De la geometría de Euclides a la geometría "a la Euclides": Procesos demostrativos mediados por Cabri Géomètre

Esp. Fernando Angulo Díaz[1]
Normal Superior Santiago de Cali.
Universidad del Valle-Colombia
ferandi28@hotmail.com

Resumen

Esta conferencia explicita algunas características de las pruebas euclidianas, tratando de dilucidar el cómo se explica que ellas, todavía mantengan su fuerza demostrativa y su poder de convicción, pese a la notoria informalidad con la que discurren. En una segunda instancia, en el taller se abordará desde una perspectiva didáctica, el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la demostración (método directo) de algunas proposiciones de la geometría euclidiana y la solución de problemas de construcción geométrica con la mediación de un ambiente de geometría dinámica (AGD) como lo es el Cabri-Géomètre, enfocando la demostración no sólo desde su función de validación sino también desde su función explicativa, pues no es sólo cuestión de asegurarse de la veracidad de una proposición que la proporciona en mismo ambiente, sino de explicar por qué la proposición es verdadera en términos de otros resultados geométricos ya conocidos, en otras palabras, cómo es consecuencia lógica de estos otros resultados, y para ello es necesario avanzar en una primera aproximación a la construcción de una axiomática explícita con los estudiantes, puesto que la demostración sólo tiene sentido en el seno de una teoría específica.

Introducción

La enseñanza de la geometría, de una manera muy estrecha, ha estado ligada a la formación del razonamiento deductivo necesario para la demostración en Matemáticas, por tanto los profesores de secundaria tratan de enfatizar demasiado en la actividad de demostrar tal como lo hacían los matemáticos profesionales, de acuerdo con los cánones del método axiomático-deductivo expuesto en los Elementos de Euclides, éste hecho obligaba a la mayoría de los estudiantes a imitar o simplemente recitar las acciones del profesor, puesto que no lograban compresión, ni destreza, ni un genuino desarrollo del razonamiento deductivo y por ende de los procesos demostrativos.

Dado que comúnmente en la educación secundaria al abordar la demostración de ciertos teoremas de la geometría euclidiana (en el ambiente tradicional de lápiz y papel) se le niega al alumno la oportunidad de explorar y conjeturar, presentándole un conocimiento ya elaborado y requiriéndole que construya la demostración de tipo hipotético-deductiva, se presentan muchas dificultades por parte de la mayoría de los estudiantes y de ahí que los resultados satisfactorios sean tan escasos. Una condición necesaria para lograr enseñar a demostrar en contextos escolares es conseguir un

1 Candidato a optar el título de Magíster en educación, énfasis en educación matemática-Universidad del Valle

ambiente activo de trabajo, con muchas oportunidades de explorar y conjeturar, puesto que si un estudiante descubre cierta propiedad por si mismo, estará más motivado hacia su comprensión y hacia la búsqueda de una demostración convincente.

Algunas de las críticas más relevantes hechas a los Elementos de Euclides, fueron formuladas por reconocidos matemáticos, tales como Klein, Poincaré, Russell, Hilbert o por el grupo Bourbaki. A menudo se señala que en los Elementos hay una clara intención platónica que se manifiesta en el cuidado puesto en la conexión lógica y en el descuido de las aplicaciones, a este respecto ni siquiera se menciona la regla y el compás, también se menciona que el sistema euclidiano de postulados es incompleto, con definiciones vagas e inutilizables y se presentan inconsistencias de método ya que el patrón de rigor no es el mismo en toda la obra, hay demasiado apego por la certeza intuitiva, etc.

La mayoría de criticas anteriores, están bien fundamentadas a la luz de las teorías axiomáticas modernas, pero también se reconoce que hasta el siglo XIX, la única parte axiomatizada de las Matemáticas era la geometría gracias a la obra de Euclides y ella se constituyó en modelo para muchos celebres científicos y filósofos como Newton, Lagrange, Kant o Spinoza entre otros. Si bien las pruebas euclidianas se basaban en método de síntesis, es decir, se parte de unos axiomas o principios y de allí se obtienen a través de deducción lógica las demás verdades o teoremas de la teoría, se reconoce que a la par del método de síntesis, subyace otro método conocido como el de análisis, éste último no es tanto un método de justificación o prueba como el primero sino más bien de descubrimiento o de resolución de problemas, en él se parte de suponer lo que se busca como si ya hubiese sido hecho, es decir, se ve el problema ya resuelto, para luego indagar el resultado y trabajar en un orden inverso hasta alcanzar algo ya conocido o que pertenezca a la clase de los primeros axiomas o principios, para luego por medio de la síntesis poder revertir el proceso.

El método de análisis es sumamente valioso desde el punto de vista didáctico, pero lamentablemente rara vez es expuesto en la presentación de las pruebas euclidianas, las cuales pareciera que se deben a la genialidad e iluminación del geómetra alejandrino, quien las presenta en una forma depurada, libre de rastros de dudas, de caminos errados o dificultades y se deja al lector, la fatigosa y difícil tarea de elaborar por su cuenta el análisis.

Referentes teóricos

Inicialmente es necesario el explicitar lo que se va a entender por demostración en este taller, por eso de acuerdo a Balacheff (1987), se asumirá que “las pruebas son explicaciones en que la explicitación del carácter verdadero de la afirmación se realiza sobre la base de normas aceptadas por una comunidad dada en un momento dado, cuando la comunidad involucrada es la Matemática y las normas plantean la presentación de una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema previo o un elemento derivado mediante reglas preestablecidas de los enunciados que le preceden, tales pruebas reciben el nombre de demostraciones”. En el contexto educativo, la demostración se asume como un proceso social a través del cual una persona descubre que una propiedad es cierta, la comprende y comunica, explicando por qué es verdadera y a la vez es capaz de integrarla dentro de un sistema de conceptos y relaciones que tienen un significado determinado para ella y el resto del grupo con el cual interactúa.

La demostración, presenta la necesidad de existir en relación a una axiomática explícita, por tanto la pertinencia de avanzar en la línea de la construcción de una axiomática específica con los estudiantes y la mediación de Cabri Géomètre, radica en el hecho que el aprendizaje de la demostración demanda un cambio de visión de la propia geometría, pasar de la mera verificación perceptual o experimental al razonamiento propiamente deductivo, pues el primer objetivo de una demostración es el de establecer la validez de un resultado al interior de un sistema teórico especifico.

La axiomatización de una teoría básicamente consiste en presentarla de una forma estructurada, usualmente se caracteriza por ser un sistema donde todos los términos u objetos primitivos y las proposiciones no demostradas, llamados axiomas, se enuncian explícitamente y los cuales se ajustan a unos requerimientos mínimos de consistencia, suficiencia e independencia, siendo estos axiomas fijados como hipótesis a partir de los cuales pueden construirse las demás proposiciones del sistema, siguiendo un reglas lógicas determinadas.

Las pruebas euclidianas están inspiradas por representaciones visuales, pero se formulan verbalmente para dar mayor generalidad a las pruebas, luego un teorema en geometría euclidiana especifica una cierta configuración geométrica. La actividad geométrica euclidiana se realiza en dos sistemas de representación, el de las figuras y el del discurso, el primero permite repre¬sentar visualmente los objetos geométricos y observar sus propiedades y el segun¬do, permite enunciar las definiciones, los teoremas y sus demostraciones.

Los procesos productivos en geometría tradicionalmente se llevan a cabo de manera coordinada en ambos sistemas, es decir, para descubrir un resultado, para resolver un problema o para elaborar una demostración, es necesario apo¬yarse y realizar transformaciones en el registro de las figuras, así como, simultáneamente hacer tratamientos en el nivel del discurso a través de la enunciación de definiciones, de descripciones y proposiciones y, con ellas, de la construcción de argumentos.

La Geometría de Euclides

De forma general, se podría tratar de caracterizar los Elementos, empezando por afirmar que el método seguido por Euclides se basa en la utilización de cadenas deductivas que obtienen nuevos elementos a partir de otros anteriores. Puesto que no se puede retroceder infinitamente en la búsqueda de elementos anteriores, en un momento determinado hay que establecer unos que serán los principios fundamentales de la teoría, en este punto el geómetra alejandrino retomó las ideas de Aristóteles y que en los Elementos corresponden a los postulados y nociones comunes, pero previamente a la selección de los postulados y nociones comunes, se han establecido unas definiciones básicas de los objetos geométricos involucrados a lo largo de toda la teoría a desarrollar.

En los Elementos de Euclides, se observa que una vez concluida la redacción de los postulados y nociones comunes, sin más preámbulos vienen las 48 proposiciones del libro I. Una proposición prueba que se verifica una determinada propiedad o que se puede realizar cierta construcción utilizando únicamente las definiciones, los postulados, nociones comunes y proposiciones anteriores que ya han sido debidamente demostradas.

Antes de intentar esclarecer las posibles claves de la "funcionalidad y largo reinado" de las pruebas euclidianas, tomando como ejemplo concreto la primera proposición del libro I de los Elementos, es pertinente recordar la estructura de las demostraciones o pruebas euclidianas:

Enunciado: frase en la que se declara lo que se quiere demostrar o lo que se quiere construir.

Exposición: apartado en el que se concretan los datos del enunciado en un dibujo o se exponen los objetos que van a intervenir en los pasos posteriores.

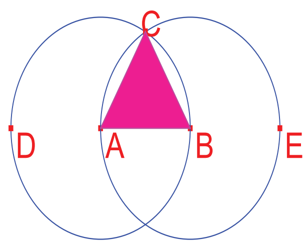
Especificación: frase en la que se concretan las condiciones que deben cumplir los datos del enunciado.

Construcción: parte en la que se completa el dibujo añadiéndole las líneas o circunferencias que se necesiten para poder demostrar la afirmación del enunciado.

Prueba: apartado dedicado a justificar los pasos lógicos necesarios para deducir la tesis buscada o para construir la figura deseada a partir de los resultados anteriores.

Conclusión: último párrafo de la proposición. En él se repite la parte del enunciado que indica lo que se quería lograr y se termina diciendo "Que es lo que se quería demostrar" (Q.E.D. por sus siglas en latín- quod erat demonstrandum) en los teoremas y "Que es lo que había que hacer (Q.E.F. por sus siglas en latín-quod erat faciendum-) en el caso de los problemas.

A continuación se presenta la demostración de la proposición número 1, se hace una reconstrucción de la configuración geométrica respectiva y además se especifican entre corchetes los pasos "canónicos" del desarrollo de la demostración:



- «Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada [prótasis, enunciado].
- Sea la <recta> AB la recta finita dada [ékthesis, exposición o introducción del caso a considerar por referencia deíctica a una línea disponible o trazada].
- Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero [diorismós, determinación o especificación del objeto de la prueba por relación al caso expuesto].
- Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo BCD (Post. 3), y con el centro B y la distancia BA descríbase a su vez el círculo ACE (Post. 3), y a partir del punto C donde los círculos se cortan entre sí, trácense las rectas CA y CB hasta los puntos A, B respectivamente (Post. 1)[kataskeué, urdimbre o disposición de construcciones y relaciones a partir de lo dado y en orden a la obtención del resultado propuesto].
- Y puesto que el punto A es el centro del círculo CDB, AC es igual a AB (Def. 15); puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo CAE, BC es igual a AB (Def. 15); pero se ha probado que AC es igual a AB; por tanto, cada una de las <rectas> AC, BC es igual a la AB. Ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí (N.C. 1); por tanto, la AC es también igual a CB; luego, las tres <rectas> AC, AB, BC son iguales entre sí. [apódeixis, proceso demostrativo propiamente dicho].
- Por consiguiente, el triángulo ABC es equilátero y ha sido construido sobre la <recta> finita dada AB. «Que es lo que había que hacer.» [Sympérasma, conclusión].

Parece que sólo basta mirar el dibujo trazado al hilo del discurso para que la equilateralidad del triángulo resulte «inmediatamente evidente». Dicho de otro modo, mientras el desarrollo discursivo de la prueba procura hacer saber que el triángulo en cuestión es equilátero, la imagen cómplice -gráfica o mental- hace ver este resultado, hace que la equilateralidad del triángulo ABC salte a la vista. La integración de ambos aspectos, el discursivo y el diagramático, convierte la construcción en una proposición a todas luces incontestable, pues bien, en esta complicidad entre el diagrama y el discurso, entre hacer ver y hacer saber, reside seguramente una de las claves del éxito del rigor informal de las pruebas euclídeas.

A nivel de la educación secundaria, comúnmente las pruebas euclidianas no son presentadas de acuerdo a su estructura original, se recurre a formas más simples que son adaptaciones de la misma obra, como por ejemplo de la versión inglesa de Thomas Heath, aunque también es frecuente la presentaciones de las pruebas a doble columna (proposiciones-razones), muy típicas del sistema de enseñanza anglosajón.

La Geometría "a la Euclides"

La incursión de las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) en ambientes escolares ha sido reportada en diversas investigaciones en relación al impacto de la introducción de estas herramientas tecnológicas, un caso particular lo constituye los estudios de Trouche (2004), quien señala que la utilización de tales herramientas en las clases no puede ser neutral ni espontánea, ella resulta de un proceso de génesis instrumental, este proceso está ligado a cada usuario por sus conocimientos iniciales y los esquemas de utilización que hará de la herramienta. Lamentablemente para muchos docentes y estudiantes, las TICS sólo se perciben como herramientas técnicas o artefactos físicos cuyo empleo únicamente facilita o hace más eficiente las formas de acción que tradicionalmente han ocurrido de otra manera, por tanto se deja de lado el sentido de herramienta semiótica o psicológica propia de la noción de acción mediada planteada en el enfoque vygotskiano.

El programa Cabri-Géomètre se enmarca dentro de los ambientes de geometría dinámica (AGD) y los elementos característicos que hacen de Cabri un instrumento de mediación semiótica, según Mariotti (2001), conciernen a su naturaleza de artefacto cultural en tanto que es utilizado en actividades escolares puesto que incorpora en particular una gran parte de la teoría elemental de la geometría euclidiana del plano. Los objetos computarizados a través de los cuales el estudiante interactúa con el ambiente, pueden ser pensados como unos signos exteriores con una referencia a la teoría en juego y sus elementos (axiomas, definiciones, teoremas, etc.) y como tales ellos pueden devenir en instrumentos de mediación semiótica utilizados por el profesor para realizar unas actividades de clase con el claro objetivo de iniciar a los estudiantes en el estudio de la geometría elemental desde una perspectiva teórica, es por esto que se plantea la necesidad de la construcción de la mayoría de las herramientas básicas del programa por parte de los estudiantes, lo cual se consigue gracias a la interacción con el profesor y permite la puesta en lugar de un verdadero proceso de mediación semiótica para la posterior apropiación y utilización de ellas como instrumentos semióticos en la resolución de problemas y la construcción dinámica de teoremas.

Colette Laborde (2001), reconoce en la investigación que concierne el uso de los Ambientes de Geometría Dinámica en el aula, dos propósitos distintos: preparar a los estudiantes para aprender a demostrar y otro, enseñar a demostrar. En primer caso se busca que los estudiantes se hagan conscientes de la dependencia entre propiedades geométricas y sean capaces de formular tal dependencia en lenguaje matemático. En el segundo caso se busca enseñar a demostrar a partir bien sea del establecimiento de un contrato didáctico en el cual las conjeturas y las construcciones deben ser justificadas a la luz de la teoría, o bien de la introducción de la necesidad de demostrar como recurso para superar contradicciones o incertidumbres.

Uno de los propósitos fundamentales de realizar construcciones geométricas en Cabri-Géomètre, es justamente el de introducir a los estudiantes a un acercamiento axiomático-deductivo de la geometría, seleccionando ciertas declaraciones como axiomas para posteriormente ir derivando o deduciendo lógicamente de ellos, un conjunto de proposiciones (teoremas o problemas de construcción de acuerdo a la clasificación de Euclides). Cuando el orden de las demostraciones viene impuesto por la necesidad de los resultados, es decir, el lugar de cada nueva proposición viene determinada por su pertinencia dentro de la solución de cierto tipo de problema, esta clase de axiomatización es la que algunos llaman constructiva, sin embargo desde una perspectiva histórica, la geometría euclidiana no se constituyó estrictamente de esta manera, si no que fue reorganizada de esta forma aunque el orden de las demostraciones en los Elementos está básicamente determinado por el mero proceso de deducción más que por el orden de invención.

Se reconoce la importancia de los diagramas o figuras en las demostraciones euclidianas, las figuras cumplen una función heurística clave en la resolución de problemas de geometría, pero el ejercicio de esa función no se produce espontáneamente, re¬quiere un entrenamiento consciente que permita al sujeto lograr una coordina¬ción de diferentes maneras de aprehender las figuras y de acuerdo con Duval (1999), un dibujo puede ser cognitivamente aprehendido de cuatro maneras diferentes: aprehensión perceptiva, aprehensión secuencial, aprehensión discursi¬va y aprehensión operativa". Un análisis en esta vía resulta vital en consideración con el papel que juega la visualización dinámica en los AGD, no sólo durante la fase de exploración y conjeturacion, sino que también es fundamental durante la búsqueda de argumentos necesarios para la fase de estructuración deductiva y construcción de la demostración.

La visualización dinámica que ofrecen los ambientes de geometría dinámica, no queda relegada a un simple papel ilustrativo de las afirmaciones geométricas, ella es reconocida como un componente vital del razonamiento, puesto que está ligada a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo. La diferencia entre dibujo y figura ha sido establecida claramente en los AGD, el dibujo corresponde a las representaciones gráficas que se tienen de un objeto geométrico y la figura se refiere al significado que se le asigna a un objeto geométrico a través de sus dibujos o representaciones gráficas. Las figuras o construcciones hechas en Cabri se comportarán de acuerdo con lo establecido en la teoría de la geometría euclidiana, es decir, la estabilidad de una construcción bajo el efecto del "arrastre" corresponde al hecho que en el marco de la teoría que subyace en el ambiente (la geometría euclidiana), existe un grupo de axiomas y/o teoremas que validan la construcción realizada y por ende los resultados obtenidos a partir de ella.

Los problemas de construcción en Cabri devienen así, de manera más natural, en problemas teóricos y una vez que ellos son insertados en el ambiente, se pasa a la cuestión de explicar por qué una construcción o un hecho geométrico particular, se mantiene estable en el desplazamiento o arrastre. Cabe señalar que la interpretación de las invarianzas perceptuales registradas en la pantalla, utilizando términos precisos de la teoría disponible, no es simple ni inmediata, requiere de un trabajo específico de los procesos de visualización y de razonamiento además de la adecuada coordinación entre ellos.

Construcción de un microsistema axiomático con la mediación de Cabri-Géomètre

La mayor virtud de los AGD radica en que hacen "ver" los objetos geométricos como manipulables y permiten actuar sobre ellos, es decir, se da una reificación de dichos objetos y sus relaciones. Una primera aproximación a la construcción de un sistema axiomático con la participación activa de los estudiantes, tendrá un fuerte referente intuitivo por las características mismas del ambiente empleado pero se harán efectivas algunas modificaciones a la luz de las teorías axiomáticas modernas, como por ejemplo, partir de tres términos no definidos (punto, recta y plano), con la ayuda de los cuales se propone definir los demás objetos geométricos del sistema (segmento, rayo, ángulo, triángulo, cuadrilátero, etc.)[2] . Cabe señalar que las demostraciones realizadas corresponden exclusivamente al método directo dado el nivel de escolaridad de los estudiantes, se hace uso del compás

2 Ver el anexo en el cual se explicitan los términos no definidos, los axiomas y definiciones que se han establecido para el microsistema axiomático construido con los estudiantes con la mediación de Cabri.

virtual de Cabri (no colapsable) y se recurre a la medida solamente en las fases de exploración y conjeturacion, previas a la construcción de la demostración.

En el contrato didáctico, explícitamente se ha establecido que la medida no será admitida como argumento válido en la estructura de la prueba deductiva, pese a que el funcionamiento del ambiente hace que toda propiedad geométrica de una figura sea invariante al arrastre, es decir, la prueba o test del arrastre está legitimando o validando una propiedad pero no está proporcionando la explicación o justificación de por qué es verdadera, la cual se debe expresar por medio del encadenamiento deductivo que proporciona la demostración que explicita el carácter válido de la conclusión, puesto que ésta se deriva necesariamente de las premisas, en otras palabras, las premisas implican lógicamente la conclusión o tesis.

Atendiendo a los objetivos trazados y por motivos de tiempo, no se presentarán las actividades iniciales propuestas para la construcción de algunos teoremas relativos a los ángulos, las construcciones correspondientes a rectas paralelas, rectas perpendiculares, punto medio de un segmento, triángulos, bisectriz de un ángulo, mediatriz de un segmento.

Un ejemplo de problema de construcción geométrica a "lo Euclides"

Es crucial el papel del enunciado en las situaciones didácticas que se le presentan al estudiante, las actividades o problemas no deben contener en forma explicita la respuesta o el resultado que se desea institucionalizar (demostrar que … es …), por tanto el problema debe ser abierto de tal forma que el alumno esté invitado a tomar posesión de la situación (Radford, L. 1994), esto se evidenciará en la forma como se han reformulado las situaciones o actividades que conducirán a la formulación del teorema que se desea demostrar e institucionalizar o aquellas que corresponden a la resolución de un problema que involucra la utilización de teoremas previamente demostrados.

La forma de escribir y presentar una demostración, resulta también de vital importancia de tal forma que estructural y lógicamente esté correcta y que además brinde la facilidad necesaria para poder entenderla, aunque algunos profesores consideran que éste es un aspecto puramente formal y secundario; la presentación de una demostración en términos formales podría asumirse como una cadena de relaciones semióticas.

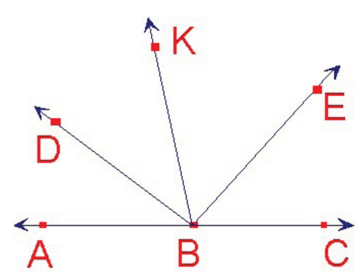
Podemos observar tres formas principales de presentar las demostraciones:

- La demostración a "dos columnas", muy típica de los países sajones, en particular la mayoría de los textos de geometría americanos, se caracterizan por tener esta estructura rígida que presenta la información en dos columnas: En la de la izquierda se escriben las afirmaciones o deducciones que conforman el desarrollo lógico de la demostración y en la columna de la derecha se escriben las justificaciones de la veracidad de las afirmaciones escritas en la primera.
- La demostración mediante "diagramas de flujo" o "deductogramas", esta forma es muy visual y permite ver con facilidad las relaciones entre las partes de la demostración. Este estilo está presente casi exclusivamente en libros de textos relativamente recientes y que han sido producidos como resultado directo de investigaciones didácticas, principalmente francesas. Su inconveniente es que sólo resulta útil en demostraciones poco complejas, si bien la mayoría de las demostraciones que se pueden hacer en Secundaria son suficientemente simples para poder representarlas de esta manera.
- La demostración "verbal" o por párrafos, corresponde a la manera clásica como Euclides presentaba sus pruebas en los Elementos, esta forma es muy habitual en los libros de texto españoles y se caracteriza por presentar un texto escrito que se corresponde fielmente con el discurso ver-

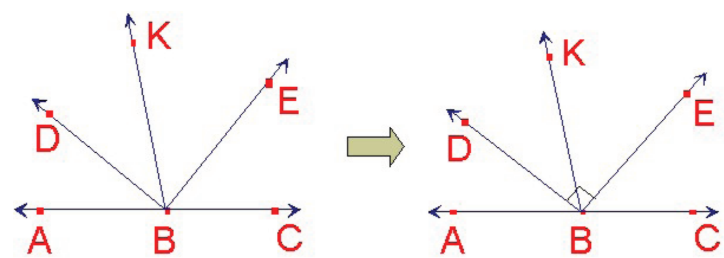
bal del profesor en el tablero, en algunos casos, la forma escrita es más estructurada y en otros casos lo es menos. Esta estilo es el que se ha adoptado en las prácticas con los estudiantes con los cuales se ha venido desarrollando la propuesta didáctica porque quizás sea la que mayor similitud presenta con la forma natural en la cual argumentamos en nuestras practicas cotidianas, salvo que se recurre a argumentos socialmente aceptados por una comunidad académica y que corresponden a una teoría especifica, que en este caso es el de la geometría plana euclidiana y en concordancia será la que se trabaje en este taller.

En los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (1998), no se hace referencia alguna a las distintas formas de presentar una demostración, solo se limita a presentar algunos ejemplos particulares en los cuales se adopta bien sea el primer estilo o el tercero, cabe señalar que los textos escolares de mayor circulación en nuestro medio, tienen una notaria preferencia por la forma sajona o de doble columna y lo mismo se evidencia en los textos de geometría a nivel universitario dada la procedencia de la mayoría de ellos.

A continuación se presentan la respectiva ficha de trabajo de una actividad sobre un problema de construcción geométrica de enunciado abierto que demanda la producción de una conjetura y la construcción de su demostración:

Situación problema[3]	1. Dada la recta ℓ que divide al plano en dos semiplanos H y J. Sean tres puntos A, B y C sobre la recta ℓ tal que el rayo BA y el rayo BC son opuestos, sea BK un rayo en el semiplano H y sean BD y BE las bisectrices de los ángulos ABK y KBC respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del rayo BK para que la medida del ángulo DBE sea máxima?
Construcción	
Procedimiento de la construcción	Se traza la recta ℓ que divide al plano en dos semiplanos H y J. Sobre la recta ℓ se trazan tres puntos A, B y C, tal que los rayos BA y BC sean opuestos. Se traza el rayo BK en el semiplano H. Se trazan las bisectrices BD y BE de los ángulos ABK y KBC respectivamente. Se mide el ángulo DBE
Conjetura(s) propuesta(s)	Se arrastra el punto K en el semiplano H y se observa la invarianza de la medida del ángulo DBE: "Para cualquier posición del rayo BK en el semiplano H, la medida del ángulo DBE siempre es de 90º"
Definiciones empleadas	Semiplano, rayo, rayos opuestos, bisectriz de un ángulo, medida de un ángulo, ángulo par lineal, ángulos suplementarios.
Axiomas empleados	- Existe una recta en el plano - Una recta divide al plano en dos semiplanos. - En un plano dado, los rayos que parten del vértice de un ángulo y que pasan por un conjunto de puntos en el interior del ángulo, dividen al ángulo en ángulos consecutivos y la suma de cuyas medidas es igual a la medida del ángulo dado.

3 Versión tomada del texto "Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemática" (2006).Samper, Carmen y otras.con la mediación de Cabri.

Teoremas utilizados	Dos ángulos adyacentes cuyos lados no comunes forman un ángulo de lados colineales son suplementarios.
Justificación	Sean a y b las medidas de los ángulos ABK y KBC respectivamente, luego a + b = 180º puesto que los ángulos ABK y KBC al formar un par lineal son ángulos suplementarios. a/2 y b/2 son las medidas de los ángulos DBK y KBE respectivamente de acuerdo a la definición de bisectriz de un ángulo. a/2 + b/2 = (a + b)/2 por suma de fracciones homogéneas pero como a + b = 180º entonces a/2 + b/2 =180º/2 y al simplificar se obtiene que a/2 + b/2 =90º Ahora m $\angle$ DBE = m $\angle$ DBK + m $\angle$ KBE por el axioma de adición de ángulos entonces m $\angle$ DBE = a/2 + b/2 y se puede concluir que m $\angle$ DBE = 90º
Teorema demostrado	El ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios es recto.
Esquema figural del teorema	

Conclusiones

Un breve estudio de las características de las pruebas euclidianas, pone de manifiesto en primer lugar, que los objetos de la geometría (puntos, figuras, cuerpos, etc.) no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico, conceptualizado; esto trae ya un primer problema didáctico, comprender que los dibujos trazados son representaciones de esos objetos teóricos, no esta tarea fácil ni inmediata de soslayar. En segundo lugar, queda claro que la demostración presenta la necesidad de existir en el seno de una teoría en particular, por tanto la pertinencia de avanzar en la construcción de un microsistema axiomático explícito con los estudiantes, radica en el hecho de que el aprendizaje la demostración demanda un cambio de visión de la propia geometría, pasar de la mera verificación perceptual o experimental al razonamiento propiamente deductivo, pues el objetivo principal de una demostración es el de establecer la validez de un resultado al interior de un sistema teórico especifico.

La demostración en un primer acercamiento, no puede reducirse a una actividad exclusivamente sintáctica, un mero juego deductivo, por el contrario, en la actividad demostrativa, la cognición se dirige a la construcción de un universo matemático que funciona de modo significativo para el estudiante, por tanto la demostración conlleva la construcción de los objetos, sus relaciones y propiedades; resaltando el hecho que la interacción social juega un papel central en el aprendizaje de la demostración, ya que es en medio del debate y la puesta en común donde tiene sentido el determinar el valor de verdad de una aserción matemática, de tal suerte que la propia demostración se constituya en un ámbito de creación del pensamiento matemático del estudiante.

La construcción del conocimiento es una actividad mediada, es decir, el conocimiento construido no es independiente de los instrumentos de mediación empleados. La incursión de las TICs en ambientes escolares ha sido reportada en diversas investigaciones en relación al impacto de la introducción de estas herramientas tecnológicas, un caso particular lo constituye los estudios de Trouche (2004), quien señala que la utilización de tales herramientas en las clases no puede ser neutral ni espontánea, ella resulta de un proceso de génesis instrumental, este proceso está ligado a cada usuario por sus conocimientos iniciales y los esquemas de utilización que hará de la herramienta. Las TICs y particularmente algunos software de geometría dinámica pueden convertirse en mediadores semióticos entre el conocimiento geométrico y el estudiante.

Mariotti (2001), estudia el papel de Cabri-Géomètre en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, señala que la estabilidad de una construcción bajo el efecto del arrastre corresponde al hecho que en el marco de la teoría que subyace en el ambiente (la geometría euclidiana), existe un teorema que valida tanto la construcción realizada y por ende el resultado obtenido; luego los problemas de construcción en Cabri-Géomètre devienen así, de manera más natural, en problemas teóricos y una vez que ellos son insertados en el ambiente, se pasa a la cuestión de explicar por qué una construcción y un hecho geométrico particular es estable en el desplazamiento o arrastre, dando cabida a la construcción de los procesos demostrativos pertinentes. Cabe señalar que la interpretación de las invarianzas perceptuales registradas en la pantalla, utilizando términos precisos de la teoría disponible, no es simple ni inmediata, requiere de la puesta en escena de secuencias didácticas bien estructuradas que faciliten en los estudiantes la comprensión de que ciertos hechos geométricos son consecuencia de otros (necesidad epistémica).

El contexto que da significado a la tarea de explicar o querer demostrar, es la resistencia de una figura al arrastre y la permanencia de algunas características bajo el arrastre. Es a raíz del conocimiento geométrico que tienen los estudiantes acerca de algunas definiciones, axiomas, relaciones o teoremas básicos que pueden "explicar" una nueva propiedad o resultado descubierto, las explicaciones de hechos geométricos no emergen en el vacío, es decir, se originan a partir de unas estructuras y unos conocimientos existentes.

Los estudiantes de secundaria no pueden hacer una transición rápida desde las vías empíricas de justificación hacia las vías formales, dicho paso es lento y debe inicialmente estar apoyado en métodos empíricos usados por ellos. Una condición necesaria para lograr enseñar demostraciones en contextos escolares es conseguir una esfera activa de trabajo, con muchas oportunidades de explorar y conjeturar. Si un alumno descubre cierta propiedad por si mismo, estará más motivado hacia su comprensión y hacia la búsqueda de una demostración convincente.

La transición hacia los esquemas analíticos (transformacionales y axiomáticos) es un proceso lento y complejo, tanto a nivel cognitivo como didáctico, no es el software dinámico per se, ni la interacción espontánea la que puede generar buenas ¨explicaciones¨ a distintos hechos geométricos observados o inferidos, sino el adecuado engranaje de varios elementos tales como el diseño guiado de la actividad, la retroalimentación del sistema, el cuerpo teórico que ha construido y del cual se ha apropiado convenientemente el estudiante, la contrastación y socialización de ideas con sus compañeros y el rol mediador del docente.

Referencias Bibliográficas

- BALACHEFF, N. (1987). "Processus de preuve et situation de validation". *Educational Studies in Mathematics.*
- DUVAL, R. (1995a). "Semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels". Traducción al español: "Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales" (1999). Myriam Vega. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

- EUCLIDES. *Elementos*. Libro I. Traducción al español de Mª. Puertas (1991). Ed. Gredos. Madrid.
- LABORDE, C. (2001). “Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for complex activity of proving”. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 151-161.
- MARIOTTI, A. (2001). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*. pp. 44-53.
- MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. República de Colombia.
  - “Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales”. (2004).
  - “Estándares para el área de Matemáticas”. (2003).
  - “Nuevas tecnologías y currículo de Matemáticas”. (1999).
  - “Matemáticas. Lineamientos curriculares”. (1998).
- RADFORD, L. (1994). “La Enseñanza de la demostración: Aspectos teóricos y prácticos”. En *Revista Educación Matemática*, Vol. 6. Nº3. México.
- SAMPER, C. et al. (2006). “Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de Matemáticas”. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- VEGA, L. (2001). “El rigor informal de las pruebas clásicas”. Del pensar y su memoria: Ensayos en honor al profesor Emilio LLedó.

Anexo

Microsistema axiomático propuesto

- Términos no definidos: punto, recta y plano.
- Definiciones:

  Puntos colineales (1), semiplano abierto(2) y cerrado(3), segmento(4), rayo(5), punto medio de un segmento(6), rayos opuestos(7), ángulo(8), medida de un ángulo(9), clases de ángulos (agudo(10), recto(11), obtuso(12), par lineal(13), congruentes(14), adyacentes(15), complementarios(16), suplementarios(17) y opuestos por el vértice(18)), ángulos formados entre dos rectas cortadas por una transversal (correspondientes(19), externos(20), internos(21), alternos internos(22), alternos externos(23)), rectas paralelas(24), rectas perpendiculares(25), distancia de un punto a una recta(26), mediatriz de un segmento(27), bisectriz de un ángulo(28), triángulo(29), clases de triángulos (equilátero(30), isósceles(31), escaleno(32), acutángulo(33), rectángulo(34), obtusángulo(35)), triángulos congruentes(36), líneas notables de un triángulo (mediana(37), mediatriz(38), bisectriz(39), altura(40)), cuadrilátero(41), clases de cuadriláteros (paralelogramos(42), trapecios(43) y trapezoides(44)), clases de paralelogramos(rombo(45), rectángulo(46), cuadrado(47) y romboide(48)), lugar geométrico(49), circulo(50), circunferencia(51), radio de una circunferencia(51), cuerda de una circunferencia(52), diámetro de una circunferencia(53), circunferencias congruentes(54), circunferencias secantes(55), circunferencias tangente(56), recta tangente a una circunferencia(57), recta secante a una circunferencia(58)

Axiomas:

Primer grupo:

1. Existe un plano y una recta en el plano.
2. Una recta contiene por lo menos a dos puntos; un plano contiene por lo menos a tres puntos, no todos colineales
3. Una recta divide al plano en dos semiplanos disjuntos.

4. Para cada par de puntos distintos, existe exactamente una recta que contiene a ambos puntos (postulado de la recta).
5. A cada pareja de puntos distintos le corresponde un número positivo único, llamado distancia entre los dos puntos.
6. Si A y B son dos puntos distintos, entonces existe por lo menos un punto C tal que C $\in \overline{AB}$
7. Un conjunto de puntos que se encuentran entre los puntos extremos de un segmento rectilíneo divide al segmento en un conjunto de segmentos consecutivos, la suma de cuyas longitudes es igual a la longitud del segmento dado. (postulado de la adición de los segmentos).
8. En un plano dado, los rayos que parten del vértice de un ángulo y que pasan por un conjunto de puntos en el interior del ángulo, dividen al ángulo en ángulos consecutivos y la suma de cuyas medidas es igual a la medida del ángulo dado.(postulado de la adición de los ángulos)

Segundo grupo:

9. Un segmento tiene un solo punto medio.
10. Un ángulo tiene una y sólo una bisectriz.
11. En un plano puede trazarse uno y sólo un círculo con un punto dado como centro y un segmento dado como radio.
12. Por un punto dado, exterior a una recta dada, pasa una y sólo una recta paralela a la recta dada (postulado de la paralela).
13. Por un punto cualquiera de una recta, pasa una y sólo una recta perpendicular a la recta dada.
14. Por un punto dado, exterior a una recta dada, pasa una y sólo una recta perpendicular a la recta dada.
15. El segmento más corto que une un punto a una recta es el segmento perpendicular.
16. Dos rectas paralelas a la misma recta, son paralelas entre si.
17. Si dos rectas son perpendiculares a la misma recta, son mutuamente paralelas.
18. Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos correspondientes son congruentes.

Tercer grupo:

19. Dos círculos con radios a y b se intersectan exactamente en dos puntos, si la distancia c entre sus centros es menor que la suma de sus radios pero mayor que la diferencia de ellos(los puntos de intersección se encontrarán en los semiplanos diferentes formados por la recta que une los centros).
20. Una recta y un círculo se intersectan exactamente en dos puntos si la recta contiene un punto en el interior del círculo.
21. Dos triángulos son congruentes si dos de los lados y el ángulo comprendido entre ellos de uno de los triángulos, son respectivamente congruentes a dos lados de los lados y el ángulo comprendido entre ellos del otro triángulo.
22. Si dos triángulos tienen dos de los ángulos y el lado incluido de uno, congruentes a los dos ángulos correspondientes y al lado incluido del otro, los triángulos son congruentes.
23. Si dos triángulos tienen los tres lados de uno respectivamente congruentes a los tres lados del otro, los triángulos son congruentes.

Teoremas

1. Si dos rectas distintas en un plano se intersectan en un punto, entonces su intersección es cuando más un punto.
2. Todo segmento es congruente con si mismo. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (teorema reflexivo de segmentos)
3. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$. (teorema simétrico de segmentos)
4. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. (teorema transitivo de segmentos)
5. Si B está entre A y C, E está entre D y F, y si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (teorema de la adición de segmentos)
6. Si B está entre A y C, E está entre D y F, y si $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (teorema de la sustracción de segmentos)
7. Todo ángulo es congruente con si mismo. ∠A ≅ ∠A (teorema reflexivo de ángulos)
8. Si ∠A ≅ ∠B, entonces ∠B ≅ ∠A. (teorema simétrico de ángulos)
9. Si ∠A ≅ ∠B y ∠B ≅ ∠C, entonces ∠A ≅ ∠C. (teorema transitivo de ángulos).
10. Si D está en el interior de ∠ABC, P está en el interior de ∠RST, ∠ABD ≅ ∠RSP y ∠DBC ≅ ∠PST, entonces ∠ABC ≅ ∠RST (teorema de la adición de ángulos).
11. Si D está en el interior de ∠ABC, P está en el interior de ∠RST, ∠ABC ≅ ∠RST y ∠ABD ≅ ∠RSP, entonces ∠DBC ≅ ∠PST (teorema de la sustracción de ángulos).
12. Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado.
13. Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.
14. Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.
15. Si dos ángulos forman un par lineal son suplementarios.
16. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
17. Construir la mediatriz de un segmento dado.
18. Las rectas perpendiculares forman cuatro ángulos rectos.
19. Dos triángulos rectángulos son congruentes si los dos catetos de uno de ellos son congruentes a los correspondientes catetos del otro triángulo
20. Bisecar un ángulo dado.
21. El ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos que forman un par lineal es recto.
22. Todo punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del segmento.
23. En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los dos lados congruentes, son congruentes.
24. Construir una recta perpendicular a un segmento dado desde un punto del mismo segmento.
25. Construir una recta perpendicular a una recta por un punto exterior a ella.
26. Construir por un punto dado una recta paralela a una recta dada.
27. Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes.
28. Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos alternos externos son congruentes.
29. Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios.

30. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180º.
31. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios
32. Si dos ángulos forman un par lineal y uno de ellos es recto, entonces el otro ángulo también es recto.
33. Si dos ángulos forman un par lineal y son congruentes, entonces ambos son ángulos rectos.
34. El suplemento de un ángulo agudo es un ángulo obtuso.
35. El suplemento de un ángulo obtuso es un ángulo agudo.
36. El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
37. La medida de uno de los ángulos externos de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes a él.
38. Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los ángulos agudos de uno de ellos son congruentes a sus correspondientes en el otro triángulo.
39. Todo punto de la bisectriz de un ángulo, equidista de los lados de dicho ángulo.
40. Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los catetos de uno de ellos son congruentes a sus correspondientes en el otro triángulo.
41. Si dos de los ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a ellos son congruentes.
42. Los lados opuestos y los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
43. Cualquiera de las diagonales de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.
44. Dos ángulos consecutivos cualesquiera de un paralelogramo son suplementarios.
45. Los segmentos de un par de rectas paralelas comprendidos entre un segundo par de rectas paralelas son congruentes.
46. Todos los ángulos de un rectángulo son rectos.
47. Las diagonales de un rectángulo son congruentes.
48. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.
49. Las diagonales de un rombo son mutuamente perpendiculares.
50. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
51. Si dos de los lados de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo.
52. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan mutuamente, el cuadrilátero es un paralelogramo.
53. El segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su medida es igual a la mitad de la medida del tercer lado.
54. Una recta que biseca a uno de los lados de un triángulo y es paralela a un segundo lado, biseca al tercer lado.