SUMA 36
febrero 2001, pp. 33-41

En la búsqueda de lo importante en el aula de Matemáticas

José M.ª Chamoso Sánchez
William B. Rawson

ARTÍCULOS

Se quiere explicar cómo se concibe el desarrollo de una enseñanza de Resolución de Problemas o de Investigaciones en el aula de Matemáticas. Para ello, se presentan diversos extractos de transcripciones de estudiantes de 10-11 años, obtenidas en clase de Matemánticas, cuando estaban resolviendo problemas. Con ellas se descubre cómo trabajan de forma similar a como lo hace un matemático cuando se enfrenta a un problema: construyen, experimentan, se apoyan, divergen, preguntan, corrigen, comprueban, explican, dirigen, contestan, suponen, generalizan,…

EN LOS TEXTOS ESCOLARES surgen, hoy en día, diferentes términos como *problema abierto*, *problema cerrado*, *problema,* e incluso *investigación,* situados en epígrafes como «situaciones y problemas», «actividades», «curiosidades», «investigaciones», «piensa un poco»… Y aparecen diferentes acepciones del significado de «Resolución de Problemas» e «Investigaciones».

Todos esos epígrafes diferentes nos plantean una cuestión inicial. ¿Por qué son necesarios tan diversos términos? Es posible que sea para llamar la atención del joven lector. Podría ser para hacer sutiles distinciones: por ejemplo, en un nivel básico hay que distinguir entre la forma de clasificar un problema y las diversas maneras de resolverlo. También se puede considerar la distinción usual entre «Resolución de Problemas» e «Investigación». Lo primero de ello se refiere al hecho de intentar conseguir la solución de un determinado problema utilizando las estrategias y técnicas que parezcan convenientes, o a través de una labor investigadora. Y se suele llamar «Investigación» cuando, además, se anima a ser curioso, a buscar estrategias alternativas, a considerar qué sucedería si se cambian ciertas condiciones o a intentar generalizar el problema.

> Sin embargo, en términos abiertos es acertado entender Resolución de Problemas como una actividad convergente donde los estudiantes tienen que conseguir una solución de un determinado problema, mientras que Investigación debería ser visto como una actividad más divergente. En una investigación se anima a los estudiantes a pensar en estrategias alternativas, a considerar qué sucedería en una determinada línea de acción, o a ver si ciertos cambios cambiarían los resultados (H.M.I., 1985: 42).

Es interesante esa distinción, aunque en ocasiones nos damos cuenta de que durante la resolución de un problema realizamos una labor característica de lo que se llama investigación en el sentido anterior. Eso también ocurre con frecuencia cuando experimentamos con estrategias alternativas.

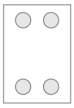
Es decir, en la práctica realmente estamos trabajando en una actividad convergente. Parece que esas expresiones se utilizan para referirse a la idea de que *los alumnos trabajen creando sus propias matemáticas*, en contraposición a la de trabajar en cuestiones o ejercicios que consisten en la aplicación automática de una destreza o algoritmo previamente aprendido. Llamémoslo investigación, por ejemplo.

Todo ello es importante, pero nos preguntamos: ¿eso es lo importante?

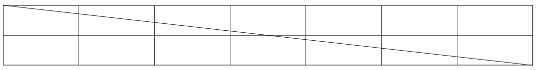
Ejemplos de investigaciones que se pueden proponer en un aula

En diversas fuentes y diferentes libros existen gran cantidad de ejemplos de actividades como las siguientes:

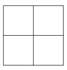
1. *Las chinchetas.* ¿Cuántas chinchetas se necesitan para fijar distintas hojas de papel sobre un tablero? Cada hoja de papel es igual a las demás, y para quedar fija acordamos que necesita una chincheta en cada esquina.



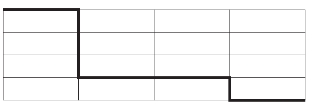
2. *La diagonal de un rectángulo.* ¿Cuántas líneas corta la diagonal de un rectángulo?



3. *Los colores de la bandera.* Una bandera cuadrada está dividida en cuatro partes iguales. ¿Cuántas banderas diferentes se pueden representar de esta forma cuando únicamente es posible utilizar dos colores distintos?



4. *Los números y las cuatro operaciones.* ¿Cuántos números distintos se pueden formar con cuatro cuatros y las operaciones +, –, x, :? ¿Y con cualquier operación?
5. *Los cuadrados.* ¿Cuántas formas distintas se pueden confeccionar con 3 cuadrados unidos al menos con un lado?
6. *Los sellos.* Si tenemos muchas estampillas de 3 pts. y 5 pts., ¿se pueden conseguir hacer todos los valores hasta 50 pts.?
7. *Los números de las casas.* Se tienen los números 2, 5 y 7. ¿Cuántos números de casas se pueden conseguir usando estos tres números solamente una vez?
8. *Las rutas.* ¿Cuántas rutas distintas hay de *A* a *B*?



9. *Números pares e impares.* Escoge un número cualquiera: si es par, divídelo por dos; si es impar, súmale uno. Repítelo cuantas veces puedas. ¿Qué ocurre?
10. *La calculadora.* Supongamos que tienes una calculadora cuyos únicos botones que funcionan son 4, 3, –, x, =. ¿Qué números se pueden conseguir?

Éstas, y otras muchas, se pueden encontrar en diversos textos, y cada profesor tiene su propia opinión y sus preferencias sobre la eficacia de cada una de ellas. Todas son importantes pero, sin embargo, nos preguntamos: ¿eso es lo importante?

Diversas clasificaciones de investigaciones

Se pueden considerar los ejemplos anteriores y trabajarlos como investigaciones. Éstas se pueden clasificar de diversas formas. Una de ellas podría ser la de Burghes (1984), que distingue cuatro tipos:

a) *Investigaciones Eureka:* se caracterizan por necesitar una idea adecuada («feliz idea») para resolver el problema, sin la cual pocos progresos útiles pueden hacerse. Ejemplo: el cuadrado mágico.

b) *Investigaciones del tipo escaleras mecánicas*: aquéllas que no dependen de una idea sino que permiten lograr ciertos progresos a lo largo de la investigación. Ejemplo: la diagonal de un rectángulo.

c) *Problemas de decisión*: obtenidos originariamente de situaciones reales en las cuales se deben efectuar decisiones sin que exista evidencia clara de cuáles serían las más adecuadas. Ejemplo: las rutas.

d) *Problemas reales*: aquéllos que tienen relación directa con el ciudadano, pero que el contexto en que se encuentran tiene poco que ver con Matemáticas. Ejemplo: los sellos.

¿Cuántas formas distintas se pueden confeccionar con 3 cuadrados unidos al menos con un lado?

Escoge un número cualquiera: si es par, divídelo por dos; si es impar, súmale uno. Repítelo cuantas veces puedas. ¿Qué ocurre?

Otra posibilidad sería clasificarlas según el objetivo de las mismas (Rawson y Chamoso, 1999):

a) para contactar con la vida diaria,

b) para introducir un concepto nuevo,

c) para desarrollar y fortalecer conceptos conocidos,

d) para desarrollar el razonamiento y la explicación.

También se podría hacer de forma similar a como lo hace Corbalán (1994) cuando se refiere a juegos que, según él, pueden ser:

a) *De conocimiento*, aquéllos que hacen referencia a uno o varios de los tópicos habituales de los programas de Matemáticas (cita ejemplos numéricos, de geometría y de probabilidad).

b) *De estrategia*, en los que se trataría de poner en marcha uno o varios procedimientos típicos de resolución de problemas o los modos habituales de pensamiento matemático (como el Nim o el Sol y Sombra).

Existen otras muchas posibilidades de organización. Todas ellas son importantes, pero nos preguntamos: ¿eso es lo importante?

¿Qué es lo importante?

Gairín Sallán (1996), en su artículo *Del dicho al hecho…* y basándose en su experiencia, hace un gran esfuerzo por explicar dos argumentaciones diferentes de la demostración de las estrategias de resolución de un ejemplo concreto: inicialmente de forma «dicha», con la necesidad de utilizar unos conocimientos matemáticos elevados, de la misma forma que lo haría cualquier libro de texto, y posteriormente de forma «hecha», con demostraciones que se pueden esperar de un alumno trabajando de forma similar a como lo hacen los matemáticos. Pero quizás sería más cercano si pudiésemos descubrir cómo funciona la mente de cada estudiante cuando trabaja, en vez de cómo cree el profesor que funciona dicha mente cuando desarrolla una cierta actividad.

Nos referimos a investigación como un viaje con ideas hasta donde se pueda, de forma libre, con diálogo y discusión entre los estudiantes.

Nos referimos a investigación como un viaje con ideas hasta donde se pueda, de forma libre, con diálogo y discusión entre los estudiantes. Es importante elegirlas de forma adecuada para utilizarlas en el momento concreto. Aunque el insertar varias de ellas anteriormente ha sido únicamente con la pretensión de su inclusión en el artículo como elemento complementario y decorativo, ello no ha sido óbice para que la lista definitiva haya sido confeccionada después de arduas discusiones. Por ejemplo, había pensamientos divergentes acerca de la pertinencia del problema de la calculadora, a pesar de considerarlo muy interesante y de utilizarlo frecuentemente como elemento de enseñanza en clase. Pero se recordó que en cierta ocasión había tenido resultados interesantes con un alumno: se trataba de un estudiante que no solía hacer los deberes, pero ante el reto propuesto por el profesor de si se podían construir con esos botones todos los números hasta el 100, no sólo llegó al día siguiente con el problema resuelto, sino que se presentó con un delicioso folio doble, escrito por los dos lados, en el que se comprobaba que era posible hacerlo hasta el número 132. Normalmente no le gustaba repetir actividades similares, pero en esta ocasión lo hizo gustoso porque él tenía el control del trabajo que efectuaba. Es decir, no sólo llegó con los deberes hechos, sino que llevó realizado más de lo que se le había solicitado. Quizás en otras ocasiones se había utilizado como problema rutinario y no se habían descubierto sus ventajas. Quizás no era tan importante el problema en sí, sino la forma de su utilización.

Otra investigación que presentó opiniones encontradas dignas de mencionar en relación con su inclusión fue la de los sellos. Su simplicidad parecía que no daba más de sí que ser prácticamente un ejercicio, aunque permitiese, por ejemplo, generalizar cambiando los datos del enunciado. Nuestra sorpresa fue grande al caer por casualidad en esos momentos en nuestras manos el libro de Gardiner *The Art of Investigation* (1989), escrito para lectores con un cierto nivel de conocimientos en Matemáticas y en el que, después de una seria introducción en que trata de explicar qué entiende por investigación, se centra en dos casos concretos para ejemplarizarlos de forma práctica. Uno de ellos es el mencionado de los sellos, al que dedica 50 densas páginas tratando de explotar las posibilidades del mismo (tablas, múltiplos y divisores, ecuaciones diofánticas, construcciones geométricas, áreas...). Quizás no se había pensado suficientemente el problema y sus posibilidades.

Interesante es la de la diagonal del rectángulo. Se ha experimentado en el aula y ha servido para demostrar que no se debe subestimar la capacidad de raciocinio de los estudiantes debido a su corta edad. Se ha hecho de la siguiente forma: se ha observado con vídeo una clase de 20 personas de 10-11 años trabajando en varios grupos. Se ha presentado la misma investigación a alumnos de Magisterio y a profesores en activo, para que trabajen con ella y descubran sus dificultades. Posteriormente se les ha puesto el vídeo. Se ha utilizado como estímulo el usar el mismo tópico en diversos ambientes. Muchos docentes piensan que realizar esas investigaciones suele ser demasiado difícil para los alumnos de esos años, y que nunca lo harán. Pero pueden comprobar en el vídeo que no es así en realidad pues, si se les permite, nunca se puede suponer lo que los chicos son capaces de hacer. Lo que es cierto es que no se llegará a saber la capacidad que puede alcanzar una persona si no se le da la oportunidad de discutir alternativas, si únicamente preguntamos contenidos, si nos restringimos a seguir las indicaciones de un libro de texto.

Se había acordado que en la explicación inicial del planteamiento de la investigación la profesora hablara poco, hiciera preguntas muy breves y dejara el trabajo para los estudiantes. Con posterioridad se les dejaba actuar, en grupo, con dos profesores pendientes únicamente de comprobar si una pregunta adecuada en forma de sugerencia era necesaria en algún caso. Se observaron conversaciones en los grupos de alumnos como las que siguen:

Niña A: *Eso es porque es exactamente lo mismo.*

Niña B: Si tú cortas este pedazo en dos partes y lo doblas por la mitad, entonces…

Niña C: No te preocupes acerca de eso: si es más ancho ocurre exactamente lo mismo. Si es más estrecho también.

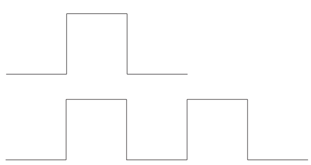
Y conjeturan:

Niña D: *Se suman los lados de las cajas menos dos, eso es igual al número de cortes.*

Después de esta hipótesis alguien observa que hay un caso especial que no la cumple, el $1 \times n$. Por tanto, hay que seguir hasta que se llega a soluciones parciales.

Es decir, se observa que aparecen muchas oraciones condicionales, el método de investigación de formular conjeturas. Y son capaces de separar lo que necesitan de lo que no necesitan. Esto, realizado por estudiantes de 10-11 años, hace que parezca que realmente se esté trabajando en forma de investigación de la misma forma que lo haría un investigador: observan primero, explican lo que observan y conjeturan una fórmula general que comprueban con posterioridad. ¿No es eso lo que queremos?

Veamos otro caso. Se trata de construir puertas con palillos o bloques. Una es posible hacerlo con 5, dos con 9, tres con 13 y así sucesivamente.



…se observa que los estudiantes resuelven:

Construyendo…

Experimentando…

Apoyando…

Divergiendo…

Preguntando…

Deduciendo…

Corrigiendo…

Se pregunta: ¿cuántas barras son necesarias para construir 10 puertas? ¿Y en general? Se ha experimentado en clase y grabado en vídeo a dos alumnos. En la transcripción de la conversación se ha podido descubrir lo que los alumnos hacen: construyen, experimentan, se apoyan, divergen, preguntan, deducen, corrigen, comprueban, explican, dirigen, contestan, suponen, generalizan. Es decir, se observa que los estudiantes resuelven:

- *Construyendo*, en lo que tiene que ver con el desarrollo de la estructura, ya sea manipulativa o numéricamente: «...Si multiplicamos por 5, será igual 10 veces», «Pon a continuación encima el capuchón del bolígrafo», «Comprueba el 4 de nuevo. Quitamos 1, quitamos 2, 4 igual... pero sólo quitas 1, ¿no? (mientras construye)»...
- *Experimentando*, intentando ver lo que ocurre en algunos casos particulares: «Intentemos para 17», «Intentémoslo con otro»...
- *Apoyando* afirmaciones de lo que se ha dicho, aunque no se sea plenamente consciente del procedimiento: «Sí, por tanto tenemos que ir bien ahora», «De acuerdo, correcto. Y eso para el número que tú quieras»...
- *Divergiendo*, discrepando, mostrando nuevos caminos que puedan abrir nuevas posibilidades del problema: «¿Funcionará también para los números impares?»...
- *Preguntando*, como parte fundamental del proceso de resolución del problema, en que los alumnos examinan cómo se compone la estructura: «¿Era 6 el siguiente?», «Sí... ¿y si aplicamos esto para 10?»...
- *Deduciendo* (de una experiencia particular los estudiantes utilizan el lenguaje para expresar relaciones que reconocen): «10 tiene que ser 41, porque si añadimos cuatro cada vez no sería 42»...
- *Corrigiendo*, lo que demuestra cierta capacidad de razonamiento y que entienden una cierta parte del

problema: «45 no puede estar bien», «Tiene que estar confundido entonces. Quizás sea 8»...

- *Comprobando* para verificar el correcto desarrollo del razonamiento: «Vamos a comprobarlo», «Vamos a comprobar 8 de nuevo. 4 igual a 17, 5 igual a 21»...
- *Explicando*, enlazando experiencias pasadas y presentes con los razonamientos que se están llevando a cabo: «Acabamos de resolverlo para 4. Si consideramos eso anterior por 2, hace 18, quitamos 1, es 17. Por tanto se cuenta por 2 y quitamos 1...», «Será 61 porque mira, añadiendo 41 igual a 62, pero recuerda, esto es cuando estamos quitando 2»...
- *Dirigiendo* la acción de otras personas con el fin de instruir, demostrar y formalizar la estrategia que se está utilizando: «...por tanto si quitas 2 ahí y 3 allí, ¿qué quitarías para 6? Probemos el 6», «No, haz 9»...
- *Contestando* de forma crítica y justificada las afirmaciones realizadas, añadiendo otros puntos de vista: «No puede ser 33, tiene que ser 32. Tienes que quitar otra, ¿recuerdas?», «No, haz 9. Debería ser 37. Si 8 es 33 y añadimos 4, será 37»...
- *Suponiendo*, formulando hipótesis y conjeturas: «10 podría ser igual a 42 entonces», «73 debería funcionar»...
- *Generalizando*, estudiando qué ocurriría en cualquier caso: «Por tanto tenemos que averiguar qué sería para cualquier secuencia de cualquier número»...

…

Comprobando…

Explicando…

Dirigiendo…

Contestando…

Suponiendo…

Generalizando…

En esas situaciones, además de lo anterior se observan circunstancias interesantes dignas de mencionar:

a) *Los estudiantes toman la iniciativa.* Se observa cómo son los alumnos los que tienen el control. Por ejemplo, aparece una mala notación pero fue decidida por ellos. En el problema de las diagonales no parece correcto poner 2 x 3 = 3, con el sentido de *largo x ancho = n.° de cortes de la diagonal del rectángulo*. Pero fue su elección. En otras circunstancias se han observado representaciones parecidas: en el de las puertas escribían 2=9. ¡Qué dirían los padres si lo vieran! El sentido está bien, pero sólo es entendible si nos situamos en el contexto de su resolución. Lo aceptamos como una forma corta, cómoda y sencilla de expresarse sobre el papel. La ventaja de permitir que los alumnos experimenten sus representaciones da oportunidad al profesor de hablar con ellos sobre su significado. Hay que explicarles que tienen que pensar por qué escriben y quién va a leer lo que escriben.

b) *Resolución de dudas.* De la misma forma surgían imprecisiones cuando la diagonal pasaba por un vértice común a cuatro cuadrados, ya que se podía entender que se debía contar una o dos veces (es decir, era punto común de una línea vertical y otra horizontal). Fue un buen momento que aprovechó el profesor para animar un diálogo entre los estudiantes para llegar a un tipo de acuerdo, en el que se habló de qué es una línea, qué se entiende por punto de corte, concepto de tangencia... Finalmente decidieron cómo considerarlo, y lo hicieron como quisieron (de hecho un curso lo consideró como un único punto de corte y otro como dos).

c) *La importancia del profesor.* En una ocasión en que se estaba trabajando de forma similar, después de que el profesor planteara la investigación a dos alumnos, al dejarles que lo resolvieran observaba cómo a los cinco minutos estaban convencidos de que habían resuelto el problema. Pero se mantuvo callado, paciente, aguantó sin decir nada con gran valentía y obtuvo su recompensa: los chicos, de forma conjunta pero solos, sin que el profesor añadiera una sola palabra, retomaron el problema hasta que obtuvieron la respuesta correcta y una generalización de la que ambos estaban convencidos (después de treinta minutos). Con posterioridad se les vio mucho más animados al hacer un segundo problema. Esto también nos lleva a plantear y meditar que, en muchas ocasiones, esta forma de trabajar lleva mucho tiempo. Pero, aunque se emplee más tiempo del que se suele disponer en otros casos, los estudiantes han trabajado hasta el último momento y, lo que es más importante, han resuelto el problema.

d) *Errores de los alumnos en el proceso.* La corrección del profesor es la reacción inmediata que surge en la mente de éste, pero para los estudiantes puede ser más positivo abstenerse y comprobar si son capaces de resolver las dificultades por sí mismos, de forma que descubran el camino que se puede seguir y la solución adecuada.

e) *Utilización de material.* Los estudiantes emplean elementos manipulativos para formarse una idea de la solución y formalizarla, aunque todo depende de la dificultad de encontrar ésta. Por ello parece importante proporcionar a los alumnos oportunidades de utilizar instrumentos concretos que puedan ayudar a familiarizarse con el problema y a buscar una solución, de manera que les ayude a establecer una relación entre el pensamiento y la acción. Ello también puede servir para comprobar resultados parciales obtenidos o la solución final, lo que ayuda a conseguir pequeños éxitos.

f) *La importancia de la distribución de los recursos.* Se pudo observar en el caso mencionado en el apartado *c* cómo el chico que tenía bolígrafo y papel, que en principio parecía ser el más apocado y tímido, era el que iba tomando la iniciativa convirtiéndose en el auténtico director. Eso se ha comprobado en otras ocasiones al realizar experimentos en un aula, distribuida en diversos grupos de 4 o 5 personas trabajando en la misma investigación de forma paralela: a cada miembro de algunos grupos se le dio un papel con el problema, en otros se dejó un par de hojas para todos los componentes y en otros casos únicamente una para todo el equipo. Pues fue precisamente esa forma de reparto la que marcó la posterior manera de trabajo de cada grupo, lo cual afecta posteriormente a la calidad del diálogo y discusión de las respuestas: los que tenían una para cada miembro del equipo trabajaron de forma casi exclusivamente individual; cuando se les había dado dos, se hicieron dos subgrupos, y cuando había una única para todo el grupo el trabajo era realmente de un único equipo conjunto.

g) *Trabajo en grupo.* Se veía una motivación grande durante la resolución de un problema cuando explicaban el proceso a un compañero. También es interesante observar cómo cada grupo trabajaba en un ambiente de respeto, con lo cual cada uno de sus miembros desempeñaba un papel significativo. En los ejemplos anteriores se puede comprobar el alto nivel de participación y aportación de ideas. El respeto mutuo ayuda a expresar esas ideas en un ambiente confortante y en una sociedad democrática. Esto es esencial porque cada componente presenta peculiaridades distintas: uno prefiere informar, otro preguntar, algunos son muy hábiles en concretar los puntos principales, otros prefieren bromear…

h) *La importancia de la superación de etapas.* Conseguir pequeños éxitos proporciona alegría y confianza en la experiencia. Además, esas fases superadas deben servir al profesor para que considere el grado de consecución obtenida. Y celebrar ante la clase la superación de etapas puede aprovecharlo para motivar a los alumnos: el pensamiento se estimula cuando hay que explicar el proceso de llegar a una solución.

i) *Poca expresión escrita.* Los estudiantes normalmente no escriben mucho, y lo que escriben no suele expresar normalmente lo que han pensado. No suele ser significativo. Tampoco lo hacen ordenadamente. Éste es un aspecto de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas sobre el que se necesita mucha información. Rawson (1997), Mitchell y Rawson (1998, 2000) han estudiado distintas posibilidades que utilizan los alumnos de Primaria cuando escriben sobre Matemáticas. De esos estudios sobresalen las pocas ocasiones del desarrollo normal del aula en los que los profesores ayudan y dirigen a sus alumnos en la destreza de escribir el proceso de resolver problemas de distintas formas.

Todo ello surge de las oportunidades que brotan del diálogo, de la interacción de los estudiantes cuando se comunican. Por ejemplo, en el caso de las puertas, los estudiantes hicieron un trabajo de generalización muy bueno, pero fue porque estaban en situación de hacerlo. Y los alumnos no eran especialmente brillantes; eran de nivel medio. En algunos momentos del difícil camino diario de la enseñanza nos preguntamos si los estudiantes son capaces de realizar una cierta actividad, y organizarse y pensar para lograr una respuesta adecuada. Y parece muy claro: lo hacen siempre que se les dé oportunidad de hacerlo.

En algunos momentos del difícil camino diario de la enseñanza nos preguntamos si los estudiantes son capaces de realizar una cierta actividad, y organizarse y pensar para lograr una respuesta adecuada. Y parece muy claro: lo hacen siempre que se les dé oportunidad de hacerlo.

Pero, ¿qué es lo realmente importante?

Existen diversas formas de entender el significado de las Matemáticas, así como diferentes puntos de vista de cómo se pueden realizar los procesos de aprendizaje con relación a ellas. Por ejemplo, algunos consideran que tiene que haber una solución para cada problema. Para ellos las Matemáticas consisten en encontrar respuestas a los problemas, y su enseñanza suele ir dirigida a conseguir resultados, es decir, a obtener la respuesta correcta.

En contraposición a la consideración de que el aprendizaje no es más que instrucción, otros tienen un punto de vista de las Matemáticas como algo de naturaleza creativa que requiere iniciativa, imaginación, reflexión y flexibilidad. Sin embargo consideran la Resolución de Problemas como identificar la categoría del problema, seleccionar la estrategia adecuada y aplicarla. Es indudable que se deben enseñar y conocer estrategias, pero hacerlo de esta forma convertiría las Matemáticas en algo similar a una mera aplicación de unas reglas de manera mecánica.

Otra posibilidad es entender las Matemáticas como un proceso que enfatiza la necesidad de entender, siguiendo los procedimientos y destrezas de un investigador. En ese caso se deberían presentar los problemas como algo que estimule el trabajo de los estudiantes, así como una oportunidad para que los resolutores puedan desarrollar un método de trabajo efectivo. De esa forma, las actividades servirían como experiencias que desarrollen estrategias, permitan formular conjeturas y tabular los resultados, identifiquen los objetivos, animen a la discusión y a conseguir acuerdos conjuntos... Así, Resolución de Problemas enfatiza la naturaleza interactiva de las Matemáticas y favorece que los alumnos tomen decisiones para conseguir los objetivos que se pretenden. Con ello pasan de ser pasivos receptores del conocimiento a estudiantes activos. Esto hace que presenten una amplia diversidad de respuestas. También pretenden presentar situaciones que les permitan generalizar de acuerdo con sus niveles de desarrollo. Esta habilidad de generalización supone un paso importante, ya que ser capaz de adquirir una destreza en determinadas condiciones es algo bien distinto que mostrar diferentes destrezas en la misma situación, o la misma destreza en diferentes situaciones. Todo ello no elimina el valor de dominar las destrezas del cálculo, pero debe ser con la finalidad de considerarlas como herramientas básicas para la solución de problemas.

Bruno D'Amore (1997) relata, en su artículo *¿Las imágenes mentales de los textos de las situaciones-problema influencian su resolución?*, la reveladora frase que le dio un estudiante de diez años ante un problema del que no entendía exactamente el enunciado:

> Lo importante no es comprender, sino resolver el problema.

Pero, realmente, ¿qué es lo que pretendemos con la educación? Recordar, comprender y ser capaz de utilizar esos recuerdos, pero no situados en tres niveles diferentes, sino presentes en cada situación y en cualquier actividad humana.

No se debe confundir educación con memorización porque, en realidad, saber con precisión que Felipe II fue Rey de España, el número de años que vivió, la extensión de sus dominios bajo su mandato y el nombre de sus hijos no parece demasiado relevante. Eso se puede consultar en cualquier libro que trate sobre el tema, pero una enciclopedia con piernas no suele entenderse como una persona bien preparada. Quizás sea más importante conocer qué tuvieron que ver esos hechos con el desarrollo de la humanidad, en su momento y en lo relacionado con la situación actual. Aunque tampoco se puede caer en el polo opuesto identificando la educación como mero raciocinio. Según Bruner (1962: 34):

> Enseñar no es crear pequeñas bibliotecas vivientes, sino más bien que los estudiantes piensen por ellos mismos, matemáticamente, a considerar cuestiones como lo hace un historiador, a tomar parte en el proceso de construir el conocimiento. El conocimiento es un proceso, no un resultado.

También se debe distinguir educación de mecanización, porque hacer hincapié en trabajar en una larga lista de sumas puede ser una actividad matemática trivial. Esas actividades necesariamente no hacen a los estudiantes ser especialmente competentes cuando utilizan números. Quizás también sería interesante tener en cuenta cómo cada persona interpreta su significado. Veamos un ejemplo que puede mostrar esa distinción entre educación y mecanización. Se necesita imaginación para convertir una página de sumas en una actividad que estimula la acción de pensar. Para ello hay que mirar dicha página con una visión nueva. Por ejemplo, un profesor inquieto puede sugerir, en primer lugar, hacer las sumas que no se pueden realizar fácilmente de forma mental. Posteriormente se trata de inventar el relato de un problema donde la solución:

- esté comprendida entre las respuestas de la primera y la última suma de cada fila de sumas,

Otra posibilidad es entender las Matemáticas como un proceso que enfatiza la necesidad de entender, siguiendo los procedimientos y destrezas de un investigador. En ese caso se deberían presentar los problemas como algo que estimule el trabajo de los estudiantes, así como una oportunidad para que los resolutores puedan desarrollar un método de trabajo efectivo.

- esté entre la solución más grande y más pequeña de cada fila,
- es mayor/menor que la solución más/menos grande de cada fila de sumas,
- es mayor/menor que la mitad de las soluciones mayores de cada fila...

Muchos alumnos y profesores comentan que lo que hacen normalmente los estudiantes es preparar un examen, y eso se suele hacer habitualmente «el día antes». También se habla de atender a la diversidad, ya que cada alumno debe mantener su propio ritmo y conseguir sus resultados. Luchar contra eso es más fácil si se intenta que los estudiantes piensen por sí mismos. Con ello querríamos comentar y criticar el conocido proverbio chino:

> Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y comprendo.

Según nuestro criterio habría que incluir una palabra entre hago y comprendo: reflexiono.

En los libros de texto de hace años se utilizaban los nombres *mental, algoritmo y problema*. Ahora las cosas han cambiado, y parece que la sociedad actual demanda enseñar a pensar en un contexto cada vez más competitivo. Pero en muchas facetas y situaciones de nuestra vida actuamos de la primera forma que se nos ocurre, sin comprender y sin ni siquiera intentar comprender. Es decir, lo que se hace es resolver problemas prácticos de forma inmediata, y posteriormente observar el éxito o fracaso de dichas acciones. Sin embargo, cuando actuamos como docentes lo hacemos de forma reflexiva, de manera que la compresión de un problema precede a la actuación ante el mismo. Nos gustaría que los estudiantes siguiesen un camino similar.

Se habla de unas Matemáticas reflexivas, que los estudiantes tengan una actitud crítica, pero ¿qué significa eso?

Y eso, ¿cómo se hace?

Parecen adecuadas las investigaciones (o cualquier otra denominación), entendidas como una forma de trabajar que intenta establecer un ambiente donde despierta el pensamiento. Lo difícil es medir «cuánto son de buenas». Lo importante es utilizarlas como un medio y no como un fin. Hasta que no se hagan no se sabe ni qué pueden ser ni a qué pueden llegar. Se busca que los estudiantes cojan confianza al enfrentarse a cualquier problema. Y a los jóvenes hay que animarles a investigar cuando estudian Magisterio, cuando aprenden a enseñar. Según Halmos, (1991: 33):

> Un profesor debe mostrar a sus alumnos cómo resolver problemas –y resolver problemas es hacer investigación, que puede y debe hacerse en muchos niveles diferentes– y un profesor debe ser capaz de reconocer en sus alumnos la habilidad para investigar, para poder animarles y darles consejos adecuados.

…se debería presentar a los estudiantes la posibilidad de aplicar lo que conocen en posibilidades cambiantes y no familiares, lo que permite que sigan sus propios caminos matemáticos y desarrollen sus propias ideas.

En esta situación, se debería presentar a los estudiantes la posibilidad de aplicar lo que conocen en posibilidades cambiantes y no familiares, lo que permite que sigan sus propios caminos matemáticos y desarrollen sus propias ideas. Para ello la presentación ocupa un lugar importante, especialmente para favorecer el interés y la motivación. E incluso puede ser interesante un periodo de preparación. También sería favorable que fuesen fácilmente entendibles y abordables. Situar a los estudiantes en grupos puede animar el trabajo cooperativo, pero eso no asegura que la discusión tenga lugar.

También hay que tener en cuenta que:

> Sobre la metodología en base a la resolución de problemas desearíamos añadir que tan importante como la resolución de problemas consideramos que es la «propuesta» de nuevos problemas, es decir, que los alumnos lleven al aula problemas de la vida real o imaginados, para los que hay que buscar el planteamiento matemático. El hecho de extractar el esquema matemático de situaciones problemáticas, dándoles forma tratable matemáticamente de acuerdo con modelos conocidos, es muy importante y debe ser estimulado. Es la mejor forma de estimular la creatividad» (Santaló, 1992: 86-87).

Polya solía decir que si no se puede resolver un problema se debería elegir una parte del mismo o buscar otro problema que parezca más sencillo, que no se sepa resolver, y entonces resolverlo. Luego resolver problemas es buscar problemas o, mejor, hallar el planteamiento correcto de los mismos. El mismo principio se aplica en la enseñanza. Se comenta de Sócrates, considerado por muchos uno de los mejores profesores de todos los tiempos, que decía:

> ¡no les cuentes cosas, pregúntales! No les resuelvas los problemas, plantéaselos. La mejor manera de enseñar no es dictar, sino preguntar, identificar nuevas metas y justificar los hechos.

Ya se ha explicado nuestro pensamiento de que no tiene sentido buscar el método por excelencia, sino que es más conveniente elegir en cada momento el adecuado, dependiendo de la actividad que se pretende realizar y de las características del grupo concreto de alumnos. No existen varitas mágicas. Cualquier estrategia de trabajo puede tener su importancia, pero en la actualidad se sigue investigando por qué ciertas metodologías consiguen mejores resultados que otras, con la intención de continuar mejorando.

Sí, sí. Pero eso, ¿cómo se hace?

José M.ª Chamoso
Facultad de Educación
Universidad de Salamanca
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesorado
de Matemáticas
William B. Rawson
School of Education
University of Exeter
England

Referencias

AMORE, B. D. (1994): «Lápices-Orettole-Przxetqzyw ¿Las imágenes mentales de los textos de las situaciones-problema influencian su resolución?, *Suma,* n.° 17, 111-116.

BRUNER, J. S. (1962): *The Process of Education*, Harvard University Press.

BURGHES, D. (1984): «Mathematical investigations». *Teaching Mathematics and its Applications*, n.° 3, 2, 47-52.

CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*, Síntesis, Madrid.

GAIRÍN SALLÁN, J. Mª (1996): «Del dicho al hecho...», *Suma*, n.° 21, 41-54.

GARDINER, A. (1989): *Discovering Mathematics. The Art of Investigation*, Oxford Science Publications, New York.

HALMOS, P. R. (1991): «¿Qué es un matemático?», *Epsilon,* n.° 20, 33-40.

H.M.I. (1985): *Mathematics from 5 to 16. Curriculum Matters 3,* Department of Education and Science, HMSO, London.

MITCHELL, C. H. y W. B. RAWSON (1998): «Developing Mathematical Reasoning at Key Stage 1 and 2», *Paper delivered at the British Educational Research Association Annual Conference*, The Queen's University of Belfast, 27-30 August.

MITCHELL, C. H. y W. B. RAWSON (2000): «Using Writing to Scaffold Children's Explanations in Mathematics'», en KOSHY (ed.): *Mathematica for Primary Teachers*, Routledge, London, 182-195.

RAWSON, W. B. (1997): «Working with Writing Frames in Mathematics», *Education 3 to 13*, n.° 25, 1, 49-54.

RAWSON, W. B. y J. M.ª CHAMOSO (1999): «¿Hacia formas de investigación en clase de Matemáticas?», *Actas de las IX JAEM,* septiembre 99, Lugo.

SANTALÓ, L. A. (1990): «Entrevista al profesor Santaló», *Epsilon,* n.° 18, 81-87.