Elementos para una explicación de algunas respuestas erradas a problemas multiplicativos[1]

Jaime Humberto Romero Cruz[2]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
grupomescud@yahoo.es

Resumen

Harel G., Behr M., Post T. and Lesh R. (1994) propusieron una base conceptual para afirmar que 1 es un índice para explicar la dificultad relativa que los estudiantes presentan cuando resuelven problemas multiplicativos.Encontramos una diferencia con los hallazgos de Harel et al. (1994) que es explicada por la presencia de los modelos intuitivos MADA y particularmente por el modelo « regla de tres».

Palabras clave: Modelos intuitivos, regla de tres, proporcionalidad.

Introducción

Una comparación (Tabla 1) de los datos obtenidos por Harel et al. (1994) con los obtenidos por Mescud (2006) muestra que el comportamiento, frente a problemas multiplicativos, con escasez de tiempo para resolverlos, de las dos poblaciones indagadas -estudiantes para profesor de matemáticas para la educación básica- está afectado por (1) la presencia del modelo MADA: la multiplicación agranda, la división achica[3], y (2) el tamaño del multiplicando. Y difiere en el ítem (2) de lo hallado por Fischbein et al. (1985). Por otra parte, la afectación de los comportamientos no ocurre de la misma manera para las dos poblaciones mencionadas. ¿Qué explica esta diferencia?

Multiplicador decimal	Multiplicando decimal	% de respuestas correctas				Multiplicador decimal	Multiplicando decimal	% de respuestas correctas		
		J	S	E				P-N	EPP	R3
> 1	> 1	74	75,5	87		> 1	> 1	3	88,5	37
	< 1	79	89	96			< 1	12	60	14
< 1	> 1	45	50	55		< 1	> 1	1	71,4	54
	< 1	45	41	40			< 1	16	74,3	71
Datos en Harel et al. (1994). Estados Unidos						Datos en Mescud (2005). Colombia				

Tabla 1

1 Artículo resultado de la investigación "El pensamiento multiplicativo: una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula" cofinanciado, por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, COLCIENCIAS e IDEP, con asesoría del PHD profesor Bruno D'Amore.

2 Miembro del grupo Mescud y NRD Bologna

3 Para una comprensión del significado de modelo intuitivo MADA, ver D'Amore (2006)

J: Estudiantes empezando formación superior para ser profesores de primaria. S: Estudiantes terminando formación superior para ser profesores de primaria. E: Profesores de primaria en ejercicio. P-N: Problema número. EPP: Estudiante para profesor. R3: Porcentaje de respuestas correctas obtenidas con regla de tres.

Como una explicación para los comportamientos de los estudiantes al resolver problemas multiplicativos, Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), propusieron la presencia de ciertos modelos intuitivos.

Una de las ideas desarrolladas en el artículo aludido es que los estudiantes al intentar resolver los problemas, imponen sobre los enunciados de los problemas condiciones algunas veces distintas a las efectivamente incluidas en la enunciación propuesta, pero que, sin embargo, no son arbitrarias, son producto de la generalización de las experiencias de los estudiantes con cierta clase de situaciones.

Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), hallaron que la clase de situaciones de la que los estudiantes generaron, generalizaron y desde la que luego trasladaron sus reglas a las nuevas situaciones enunciadas, era formada por situaciones de grupos iguales y sumandos iguales. Por ello, la concepción de multiplicación y división que los estudiantes se formaron era consistente con la de suma repetida y sustraendo repetido, respectivamente.

Esta concepción de la multiplicación y la división lleva aparejada la conformación de una teoría implícita, de uso en la solución de situaciones de multiplicación y división mediante la aplicación de reglas obtenidas y formadas tácitamente con el uso prolongado y frecuente, sobre las clases de situaciones arriba aludidas.

Reglas intuitivas asociadas con los tres modelos de Fischbein

(Tomado de Harel, Behr, Lesh and Post 1994, p.365)

Operación	Reglas intuitivas	
Multiplicación	El multiplicador debe ser un número entero	
	La Multiplicación Agranda	**MA**
División partitiva	El divisor debe ser un número entero	
	El divisor debe ser más pequeño que el dividendo	
	La División Achica	**DA**
División cuotitiva	El divisor debe ser más pequeño que el dividendo	

En relación con lo aludido atrás, y en tanto formadores de futuros profesores de matemáticas para la educación básica, que nos obliga a la comprensión de los esquemas multiplicativos de nuestros estudiantes, incluyendo sus modelos intuitivos, diseñamos y aplicamos un experimento de enseñanza, para ser desarrollado en un curso con estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Para averiguar esos esquemas multiplicativos, usamos tres cuestionarios:

- Uno de ellos producido durante la investigación, llamado *La prueba contrarreloj*, para indagar respecto de los modelos intuitivos de los estudiantes al resolver problemas de adición y multiplicación.
- Otro, denominado Conexiones y densidades, construido para averiguar conexidades que encuentran los estudiantes entre distintas representaciones de la fracción, las relaciones entre las

relaciones de equivalencia en las que ellos se basan para lograr ordenar las fracciones, posibilidades de intercalación de fracciones, aspectos relativos a densidad y acumulación, así como el sostenimiento de la unidad y el todo.

- Por último, tomamos de Llinares (1996) un cuestionario para indagar sobre la Recuperación de la unidad, llamado precisamente así.

Hallazgos generales a partir de La prueba contra reloj.

La prueba contra reloj, involucró 10 problemas verbales de multiplicación y 6 problemas verbales de suma, fue aplicada a todos los 35 estudiantes del curso. Analizadas sus respuestas desde la teoría de los modelos intuitivos, observamos como tendencia:

El uso en los problemas de suma de un modelo intuitivo basado en el reconocimiento de dos partes conformando un todo. Esto es:

Parte 1 + Parte 2 = Todo

en el que para los estudiantes,

1. Las partes son siempre disyuntas: Esto lleva a que, por ejemplo, el problema 11,

En el Proyecto Curricular "Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas", hay matriculados actualmente seiscientos cuarenta estudiantes. El profesor Fernando tiene a su cargo únicamente dos cursos: "Transición aritmética álgebra" y "Resolución de problemas III", ambos cursos de tercer semestre. En el curso de Transición hay treinta estudiantes, y en el de Problemas veintinueve estudiantes. ¿Cuántos de los estudiantes matriculados actualmente en este proyecto no son estudiantes de los cursos a cargo del profesor Fernando?

haya sido contestado de manera errónea por el 100%

2.Existen exactamente dos partes y un todo: Esto lleva a que, por ejemplo, el problema 9,

De los habitantes coreanos solo los hombres van al ejército, pero no van las mujeres, ni los niños, ni las niñas. Si las mujeres son doce millones trescientos cincuenta mil, y los niños y niñas son en total quince millones doscientos mil, ¿cuántos habitantes coreanos hay?

haya sido contestado de manera errónea por el 80%

3. El total no es objeto de reflexión, a su interior no ocurren transformaciones: Esto lleva a que el problema 2

Carlos y Estefanía tienen un capital conjunto de ocho mil setecientos sesenta y cinco pesos. Para conformar este capital, Carlos aportó dos mil setecientos sesenta y cinco pesos. ¿Cuánto dinero más que Carlos aportó Estefanía para conformar dicho capital?

haya sido contestado de manera errónea por el 71%, o que por la ausencia de conservación del todo, el problema 14,

Juan y Pedro estaban solos mientras jugaban canicas en el parque del barrio. Al empezar el juego, Juan tenía siete canicas más que Pedro, y en el juego Pedro le ganó tres canicas a Juan. ¿Con cuántas canicas menos que Juan quedó Pedro al terminar el juego?

haya sido contestado de manera errónea por el 98%.

Ahora bien, respecto del comportamiento de los estudiantes en el problema 5,

En una ladrillera los niños jugaban a construir montones de ladrillos y los ordenaban del más pequeño al más grande. Se encontró que en el primer montón solo había un ladrillo, en el décimo montón

19 ladrillos. Calcula cuántos ladrillos hay en el montón que ocupa el lugar 100

que es de suma y fue contestado como de multiplicación por la totalidad de los estudiantes, ¿qué lo explica? Una aproximación a la respuesta a esta pregunta la abordaremos más adelante.

Dada la importancia para la investigación, es necesario enfatizar sobre dos vínculos entre aspectos del pensamiento multiplicativo y el aditivo aquí hallados:

Los problemas 11, 14 tienen en común la existencia de unidades pertenecientes a más de una de las colecciones que finalmente entran en juego en la suma, se puede apreciar que hay unidades que en estos problemas al visualizarlos desde el esquema parte todo juegan el papel de dos unidades. Sin embargo, contrastados con el tipo de soluciones en el problema 2, aparece que excepto una, todas las otras respuestas correctas fueron obtenidas restando dos veces la misma cantidad. La respuesta excepcional ocurrió mediante una sola resta de dos veces una misma cantidad perteneciente a una intersección. Con lo dicho vuelve a suceder que solo el 2,7% de los estudiantes identifica la medida de la intersección conscientemente.

Esta falta de conciencia permite que no exista requerimientos de coherencia ni conexidad entre las características del todo y de las partes, produciéndose un sistema de pensamiento asimismo laxo y probablemente incoherente; este hecho hace que se presente la no conservación del todo y la imposibilidad de comprenderlo por composición de sus unidades multiplicativas. Es decir unidades obtenidas como objetos provenientes de las relaciones uno a muchos, muchos a uno y varios a muchos. Unidades que son piedra angular de construcciones multiplicativas.

Los esquemas multiplicativos encontrados.

Ateniéndonos solo a los resultados obtenidos por los estudiantes en la solución de los problema en el cuestionario escrito aparecería algo como contradictorio: para ellos las reglas de los modelos intuitivos la división achica y la multiplicación agranda admiten más violaciones entre más “complicados” sean los números que en el problema aparecen y a medida que los números son más fáciles de manejar, esas mismas violaciones a las reglas del modelo son menos frecuentes ocasionando más respuestas incorrectas debido al cambio del papel de los operandos o en la operación escogida, tal es el caso en el problema 8 para el que el cambio en los operandos ocurrió en 31% de los casos, y el cambio de operación sucedió 6% de los casos. Mientras esto ocurrió en el problema 8 con todos los datos dados en números enteros y debiendo violar una sola regla del modelo: el dividendo debe ser mayor que el divisor, en el problema 10 que se debe violar para llegar a respuestas correctas, además de la regla anterior la que dice que el divisor debe ser un número entero, solo el 2,86% de los casos cambió de operación y en ningún caso se cambió el papel de los operandos. Por otra parte, examinando qué ocurre en el problema 6 que viola solo la misma regla que el problema 8, ocurre lo mismo que en el problema 10, sólo el 2,86% de los casos cambia de operación y en ningún caso el papel de los operandos. Más aun, el grado de corrección es menor (62,86%) en el problema 8 con números enteros y una sola regla violada, seguido de (65,71%) del problema 10 con dos reglas violadas por la presencia de ambos operandos no enteros y el mayor grado de corrección (82,86%) del problema 6.

Aunque otros análisis son posibles, nos centraremos en tratar de dilucidar esta contradicción con los hallazgos en la investigación de Harel, Behr, Post y Lesh (1994).

Examinando el uso de la regla de tres (R3) se nota que de los tres problemas en el que menos se la usa (2,86%) es el problema 8 pero también el de menor éxito pero sobre todo el que viola solo una regla y los datos son enteros; sigue en orden ascendente de uso (54,29%) –muy fuerte incrementoel problema 6 con idénticas restricciones del problema 8 pero con un número no entero, el de mayor uso (77,14%) de R3 es el problema 10 es justamente el que viola dos reglas y que incluye solo números no enteros. Parece entonces que para manejar los casos en que aparecen números no enteros nuestros estudiantes acuden al uso de R3.

Problema	P-5	P-6	P-8	P-10
OPERACIÓN	+	/	/	/
CORRECCIÓN	0	82,86	62,86	65,71
% USO R3	28,57	54,29	2,86	77,14
% USO R3 BIEN	**0**	40	2,86	60,00%
% USO R3 MAL	**28,57**	14,29	0	17,14
Cambia operandos	0	0	31,43	0
Cambia operación	100	2,86	5,71	2,86

¿Pero acuden a R3 dominando la estructura de proporcionalidad que la fundamenta? ¿Es R3 un modelo multiplicativo intuitivo para nuestros estudiantes? Estamos en condiciones de probar que sí: si retomamos el problema 5.

En una ladrillera los niños jugaban a construir montones de ladrillos y los ordenaban del más pequeño al más grande. Se encontró que en el primer montón solo había un ladrillo, en el décimo montón 19 ladrillos. Calcula cuántos ladrillos hay en el montón que ocupa la posición 100.

Este problema fue modelado como se muestra a continuación:

Montones	Ladrillos	Cuando el número de montones aumenta, aumenta también la cantidad de ladrillos
10	19	
100	X (¿?)	

X = 19x100/10

Los resultados del comportamiento del grupo son:

Problema #	multiplicador	multiplicando	% corrección total	% de estudiantes que no usaron R3	% aporte a corrección sin uso de R3	% de estudiantes que usaron R3	% aporte a corrección con uso de R3
5	100	19	0	71,43	0	28,57	0

Problema #	índice para eficacia sin R3 en el problema 5 que es de suma aunque fue visto como de multiplicación	índice para eficacia con R3 en el problema 5 que es de suma aunque fue visto como de multiplicación
5	0	0

Los datos de 0 como índice de eficacia son reveladores, nos damos cuenta de la imposibilidad estructural de aplicar R3 a los datos de la situación, puesto diez veces la cantidad de ladrillos en el primer montón no equivale a la cantidad de ladrillos en el montón décimo, sin embargo esta condición del problema no es tomada en cuenta por 32 de los estudiantes que producen respuestas multiplicativas invocando explícitamente, el 28,57% de los estudiantes, el esquema de R3 tomándolo entonces como paradigma de la clase de problemas al que ellos creen pertenece el problema enunciado, imponiendo sobre el original, de manera tácita, no reflexiva las propiedades de la proporcionalidad que son las que rigen estructuralmente R3

¿Cómo comprenden ellos que un problema corresponde al esquema de R3?

Las entrevistas realizadas nos permitieron entender que los estudiantes están procediendo así: ven que hay dos distintos espacios de medida y tres datos dados, dos de ellos en un mismo espacio y un tercero en el otro espacio, ven además que a más cantidad en uno de ellos corresponde más cantidad en el otro. De esta comprensión casi instantánea del enunciado del problema pasan al esquema.

M1	M2
A	B
C	X

Para el caso de los estudiantes investigados cuatro de ellos suponen que este esquema ya es la operatoria desde la que se obtiene solución numérica. Otros realizan X= (c.b)/a, más cuando se les preguntó porqué pueden hacer esto, la respuesta ha sido invariable: así me lo dijeron en el colegio, y curiosamente recuerdan su uso en clase de química como una manera de proceder frente a construcción de mezclas o combinaciones, o de física para hallar velocidades, etc. Otras veces ha sido dicho en la casa generalmente por un hermano un poco mayor. Ninguna respuesta recuerda una construcción conectando medición, razón, proporción, cambios de unidad o construcción geométrica de magnitudes generando álgebras o sigma-álgebras

Modelos MADA y Regla de tres: Funcionalidad y desconexión

En los textos de aritmética de grados 2º y 3º casi todos los problemas multiplicativos corresponden a grupos iguales, mientras que en los de 4º grado las situaciones multiplicativas se diversifican: medidas iguales, conversión de medidas, parte-todo; además recurren a cantidades intensivas como: rapidez, intensidad de fluidos, densidad, etc. Mescud (2005). El modelo MADA pierde su eficacia cuando hay que trabajar con cantidades como: 1/3 de segundo, cada 4/5 de litro; o 2/3 de segundo, cada 4/5 de litro; o 3/2 de segundo, cada 5/4 de litro.

Desconectado del modelo MADA, exigido a tratar situaciones para las que muy probablemente no tenga una intuición productiva, ¿a qué se aferra el sujeto que aprende? Aparece ante sus ojos una tabla de salvación que poco a poco se fija en su memoria: una representación que ordena los datos de una cierta manera, una regla simple de verificar y una posibilidad de ejecución rápida, le permiten cumplir la exigencia. El recurso es eficaz cuando es pertinente, pero la pertinencia ha sido empobrecida a una comprobación, que siendo necesaria no es suficiente.

El recurso parece provenir de una construcción social añeja fundamental en álgebra. Wallis (1684) lo propone[4], la resolución de la proporción expresada como producto de extremos igual al producto

4 Wallis, concibe dos procesos complementarios y necesarios en el álgebra. Uno encaminado al análisis, resolución, otro a la síntesis, composición. Así, a:b :: c:d es composición, y ad=bc su resolución. Ideas que aparecen en "Arte analítica" de Vieta, que a su vez refiere a Platón.

de medios. Para ello se vale de las nociones comunes, en los Elementos de Euclides, pero reemplaza dos, mitades y dobles de una misma cosa son iguales entre sí, por: *Productos de cosas iguales por una misma cosa, son iguales entre sí.*

La manera de introducir el producto y la igualdad de razones, definida por la noción común recién introducida conducen, en Colombia, a la regla de tres "R3", permiten tratamientos claros y rápidos en textos (Mescud, 2005) y aulas que, como ha observado D'Amore (2006, p.145), generan modelos inadecuados:

«[...] he visto "esquemitas" que, algunos maestros de primaria, obviamente en buena fe, compilaban para los estudiantes [...] La buena fe es evidente y se halla en el deseo de dar ideas significativas, estables, de proporcionar certezas. Pero precisamente esta certeza, y las continuas afirmaciones, hacen de esa imagen un modelo que después [...] será muy difícil destruir [...]».

El mejor rendimiento de nuestros estudiantes en problemas, de rendimiento críticamente bajo en la investigación de Harel et al. (1994), lo explican tanto la frecuencia de uso, a veces sobre 70%, como la eficacia de R3 (Mescud, 2006). En Colombia, R3 es un modelo intuitivo, primigenio en situaciones multiplicativas en las que los números con coma introducen dificultades que dejan sin posibilidad de acción a los otros modelos y esquemas. La dificultad del uso de este modelo es la superficialidad de la comprensión de la estructura matemática que acoge su modelo matemático que lo fundamentaría: la proporcionalidad (Mescud, 2006).

La desconexión de MADA con R3, junto con la frecuencia y eficacia de uso de R3, debería hacernos sospechar de la insuficiencia del "efecto absorción" (Fischbein et al., 1985) como explicación, a la «diferencia entre problemas multiplicativos de acuerdo con la relación de tamaño entre la parte entera y la parte fraccionaria de sus multiplicadores" y aportar elementos para resolver una inquietud planteada por Harel et al. (1994, p.382): «[...] no es del todo claro cuál es la base conceptual para que el multiplicador 1 sea un índice para la dificultad relativa de los problemas de multiplicación. [...]»

Conclusiones

La divergencia de estos y otros resultados en las investigaciones mencionadas, lleva a aceptar la posibilidad de encontrar diferentes estrategias de los estudiantes vinculadas al uso de modelos intuitivos también diferenciados. Mescud (2006) plantea como hipótesis: «Cuando el resolutor se encuentra con la situación, el tiempo de resolución es escaso, empieza a actuar con las primeras imágenes que le llegan; éstas pueden provenir de varias fuentes y con distintas persistencias y pueden hacer funcionar esquemas que compiten y se complementan», y que:

«Entre los esquemas en competencia hay jerarquías relativas a los resolutores y a las comprensiones que realicen de las situaciones. Como los esquemas se promueven y potencian socialmente, hay tendencias en los comportamientos. Por ejemplo, se privilegia el esquema "cada uno tiene…, cuánto tienen", y la relación "uno a muchos" entre enteros, luego el de "tantas veces…" y, finalmente "a C1 le corresponden B1, a C2 ¿cuántos?" que, parece, entra en acción cuando los otros no se adaptan al modelo MADA –hay ruptura de sus reglas intuitivas– y aparecen números con coma. El resolutor a veces anticipa estas rupturas, relacionadas con los tamaños relativos de los números, aun si él no sabe imponer orden total sobre una serie de números, pues en estas ocasiones solo compara dos o tres números.»

Para ejemplificar esta hipótesis, veamos una síntesis de comportamientos de estudiantes frente a dos de los problemas (Mescud, 2006):

P1. Un cohete recorre, con rapidez constante, 23738 km en una hr. ¿Cuánto recorre en 0,85 hr?

Algunos entrevistados empezaron con la imagen e=v* t, seguida de la toma de conciencia de dos hechos: (1) 0,85hr < 1hr entonces (2) el cohete debe recorrer menos de 23738kms, por tanto debe efectuarse: 23738÷0,85, manifestación del modelo la División Achica. La comparación inicial 0,85hr < 1hr sucede casi sin esfuerzo por la presencia de "0,…" y de "1,…", y este rápido reconocimiento del tamaño relativo de los números que intervienen, permite decidir dividir.

Dicho de otra manera, algunos estudiantes procedieron mediante una cadena de inferencias, guiada por el entramado de modelos intuitivos, junto con hechos parcialmente aprendidos durante su escolaridad. Sin embargo, aparece la retahíla "entre menos, menos" conducente a división que, para este caso, produce un error.

P3. Un bote se desplaza con rapidez de 4,25 metros por segundo ¿Cuánto recorre en 3,3 s?

Nuevamente, al comparar con 1, el resolutor llega a "entre más, más" y actúa el modelo la Multiplicación Agranda, entonces es conducido con éxito a 4,25x3,3. Esto explica el menor error en la solución de P3 que en la de P1.

Harel et al. (1994) se preguntan por la base conceptual que explique que 1 sea índice para la dificultad relativa de los problemas multiplicativos, creemos que debe tenerse en cuenta como elementos importantes: la facilidad para comparar los tamaños de los números con respecto a 1 y la hipótesis arriba enunciada.

Bibliografía

- D´Amore, B (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio [trad. Cast. Angel Balderas, original 1999].
- Fischbein E., Deri M., Nello M. and Marino M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. In: *Journal for research in mathematics education*. 16 (1). 3-17.
- Harel G., Behr M., Post T. and Lesh R. (1994) The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations, 363-384. In: Harel and Confrey (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* New York: State University of N.Y.
- Mescud. (2005). *El pensamiento multiplicativo: una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula*. Informe de Investigación IDEP-COLCIENCIAS-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Mescud (2006). *Razonamiento multiplicativo: un camino posible*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Documento sin publicar

Wallis, J. (1684). A *Treatise of Algebra. Both Historical and Practical. Playford and Davis (Eds.).* London: Oxford University.