumentos de observación más idóneos para capturar las actuaciones de los estudiantes, en torno al desarrollo de cada una de las actividades propuesta dentro del aula de clase, evidenciando no sólo características propias del talento en matemáticas, sino soluciones, procesos de solución e interacciones que se fueron dando entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor, a partir de las discusiones que se dieron alrededor de cada una de las situaciones propuestas.

Con la meta de evidenciar en los estudiantes características de talento matemático, el proceso de generalización se constituyó en la herramienta principal para la preparación de las actividades que se desarrollaron en el curso. Siguiendo esta vía, los ejercicios y problemas presentados a los estudiantes fueron seleccionados de libros como: Iniciación al estudio didáctico del álgebra (de Sessa, 2005), Ideas y actividades para enseñar álgebra (de Grupo Azarquiel, 1993), Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir (Luque, C., Páez, J. y Mora, L., 2001) y algunos otros problemas creados por los estudiantes autores de este documento.

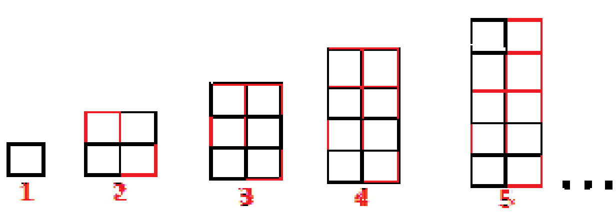
Por lo anteriormente descrito, esta presentación surge como una posibilidad de mostrar a la comunidad educativa el proceso de solución de un problema propuesto por parte de un estudiante del Club, que con la ayuda del video y su respectiva transcripción, contribuye a la identificación de cada una de las tres fases de la generalización, y así a partir de ellas, evidenciar estrategias que muestran características de pensamiento divergente.

Análisis de datos

El problema expuesto dice como sigue:
Realiza diferentes organizaciones que te ayuden a determinar la figura que ocuparía la posición 5, la 14 y la 52.



Este problema se propuso al finalizar la octava sesión de clase y se socializó en la novena sesión en el marco del desarrollo de generalizaciones gráficas con figuras que no realizan movimientos pero aumentan su tamaño (ver figura 1). Inicialmente cuando se planteó la actividad a los estudiantes les resultó difícil encontrar la figura siguiente (es decir, ¡la situación era en verdad un problema!), más aún, expresar el n-ésimo término de la configuración, a pesar de ello, para la siguiente clase los estudiantes comentaron y dieron ideas para sugerir caminos de solución (el problema se convirtió en ¡reto!). Particularmente, un estudiante (nombrado como Estudiante 2) propuso hacer cuadrados con las figuras iniciales y contar la cantidad de cuadrados de cada figura, sin embargo no encontró en este camino una expresión general, no obstante es a partir de esta idea que el estudiante C (llamado así en adelante) encontró una forma interesante de dar solución al problema, como se muestra en el siguiente protocolo en el cual se indican las fases del proceso de generalización observado.

		VER	ESTRATEGIAS
3	C	Yo estaba haciendo lo mismo que [Estudiante 2] pero completando todos los cuadritos. (El estudiante dibuja, en el tablero, sobre la configuración mostrada los respectivos cuadrados y enumera cada una de las figuras) 	Completar Dibujar Aprovechar aportes de otros

<table>
<tr><th colspan="3">DESCRIBIR</th><th>ESTRATEGIAS</th></tr>
<tr><td>7</td><td>C</td><td>Entonces yo hice una tabla, (el estudiante escribe en el tablero).
<table>
<tr><th>Figura</th><th>N. de cuadrados</th><th>Líneas borradas</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td><td></td></tr>
</table>
(Para completar la tercera columna el estudiante dice).
Entonces en la figura 1, para que dé esta figura (señalando la figura número 1), no se le borra ninguna línea [escribiendo 0 (cero) en la primera fila de la tercera columna], en la dos (refiriéndose a la figura 2) ésta, ésta, ésta, ésta [cuenta las líneas rojas].</td><td>Organizar

Comunicar

Contar</td></tr>
<tr><td>8

9</td><td>B:

C:</td><td>Cuatro, a no. Un, dos, tres,… ¿cinco? Son cinco ¿no?
(Asintió a la intervención de su compañero) En la 3 hay ocho; en la 4, doce; en la 5 (escribe el número correspondiente, trece); en la 6, quince….; 7, catorce y … dieciocho
(Asintió a la intervención de su compañero) En la 3 hay ocho; en la 4, doce; en la 5 (escribe el número correspondiente, trece); en la 6, quince….; 7, catorce y … dieciocho
<table>
<tr><th>Figura</th><th>N. de cuadrados</th><th>Líneas borradas</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td>12</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td><td>13</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td><td>15</td></tr>
<tr><td>7</td><td>14</td><td>18</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
</table>

		VER	
10	C:	Estaba hallando la forma de saber como…, bueno para la n-ésima de ese, entonces, no encontré una regularidad de todos pero si encontré una regularidad en partes, de cuatro a cuatro, digamos, éste [2] con éste [6], éste [3] con éste [7], el cuatro con el ocho, el cinco con el nueve y con el uno… con el uno no.	Relacionar Comparar

Figura	N. de cuadrados	Líneas borradas
1	1	0
2	4	5
3	6	8
4	8	12
5	10	13
6	12	15
7	14	18
8		
9		

		DESCRIBIR	
10	C:	Y entonces, … en grupitos, (escribe en tablero las tablas respectivas de los grupos)	Agrupar Organizar Asignar

Figura	Líneas borradas		Figura	Líneas borradas
2	5		3	8
6	15		7	18
10	25		11	28
14	35		15	38
Figura	Líneas borradas		Figura	Líneas borradas
4	12		5	13
8	22		9	23
12	32		13	33
16	42		17	43

<table>
<tr><td>24

25

26
27</td><td>P:

C:

P:
C:</td><td>¡Ah!. O sea que para una figura cualquiera yo puedo saber cuántas líneas se deben borrar de toda esa figura.
O sea que si yo digo… para la figura 60… ¿Cuántas líneas se borran?
Tendríamos que saber en qué caso está. Pero para hallar el caso yo también hice otra cosa.
Listo, ¿Cómo haces? …
Entonces para el paso del de 2, 6, 10 y 14 (y escribe la siguiente tabla)
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>=2(1)</td><td>=2(2(1)-1)</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>=2(3)</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>10</td><td>=2(5)</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>14</td><td>=2(7)</td><td></td></tr></table></td><td>Descomponer

Relacionar</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>SIMBOLIZAR</td><td></td></tr>
<tr><td>

28</td><td>

C:</td><td>(A medida que el estudiante va realizando la tabla menciona que son los números impares (los que están dentro de los paréntesis en la tercera columna) y concluye que la forma general de estos números es: 2(2n-1))
Esta seria, 2(2n-1), para el factor del 2 [Caso 2].</td><td>Asignar</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>DESCRIBIR</td><td></td></tr>
<tr><td>28</td><td>C:</td><td>Entonces para el 3 (y escribe la siguiente tabla)
<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>=1+2</td><td>=1+(1+1)</td></tr><tr><td>2</td><td>7</td><td>=2+5</td><td>=2+(2+3)</td></tr><tr><td>3</td><td>11</td><td>=3+8</td><td>=3+(3+5)</td></tr><tr><td>4</td><td>15</td><td>=4+11</td><td>=4+(4+7)</td></tr></table></td><td>Organizar
Asignar
Descomponer
Relacionar</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>SIMBOLIZAR</td><td></td></tr>
<tr><td>

28
29

30</td><td>

C:
P:

C:</td><td>(De manera similar describe la secuencia e identifica la regularidad de los números impares y concluye la forma general)
… sería $n + (n + (2n\text{-}1))$
Ese sería la… ese n correspondería a… ahí estarías tomando la primera posición de ese caso
Sí.
(El estudiante realiza las dos tablas faltantes y halla la n-ésima posición de cada una)</td><td>Asignar</td></tr>
</table>

1	4		1	5
2	8		2	9
3	12		3	13
4	16		4	17
4n				4n + 1

En la trascripción anterior puede verse las tres etapas correspondientes a la generalización, es llamativo observar que las dos primeras se dan constantemente hasta llegar a la simbolización.

	ESTRATEGIAS	CARACTERÍSTICAS DE PENSAMIENTO DIVERGENTE
VER	• Completar • Dibujar • Aprovechar los aportes de otros • Relacionar • Comparar	• Flexibilidad. Desarticulación de esquemas rígidos. Modificación de las condiciones iniciales del problema
DESCRIBIR	• Organizar • Comunicar • Contar • Agrupar • Asignar • Descomponer • Relacionar	• Flexibilidad. Establecimiento de asociaciones innovadoras
SIMBOLIZAR	• Asignar	• Flexibilidad. Desarticulación de esquemas rígidos. Hacer procesos de análisis a partir de asociaciones innovadoras

La originalidad y la formulación de problemas manera espontánea surgen como características en la forma que el estudiante plantea el problema ya que él propone una solución en términos de la cantidad de rayas que se deben borrar en cada una de las figuras.

Conclusiones

A diario los profesores interactuamos con los estudiantes, por lo general estas interacciones nos permiten identificar rasgos de sus actuaciones que se dan al interior de las clases. Empero, con grupos numerosos, como es la generalidad en el sistema público o estatal, no es posible identificar fácilmente aptitudes y actitudes que permitan nominar a los estudiantes como talentosos y si esto ocurre con la identificación, mucho más difícil es su atención. Pero tal vez la razón de contexto no es la única que impide el reconocimiento de estudiantes talentosos y con ello, de pensamiento divergente, pues muchas de las actividades que proponemos los docentes están dadas al desarrollo del pensamiento convergente, consideramos que el problema presentado posibilita la identificación de características propias de los individuos talentosos en matemáticas.

Por otro lado, con esta memoria confirmamos en el proceso de generalización una vía de gran riqueza para iniciar a los aprendices en el estudio del álgebra, ya que, dota de significados el uso de las letras en el álgebra usual, situación que favorece el aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente, plantear situaciones que evidencien las fases de la generalización posibilita la identificación de características propias de pensamiento divergente, más aún, ahondar en los procedimientos que se dan en cada una de las fases permite establecer las estrategias y heurísticas que corresponden a cada característica de pensamiento divergente, convirtiéndose así, en indicadores que faciliten el proceso de identificación de talento a los maestros.

Referencias bibliográficas

- Alonso, F., et al. (1993) Ideas y actividades para enseñar Algebra. Grupo Azarquiel. Editorial Síntesis. España.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking processes. En: D. Tall (Ed.). Advanced Mathematical Thinking. (pp. 25 – 41). Netherlands: Kluwer.
- Guilford, J. (1994). Creatividad y educación. Paidós educador. Buenos Aires. (edición original, 1971)
- GRUPO L.A.C.E. HUM 109. (1999). Introducción al Estudio de caso en Educación. (Laboratorio para el Análisis del Cambio Educativo). Facultad de CC. de la Educación. Universidad de Cádiz., España: Cádiz.
- Luque, C., et al. (2002). Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- Mora, L., et al. (2008). Informe de Avance Proyecto de Investigación El club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para identificar talentos matemáticos. Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. División de gestión de proyectos-centro de investigaciones CIUP-Bogotá.
- Romo, M. (1987). Treinta y cinco años del pensamiento divergente: teoría de la creatividad de Guilford. Estudios de psicología, 27-28, pp. 175-192.
- Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctica del Álgebra, Orígenes y perspectivas. Buenos Libros del Zorzal Aires, Argentina.