Relación entre objeto matemático y sentidos en situaciones de transformación entre representaciones semióticas[1]

Pedro Javier Rojas Garzón
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá

Resumen

El trabajo propuesto se sitúa en un contexto semiótico y se estudiará, de manera general, la relación semiosis-noesis en la construcción de conocimiento matemático. El estudio sin ser exhaustivo, incluirá aspectos sobre la actividad matemática, la comunicación sobre objetos matemáticos emergentes y el aprendizaje de los objetos matemáticos. De manera específica se indagará sobre cambios de sentido(s)asignado(s) a los objetos matemáticos en situaciones de transformación entre representaciones semióticas, tomando como referencia, principalmente, trabajos de Duval, Radford, Godino y D'Amore.

Palabras clave: sentido, significado, representación semiótica, registro, tratamiento.

Introducción

En ciertos contextos cotidianos, y en algunos campos de conocimiento científico, es posible acceder a los objetos directamente mediante la percepción o el uso de instrumentos; o, de manera indirecta, haciendo uso de representaciones de tales objetos. En otros campos, sin embargo, el acceso vía representaciones no sólo resulta útil sino casi obligatorio. Las representaciones de los objetos, como lo plantea Duval (2004/1999, p. 17), son producidas haciendo uso de sistemas de representación de diferente naturaleza[2] , y destaca la existencia de tres polos constitutivos de toda representación, explicitando que la relación entre estos puede variar dependiendo de si el sistema productor de la representación es o no semiótico:

- el objeto representado
- el contenido de la representación, es decir, lo que una representación particular presenta del objeto
- la "forma" de la representación, es decir, su modalidad o su registro (p. 16).

En matemáticas, en particular, el aprendizaje de los objetos es conceptual[3] ; el sujeto no entra en "contacto" directo con los objetos, pues estos no son accesibles perceptual ni instrumentalmente. En tanto no son posibles las referencias ostensivas, se hace necesario servirse obligatoriamente de representaciones[4] . En palabras de Duval (p.18), "[la] mediación semiótica es tan indispensable en matemáticas como la mediación instrumental para la observación de los fenómenos". Sin embargo,

1 Proyecto de tesis doctoral dirigido por el doctor Bruno D´Amore, profesor de la Universidad de Bologna, miembro de los grupos de investigación NRD (Bologna-Italia) y MESCUD (Bogotá-Colombia), en el énfasis en Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital.

2 Según este autor, los sistemas pueden ser no semióticos –redes neuronales (como las diferentes formas de memoria) o instrumentos físicos (como microscopios y telescopios)–; o pueden ser semióticos (mediante el uso de signos). La producción de toda representación semiótica, necesariamente, es intencional.

3 Como lo plantea Duval (2004), la adquisición conceptual de un objeto pasa por adquirir representaciones semióticas, esto es, representaciones por medio de signos.

4 Estas representaciones pueden ser discursivas –usando lenguas naturales o lenguas formales–, o pueden ser no discursivas –mediante figuras geométricas o grafos cartesianos–

en tanto en los procesos de aprendizaje es usual que el acceso a un objeto matemático se haga vía una de sus representaciones, es posible que se generen dificultades si no se toma conciencia o no se hace explícita la diferencia entre el objeto y la representación mediante la cual se "accede" a él; pues podría suceder que el objeto sea confundido con una representación específica de éste.

Resulta importante destacar un hecho que en principio resulta paradójico: ¿Cómo se explica que la actividad sobre los objetos matemáticos sólo sea posible mediante representaciones semióticas, si el aprendizaje de los objetos matemáticos es un aprendizaje conceptual? En otras palabras, si el objeto matemático no es accesible ni perceptual ni instrumentalmente no es posible decidir si algo es representación de dicho objeto; pero, por otra parte, si no se cuenta con representaciones del objeto, no es posible adquirir conceptualmente tal objeto. Esta paradoja, reconocida explícitamente por Duval (1999/1995), será analizada en el desarrollo de este proyecto.

Como se comentó anteriormente, si se tiene en cuenta que todo conocimiento matemático debe servirse de representaciones y movilizar una variedad de sistemas semióticos de representación, resulta entendible que en el trabajo en matemáticas más que hablar de conceptos, operativamente se hable de objetos. Más aún, como lo afirma Duval, más que el objeto resulta prioritaria la dupla (representación, objeto). Ahora bien, en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes no sólo requieren apropiarse de una variedad de sistemas semióticos de representación sino, en especial, de las diversas posibilidades de transformar una representación semiótica en otra, en tanto se trata de productos culturales que han posibilitado el desarrollo de las matemáticas. Tales transformaciones se dan tanto al interior de un mismo sistema semiótico de representación, o registro semiótico, como entre diferentes registros semióticos; transformaciones que Duval (p. 42) denomina de tratamiento y de conversión, respectivamente.

En los últimos años se ha retomado con cierta fuerza los estudios sobre representaciones semióticas y sus relaciones con el funcionamiento cognitivo, entre los que se destaca el desarrollado por Raymond Duval en las últimas dos décadas. En el campo de la educación matemática, los trabajos de Duval han sido objeto de reconocimiento y, según D´Amore (2006a/1999, p. 272):

[…] sus análisis están obligando a reflexionar de un modo nuevo a todo aparato cognitivo puesto en acción en el acto del aprendizaje de la matemática, su investigación en didáctica de la matemática se centra principalmente en el tema de las representaciones semióticas y las articulaciones de los diferentes registros lingüísticos de la matemática.

En el contexto internacional, son varios los trabajos de investigación que abordan específicamente problemáticas relacionadas con las transformaciones semióticas (ver, por ejemplo, Duval, 1999/1995, 2004/1999, 2006; D´Amore, 2006b; D´Amore & Fandiño, 2008).

En la investigación aquí propuesta se pretende indagar, de manera específica, por los cambios de sentido de un objeto matemático por parte de los estudiantes en situaciones de transformaciones entre representaciones semióticas. El sentido, en principio, es asumido aquí como un significado parcial, asociado más a lo contextual (incluso a lo volátil). Cada contexto ayuda a generar sentido –aunque no todos los posibles sentidos–. Es necesario, sin embargo, reconocer no solo la complejidad asociada al concepto "significado", sino también que en la actualidad aún no se cuenta con una teoría compartida sobre este concepto (D'Amore, 2005); existe aún una diversidad de definiciones de significado y está vigente el debate sobre el tema.

Planteamiento del problema

A manera de contextualización, se presenta dos situaciones que permitirán precisar un poco la problemática que se quiere explicitar. Estos casos fueron reportados por D´Amore (2006b), y dan cuenta de evidencias sobre una complejidad asociada a las transformaciones semióticas de tratamiento, de una representación de un objeto matemático a otra, en tanto no sólo se cambia el sentido asignado al objeto matemático sino que éstos no se articulan.

Situación 1. Se propone a estudiantes de 5º grado de educación básica calcular la probabilidad del siguiente evento: lanzando un dado se obtenga un número par.

Después de trabajar por grupos, con la orientación del profesor, comparten que, en tanto los resultados posibles al lanzar un dado son 6 y los que hacen verdadero el evento son 3, la respuesta es 3/6. También reconocen que dicha probabilidad se puede expresar como 50%, en tanto aceptan la equivalencia entre 3/6 y 50/100, propuesta por el profesor. Incluso, algunos de los alumnos reconocen que hablar del 50% significa que "se tiene la mitad de la probabilidad de verificarse el evento respecto al conjunto de los eventos posibles" y que, por lo tanto, debe ser válida como respuesta la expresión ½, la cual es aceptada y validada por los demás compañeros y por el profesor; es decir, los sentidos asignados a los objetos matemáticos son (se dan por) compartidos. Una vez concluida la sesión de clase, el investigador les plantea a los estudiantes que la fracción 4/8 también sería una respuesta adecuada, si se tiene en cuenta que es equivalente a 3/6. No obstante, todos, incluyendo al profesor, dicen que no; más aún, el profesor del curso afirma que la fracción 4/8 "no puede representar el evento porque las caras de un dado son 6 y no 8".

¿Qué explica este cambio de los sentidos asignados a los objetos matemáticos, antes dados por compartidos? ¿Por qué no se "articulan" los diferentes sentidos, los significados parciales, en un significado más "amplio"?

Situaciones como la referida arriba no sólo se presentan en los niveles básicos. Dicho autor también reporta casos con estudiantes universitarios de matemáticas, como el siguiente:

Situación 2. El sentido asignado a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1 = 0$ es de "una circunferencia" y al de la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ el de "una suma que tiene el mismo valor que su recíproca". Reconocen que, mediante transformaciones de tratamiento pueden pasar de la primera ecuación a la segunda, pero al preguntarles si la segunda ecuación era o no una circunferencia[5] , encuentra respuestas como las siguientes.

Estudiante A: "*Absolutamente no, una circunferencia debe tener* x^2+y^2"

Estudiante B: *"Si se simplifica, ¡sí!"*

Es interesante destacar aquí que, en el primer caso, "ser circunferencia" posiblemente está asociado a una cierta expresión, que es vista como ícono y que, en el segundo, la transformación semiótica (de tratamiento) es la que da o no cierto sentido; al realizar la transformación se genera un "cambio de sentido".

Desde lo descrito en las dos situaciones anteriores, el sentido de los objetos parece más asociado a representaciones específicas, sin aparente vínculo entre ellas. Se cuenta con evidencia respecto a un "cambio de sentido", o incluso la pérdida de éste, cuando una representación semiótica se transforma en otra, al interior de un mismo registro de representación. Así, se plantea una necesidad de indagar la complejidad del sentido asignado a los objetos matemáticos, asociada a la pareja (objeto, representación), o mejor, (objeto, representaciones del objeto). ¿Qué origina estos cambios de sentido?, ¿Cuáles son sus causas?, ¿Se trata simplemente del desconocimiento del sujeto de las reglas propias de un registro semiótico que le dificulta realizar una transformación de tratamiento?,

5 Si bien la primera ecuación no corresponde a la de una circunferencia, no es de interés en este trabajo abordar dicho aspecto.

¿Está asociada esta dificultad a que, en cada contexto, exista o no algún tipo de "motivación" para realizar una transformación?, ¿Qué explicaciones son posibles desde un punto de vista cognitivo? ¿Cuáles desde una perspectiva sociocultural?

Antes de enunciar la pregunta general que orienta el desarrollo de este proyecto de investigación, es importante realizar una precisión que posiblemente permitirá no sólo justificar un poco más la problemática que aquí se presenta, sino también delimitarla. Para Duval (2004/1999), las representaciones semióticas tienen un papel central en el funcionamiento cognoscitivo del pensamiento matemático y los procesos de pensamiento se efectúen mediante dos tipos de transformación de las representaciones movilizadas: tratamiento (al interior de un registro semiótico) y conversión (entre registros semióticos diferentes). Según este autor, en el aprendizaje de las matemáticas, el cambio de registro no sólo es una posibilidad sino una exigencia cognitiva necesaria y fundamental; destaca además la complejidad que conlleva el reconocimiento de un mismo objeto a través de representaciones completamente diferentes, en tanto producidas en sistemas heterogéneos. Así, no sólo reconoce la conversión como uno de las operaciones fundamentales para el acceso del sujeto a una verdadera comprensión, sino que también centra la mirada respecto a dificultades de aprendizaje de las matemáticas en dicho proceso.

En matemáticas, sin embargo, las transformaciones de tratamiento entre representaciones semióticas, al interior de la variedad de registros utilizados, no sólo resultan fundamentales sino que podrían ser fuente de dificultades en los procesos de comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes y, por tanto, resulta de interés para el campo de la educación matemática no sólo documentar fenómenos sobre dificultades asociadas a este tipo de transformaciones sino también disponer de estudios que aporten explicaciones sobre el mismo y sobre sus posibles causas, que posibiliten orientar propuestas de trabajo en el aula. En este sentido, este proyecto de investigación estará orientado por la siguiente pregunta:

¿Qué explica los cambios de sentido asignados al objeto matemático en situaciones de tratamiento entre representaciones semióticas?

Los propósitos específicos de este proyecto están orientados tanto a documentar el fenómeno relacionado con el cambio de sentido de los objetos matemáticos en situaciones de tratamiento entre representaciones semióticas, como a describir y explicar desde diferentes interpretaciones teóricas el cambio de sentido de objetos matemáticos en situaciones de tratamiento entre representaciones semióticas. Como un propósito indirecto se pretende aportar elementos "concretos" que orienten a los profesores de matemáticas sobre por qué y cómo tener en cuenta aspectos semióticos relacionado con el sentido y el significado de los objetos matemáticos.

Referente teórico

Los seres vivos, particularmente los seres humanos, reconocen la importancia de la comunicación en la vida social. Entre las diversas formas de comunicación, además de las que usan los lenguajes naturales, están la visual, la táctil, la sonora, la gestual, y en cada una de ellas requerimos el uso de signos (ya sea emisión de sonidos, "manchas" sobre un papel, gestos, entre otros) que se asumen, y son asumidos por otros, como dotados de algún significado; aunque se reconozca que en ocasiones tales significados no necesariamente son compartidos. Los signos son usados para referir algo en el mundo (cosas, sentimientos, ideas, etc.), en un cierto contexto y con un cierto sentido. La semiótica precisamente hace referencia a la disciplina que estudia los signos[6] en general, o mejor, que estudia

6 En principio el signo puede ser visto como todo aquello que, para un sujeto, está o hace las veces de otra cosa (el objeto del signo), aunque no en todos sus aspectos, sea que dicha cosa "exista" o no.

los sistemas de signos y está ligada a una intención comunicativa. El origen de la semiótica se asocia a De Saussure[7] y a Peirce[8] , hacia finales del siglo XIX.

Algunas ideas sobre semiótica. Para De Saussure, cuyo interés fundamental fue el estudio y comprensión de la lengua, la semiótica[9] es la ciencia que estudia los signos en el seno de la vida social –en qué consisten y qué reglas los rigen–. Los signos, vistos como unión de dos elementos de naturaleza psíquica: significado (identificado con concepto[10]) y significante (identificado con "imagen" producida por la sucesión de sonidos o marcas gráficas[11]), permiten expresar ideas que un "emisor" comunica a un "destinatario" y no pueden verse como simples "marcas" ni por fuera de un sistema; en este sentido, De Saussure asume una visión estructuralista (Radford, 2006a/1999, p. 8).

En particular, para algunos autores, la semiótica de Piaget se enmarca dentro de esta tradición saussureana (Radford, p. 12). Piaget[12] reconoce la importancia de la habilidad para representar algo a través de un signo o un símbolo o cualquier objeto; habilidad que llama función semiótica, la cual surge cuando hay una diferenciación entre significado y significante; aspecto que se retomará posteriormente.

Para Peirce, como lo plantea Eco (1986/1968, p. 20), la semiótica es "la doctrina de la naturaleza esencial y de las variedades fundamentales de semiosis posibles"; entendiendo por semiosis[13] "una acción, una influencia, la cual es, o involucra, una cooperación de tres aspectos, tales como un signo, su objeto y su interpretante, esta influencia tri-relativa no es de ninguna manera resoluble en acciones entre pares". Desde este enfoque, y a diferencia de la semiótica saussuriana, como lo afirma Castañares (2000), no se establece un vínculo entre semiótica y lingüística. En la semántica peirciana los signos están conectados unos con otros, y es gracias a esta comunicabilidad que puede haber representación. Este autor reconoce además que "nuestra experiencia de la realidad se nos da ya ´semiotizada´, es decir, inserta en los procesos de semiosis" (p. 5), y aclara en qué sentido asume Peirce el sujeto:

o bien es un fenómeno de naturaleza semiótica (el hombre es un signo que se despliega y desarrolla según las leyes de la inferencia, como dice en CP 5.313) o bien es un sujeto trascendental (la mente para la que el interpretante es un efecto) o cuasi-trascendental (la comunidad de intérpretes, que sería el sujeto de la semiosis ilimitada). Más allá de estas consideraciones no hay en Peirce una teoría del sujeto en el que éste pueda ser considerado, al tiempo que una realidad exterior a la semiosis misma, su motor (p. 8).

Eco (1986/1968) considera más amplia la definición de semiótica dada por Peirce y plantea que actualmente las investigaciones en este campo son muchas y de múltiples tipos, asociadas a sistemas de comunicación "naturales" o "espontáneos" y a otros considerados culturales. Por ejemplo, la comunicación táctil, la comunicación entre animales, los códigos musicales, los lenguajes formales y los lenguajes naturales; para este autor "todos los fenómenos de cultura pueden convertirse en objetos de comunicación [...] una semántica desarrollada no puede ser otra cosa que el estudio de todos los aspectos de la cultura vistos como significados[14] que los hombres se van comunicando

7 Ferdinand de Saussure (1857-1913), lingüista suizo.
8 Charles Sanders Peirce (1839-1914), lógico y filósofo estadounidense.
9 Es importante aclarar que, en realidad, el término utilizado por este autor fue semiología. Aunque algunos autores han considerado los términos semiótica y semiología como equivalentes, en la actualidad se identifican cada vez más con dos disciplinas diferenciadas; en síntesis, puede decirse que mientras la semiótica asume explícitamente una intención comunicativa, para lo cual requiere contar con sistemas de signos (se interesa más por lo interpretativo), la semiología no se preocupa por si existe o no tal intención comunicativa sino por las estructuras semióticas (se interesa más por lo estructural).
10 Para Castañares (1985, p. 372) la identificación entre significado y concepto es, por lo menos, reduccionista, pues considera que el significado puede ser entendido, desde el punto de vista triádico, más como un interpretante
11 El "significante" podría ser asociado, desde el punto de vista triádico, con signo (ver Castañares, p. 372).
12 Para este autor el lenguaje es condición necesaria del pensamiento, más no suficiente
13 La semiosis vista como proceso de significación, por tanto, como objeto de estudio de la semiótica
14 Para Eco el significado de un término no es otra cosa que una "unidad cultural", entendiendo por unidad algo que está definido culturalmente y que se distingue como entidad (p. 61).

paulatinamente" (p. 26) y resalta que la semiótica estudia todos los procesos culturales como *procesos de comunicación* (p. 28).

Por su parte, Radford (2006a) afirma que además de las dos tradiciones semióticas antes referidas, estaría una tercera representada por Vygotski[15], quien pone de relieve el papel de lo social en la génesis de la significación, planteando que "el signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, además, ese pasaje entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, de su internalización" (p. 11). De acuerdo con Sisto (1998, p. 10), para algunos psicolingüístas y semiólogos de la escuela soviética (Vygotski, Luria y Bajtin), puede establecerse "una analogía entre el signo y la herramienta", en tanto la función mediadora que desempeñan.

En los últimos años el estudio de aspectos relacionados con la semiótica ha sido abordado en y desde campos y disciplinas diversas; particularmente, se ha avanzado en el estudio de los sistemas semióticos específicos de las disciplinas, reconociendo por supuesto al lenguaje natural como sistema semiótico por excelencia. En particular, en el campo de didáctica de la matemática, Duval (1999/1995) destaca que toda iniciación en las matemáticas pasa por una apropiación individual de sistemas semióticos de representación específicos y, en tal sentido, desarrolla un trabajo en el que se reconoce la importancia de abordar semióticamente la comunicación.

Semiótica y matemáticas. Como lo afirma Radford (2006a, p. 1), diversos investigadores en la actualidad reconocen cada vez más que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, ante todo, una actividad simbólica. Por su parte, plantea Duval, la naturaleza epistemológica de los objetos matemáticos hace imposible acceder a estos de manera directa (sensorial o instrumentalmente); no tienen una posibilidad ostensiva y la única manera de acceder a ellos es vía sus representaciones, realizadas en sistemas semióticos determinados, las cuales pueden ser manipuladas y transformadas[16]. No obstante, advierte Duval, si no se distingue un objeto de su representación, no puede haber comprensión en matemáticas. En este sentido, la utilización de representaciones semióticas no sólo es necesaria para propósitos comunicativos sino también para el desarrollo de la actividad matemática (pp. 14-15).

Así, si se acepta que los procesos de enseñanza y de aprendizaje están mediados por la comunicación [17] el lenguaje adquiere una importancia fundamental. Siguiendo las ideas de D´Amore (2006a/1999, p. 259), la matemática posee un lenguaje específico, especializado, y los estudiantes, para aprender, requieren apropiarse de este lenguaje especializado[18], que difiere del lenguaje común y, por tanto, puede constituirse en una fuente de obstáculos[19]. Dependiendo de las personas con las que se pretende establecer comunicación, del contexto y de los elementos disponibles para tal comunicación, se opta por una u otra representación[20], en uno u otro *registro semiótico* o sistema semiótico de representación[21] (lenguaje natural, lenguaje figural, lenguaje algebraico, entre otros), teniendo en cuenta, además, los "rasgos" del objeto que se quieren destacar[22].

15 Lev Semiónovich Vygotski (1896-1934), psicólogo ruso.

16 Denominadas representaciones semióticas (Duval, 1999, p.14), es decir, "producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica,…)".

17 Podría incluso decirse que son procesos comunicativos; para lo cual se requiere, entre otros, que quienes interactúen asuman responsabilidades en este proceso (tanto quien pretende enseñar como quien espera aprender).

18 Laborde (1995, citada por D´Amore, p. 263) asocia al lenguaje matemático al menos tres características: Precisión, concisión y universalidad.

19 Es necesario, sin embargo, reconocer la importancia de nombrar los objetos específicos de la matemática, en cuanto no sólo permite referirlos de manera rápida con un cierto significado "común", además de posibilitar una economía discursiva, sino también volverlos objeto de reflexión.

20 En la actividad de aula, es usual que las representaciones sean tratadas como si todas fuesen del mismo "tipo", desconociendo que no todas son producidas en un mismo sistema de representación semiótico.

21 Duval (1999, p. 30) utiliza el término registro (de representación semiótica) para hacer referencia a un sistema semiótico que permite que se cumplan "las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación": (1) constitución de una representación, (2) transformación de una representación al interior del sistema (tratamiento) y (3) transformación de una representación de un sistema a otro (conversión).

22 En ocasiones, pareciera que a la primera actividad cognitiva se le da poca importancia en los trabajos en didáctica; desde un punto de vista sociocultural, la elección de un determinado registro para representar depende de la comunidad en la cual estoy trabajando; por ejemplo, se tiene una cierta relatividad de los registros dependiendo del nivel de refinación de la comunidad y de lo que se quiere resaltar (el que quiere comunicar debe decidir qué va a poner en relieve, lo cual orienta la elección de uno y no otro registro).

En el caso de las matemáticas, resulta entonces fundamental reconocer no sólo la importancia de las representaciones semióticas sino también la diversidad de dichas representaciones. Es necesario insistir en que si existe un interés de comunicar, resulta importante no solo contar con diversos registros de representación sino también escoger cuál de ellos permite representar mejor el rasgo que se quiere destacar, teniendo en cuenta a quién se quiere comunicar; por lo tanto, la elección de los rasgos no es neutral, pues depende de la comunidad en la cual se desarrolla la comunicación. Este aspecto, por supuesto, también requerirá ser objeto de discusión en esta investigación.

Sobre el significado en matemáticas. Cuando se hace uso de un sistema de comunicación, como se mencionó arriba, se utilizan signos (por ejemplo, términos o expresiones) para referirse a algo, que se reconoce dotado de una cierta existencia, que se asume en un cierto sentido. Uno de los primeros estudios sobre los signos fue realizado por Frege[23], quien es considerado como uno de los primeros filósofos del lenguaje; no obstante, su interés no era propiamente el lenguaje natural sino fundamentalmente el lenguaje matemático, de hecho estaba interesado tanto en la naturaleza y el sentido de la matemática, como de su lenguaje. Dos de las ideas básicas de Frege, pueden resumirse así:

- El significado de las palabras o expresiones depende del contexto.
- El significado de las oraciones depende del significado de sus partes.

El significado de una expresión se compone de dos aspectos: el sentido y la referencia. Puede resultar ilustrativo el clásico ejemplo dado por este autor, acudiendo a las siguientes dos expresiones (Frege, 1985):

(1) El lucero matutino

(2) El lucero vespertino

En ambos casos, usando expresiones diferentes escritas en lenguaje natural, se hace referencia a un objeto, que en este ejemplo es el mismo, al menos para una persona ilustrada: el planeta Venus; aunque cada una asociada a un contexto específico y por tanto con un sentido diferenciado; para un individuo no ilustrado las dos expresiones no sólo tienen diferentes sentidos sino que puede suponer que refieren objetos diferentes; así, a las expresiones dadas se les puede asignar significados diferentes[24].

En el anterior ejemplo, en cada caso, se hace referencia (*Bedeutung o Denotación*) a un objeto, acudiendo a un cierto signo (*Zeichen o Expresión*), que es usado de una cierta manera[25] (*Sinn o Sentido*). Desde lo propuesto por Frege, a cada signo le corresponde un determinado sentido (que puede ser expresado de diferentes maneras), y a éste una determinada referencia; aunque a cada referencia le pueden corresponder muchos signos. Para Frege, la relación diádica *Signo-Sentido* es fundamental, pues reconoce que si bien en algunos casos un signo podría no tener referencia, como el caso de la expresión “el mayor número natural”, en tanto signo, siempre tendrá sentido.

Como lo afirman Godino y Batanero (1994), desde las teorías realistas, el *significado* es una “relación convencional entre el signo y la entidad concreta o ideal que existe independientemente del signo lingüístico; por consiguiente suponen un realismo conceptual” (p. 328), es decir, el significado no depende del uso. Estos dos autores citan a Vergnaud (1990) quien, por su parte, plantea que el significado de un objeto matemático, desde un punto de vista didáctico y psicológico, no puede quedar reducido a su mera definición:

“son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en la representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los

23 Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), matemático y lógico alemán.
24 El signo de por sí no es portador de significado. Al sustituirse una expresión por otra “equivalente”, en tanto tiene la misma referencia, puede tener un valor cognoscitivo diferente
25 El sentido tiene que ver con lo cognitivo -cómo el sujeto asume una expresión-, no con lo semántico; para Frege el pensamiento es el sentido del enunciado y no su referencia.

significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo" (p. 158)

En este sentido, desde un punto de vista pragmático, el significado depende tanto del contexto como del uso.

Según Godino, J., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2006, p. 18), la noción de sentido propuesta desde la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Vergnaud (1990):

[...] el sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por el sujeto individual en una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto. Los esquemas, es decir, las conductas y su organización (p. 158).

corresponde a lo que desde el enfoque ontosemiótico se denomina significado personal de un objeto matemático, resaltando que este autor no introduce una versión institucional de la noción de sentido.

Objetos matemáticos y Significados. El trabajo en didáctica de las matemáticas exige preguntarse por el sentido del conocimiento matemático y por la naturaleza de los objetos matemáticos (D´Amore, 2006b). Desde los planteamientos de Duval (2004/1999), cuando se estudia la variedad de tipos de representaciones semióticas utilizadas en matemáticas, siempre se hace referencia a objetos matemáticos y no a conceptos, en tanto estos últimos con frecuencia son considerados representaciones mentales asemióticas (p. 20). Así, afirma este autor, para comprender la actividad matemática la noción de objeto es, quizás, más importante que la de concepto: "No se trabaja sobre conceptos; se trabaja sobre los objetos (números, funciones,…) que tienen propiedades" (p. 20). Por tanto, lo que toma valor es la dupla (*signo, objeto*) o (*representación semiótica, objeto*).

En relación con los objetos matemáticos, D'Amore y Godino (2006) plantean que estos

[…] deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de objetos matemáticos y que "el significado" de estos objetos esté íntimamente ligado con los problemas y a la actividad realizada para la resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática (p. 14).

Ahora bien, siguiendo ideas de Godino y Batanero (1994), *el significado* (institucional/personal) de un objeto es el resultado de un sistema de prácticas (institucionales/personales) asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado. Para Font & Ramos (2005), definir el significado de un objeto matemático en términos de configuraciones epistémicas y de prácticas asociadas, tal como se propone en el enfoque ontosemiótico, posibilita distinguir sentido de significado[26], en tanto el primero puede asumirse como un significado parcial. Así, como lo afirman estos autores, el significado de referencia de un objeto matemático, entendido como configuraciones epistémicas y sus prácticas asociadas, se puede parcelar en diferentes subconjuntos –desde una perspectiva ecológica, cada subconjunto puede considerarse un contexto diferente–.

Desde esta perspectiva, un criterio de idoneidad de una trayectoria didáctica para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas (y sus configuraciones epistémicas asociadas) en la institución escolar sea un conjunto, lo más representativo posible, del sistema

26 Una precisión sobre el uso en didáctica de las matemáticas de los términos sentido y significado hace parte del desarrollo de este proyecto.

de prácticas (y sus configuraciones epistémicos asociadas) que son el significado institucional de referencia del objeto. Dicho en términos de contextos, y siguiendo ideas de los autores antes referidos, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos lo más representativa posible, una muestra de contextos que permita diseñar en la institución un significado pretendido que incorpore los sentidos del objeto que se consideran más importantes en el significado de referencia (p. 319-320).

En relación con lo anterior, y desde los planteamientos de Radford (2006b), debe tenerse siempre presente que tales prácticas y dichos contextos hacen parte de una realidad históricamente construida. Así, desde este enfoque, pensar no se reduce a asimilar una realidad externa, como tampoco a construir de la nada; el pensamiento es "una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos" (p. 107), en otras palabras, el pensamiento debe verse como "un movimiento dialéctico entre una realidad construida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios" (p. 108). Este autor reconoce que la manera en que cada sujeto llega a pensar y conocer los objetos de saber "está enmarcada por significados culturales que van más allá del contenido mismo de la actividad en cuyo interior ocurre el acto de pensar", por tanto, los significados culturales son "mediadores entre la conciencia individual y la realidad cultural objetiva […] *orientan* la actividad y le dan cierta forma" (p. 109).

Elementos metodológicos preliminares

Este proyecto se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptiva-interpretativa. Se parte del hecho de que la verbalización de los procesos de pensamiento y acción, proporcionan importante información, no sólo a partir de materiales escritos –como pueden ser los obtenidos mediante instrumentos de indagación–, sino también a partir de procesos de interacción –como los generados en los trabajos con pequeños grupos o mediante entrevistas–.

El trabajo de indagación se realizará con mínimo tres grupos de estudiantes de la educación básica, uno o dos de grado noveno (14-15 años) y uno o dos de grado once (17-18 años, aproximadamente), pertenecientes a instituciones educativas de Bogotá. En principio se trabajará en tres instituciones educativas, dos de carácter oficial y una privada. Las instituciones educativas serán seleccionadas de entre las instituciones con las cuales el programa LEBEM ha establecido relaciones mediante las asignaturas de práctica docente, teniendo en cuenta posibilidades de colaboración ofrecido por directivas y profesores de las mismas.

Los datos serán obtenidos básicamente de dos fuentes: los escritos grupales, relacionados con el desarrollo de actividades en las que se requiere realizar transformaciones entre representaciones semióticas –tipo tratamiento–, y las transcripciones de grabaciones de entrevistas semiestructuradas realizadas a pequeños grupos de dos o tres estudiantes.

Teniendo en cuenta un interés de la investigación, el proceso de indagación se centrará en pequeños grupos de los cuales hagan parte estudiantes que, pudiendo realizar adecuadamente transformaciones de tratamiento en el registro algebraico –requeridas en este caso en el ítem 2–, no responden afirmativamente el ítem 3. De tales grupos de estudiantes se seleccionará uno o dos por institución, teniendo en cuenta la disponibilidad y el interés de los estudiantes para participar en las entrevistas, para finalmente seleccionar los grupos que se constituirán en los casos para el análisis propuesto (mínimo 3 en total). Este análisis se realizará desde dos propuestas teóricas: desde el punto de vista cognitivo de Raymond Duval (2004/1999) y desde el enfoque sociocultural de Luis Radford (2006); incorporando, a su vez, elementos teórico-metodológicos generales del enfoque ontosemiótico propuesto por Juan Díaz Godino (2003).

En los trabajos de los estudiantes –individuales y/o grupales– se analizará tanto el aspecto sintáctico, relacionado con el reconocimiento y uso de transformaciones entre representaciones semióticas al interior del lenguaje algebraico (tipo tratamiento), como el aspecto semántico, relacionado con el sentido asignado a los objetos algebraicos trabajados. Si bien los objetos personales y los significados son individuales, debe tenerse en cuenta que, en tanto el estudiante está inmerso en una institución en la que se generan procesos de interacción relacionados con dichos objetos y significados, los análisis deben tomar en cuenta los objetos y significados institucionales.

Algunos comentarios sobre el proceso de indagación

Sobre la población. Teniendo en cuenta la vinculación de algunos profesores de la universidad con instituciones de educación básica –ya sea por su vínculo laboral con ellas o por su participación como asesor de la práctica docente–, así como las posibilidades de colaboración de directivas y profesores de las mismas, se seleccionaron tres de estas instituciones: dos del sector oficial –MMC y CUND–, y una del sector privado –PE–. En MMC, se trabajó con estudiantes de dos cursos de grado 9°, en CUND se trabajó con estudiantes de grado 9° y grado 11°; en PE se trabajó con estudiantes de grado 11°.

Instrumentos de indagación. Se trabajará con base en un conjunto de instrumentos de indagación, los cuales serán propuestos a los estudiantes de grados 9° y 11°, inicialmente de manera individual y luego un trabajo en pequeños grupos (2 o 3 estudiantes), los cuales se constituyen en referente básico para la entrevista posterior. A manera de ejemplo, se presenta uno de los instrumentos diseñados:

Asuma que n representa un número entero cualquiera

1. Diga qué significa cada una de las siguientes expresiones:
   (a) ***3n***
   (b) ***(n-1)+n+(n+1)***
2. ¿La expresión ***(n-1)+n+(n+1)*** es igual a la expresión ***3n*** ?
   (a) Marque con una X su respuesta Sí ( ) No ( )
   (b) Justifique a continuación su respuesta:
3. ¿La expresión ***(n-1)***+n+***(n+1) significa el triple de un número***?

(a) Marque con una X su respuesta Sí ( ) No ( )

(b) Justifique a continuación su respuesta

Sobre el proceso de indagación. En los diferentes cursos la actividad fue trabajada por el profesor titular del curso; en dos de las instituciones se realizó en una sesión de clase de aproximadamente 80 minutos, en la otra, en dos sesiones de 40 o 45 cada una. Se explicó la presencia del investigador en términos de un formador de futuros profesores de matemáticas interesado por conocer las formas de trabajar de los estudiantes e indagar con algunos de ellos el proceso realizado en relación con la actividad que se realizaría durante uno o dos días en el aula de clase.

En un primer momento, en cada uno de los cursos, se trabajó el instrumento de manera individual (durante 15 o 20 minutos, en promedio), se pidió a los estudiantes conformar grupos pequeños, preferiblemente de 3 estudiantes cada uno, para abordar nuevamente el instrumento de manera grupal –en algunos casos se conformaron grupos de 4 o de 2 estudiantes. Los integrantes del grupo pequeño, además de comentar las respuestas dadas por ellos a cada uno de los puntos del instrumento, debían responder el instrumento como grupo (entre 20 y 25 minutos). Finalmente el profesor del curso orientaba la socialización de las respuestas dadas por los pequeños grupos, resaltando los significados asignados a las expresiones propuestas –primer punto del instrumento– y realizando una explicación de la equivalencia de dichas expresiones –segundo punto–, la cual fue planteada por algunos de los integrantes de los grupos (aproximadamente 30-35 minutos).

– Respecto al primer punto, cada uno de los profesores retomó diferentes respuestas dadas por los pequeños grupos, como las siguientes:

1(a) "Un producto", "3 multiplicado por n", "tres veces un entero cualquiera" "n+n+n", "3 veces n", "el triple de un número", "es una ecuación", "da como resultado el triple de la n", "para nosotros 3n cambia porque están pegados eso significa multiplicación", "es una expresión algebraica es decir 3 veces el mismo número", "nos piden que en vez de n coloquemos un número cualquiera para darle un ´valor´ y poder hacer una operación. Es un monomio"

1(b) "Una suma", "Tres números", "suma de 3 números", "tres números seguidos", "tres números consecutivos", "la suma de tres números consecutivos".

En general, los profesores realizaron algunas precisiones en relación con las respuestas dadas por dichos grupos. Por ejemplo, en tanto en el primer ítem no se trataba de un producto cualquiera, no era adecuada la respuesta "un producto", o que, en el segundo ítem, si bien se trata de una suma de tres números enteros, éstos requieren ser "seguidos" o consecutivos. En general, mostraron evidencias de lo dicho anteriormente usando contraejemplos. Además, plantearon que el significado de cada expresión podía enunciarse de más de una manera; destacando, en particular, para el ítem 1(a), las respuestas "tres veces n" y "triple de un número", y, para el ítem 1(b), la respuesta "suma de 3 números consecutivos" y "suma de 3 números seguidos".

– Respecto al segundo punto, uno o dos grupos de estudiantes contestaron negativamente a la primera pregunta del ítem 2(a), la mayoría de los grupos que respondió afirmativamente este ítem lo justificó evaluando cada una de las expresiones con uno o dos números enteros positivos específicos y sólo un número reducido de los grupos pequeños realizó el tratamiento requerido para justificar de manera general la equivalencia de estas dos expresiones. Los profesores, por su parte, plantearon al grupo general la necesidad de verificar la anterior equivalencia para garantizar su validez, ya no para valores específicos sino mediante transformaciones algebraicas válidas para cualquier número, las cuales explicaron con cierto detalle.

– Respecto al tercer punto, en la sesión referida, sólo se indagó por algunas de las respuestas dadas, sin comentario por parte del profesor; planteando que este ítem sería discutido en una próxima sesión de clase.

El trabajo realizado en el instrumento por los pequeños grupos fue recolectado por el profesor y entregado al investigador. Por último, el profesor planteó a los estudiantes el interés del investigador de realizar algunas entrevistas con algunos de los grupos de estudiantes respecto del trabajo por ellos realizado, aclarando que se trataba de una participación voluntaria, por lo cual era decisión de cada uno de los grupos aceptar o no participar en estas entrevistas. En dos de las instituciones (MMC y CUND) las entrevistas se realizaron una semana después, en la otra (PE) dos o tres semanas después.

Entrevistas. La selección de los grupos fue realizada por el investigador usando como criterio que los estudiantes hubiesen respondido todos los puntos del instrumento y, en especial, que hubiesen respondido afirmativamente el ítem 2(a) del instrumento de indagación, referido a la igualdad de la expresión (n-1)+n+(n+1) y la expresión 3n, además de contestar negativamente el ítem 3(a), referido a asignarle a la expresión (n-1)+n+(n+1) el significado "triple de un número". En cada una de las instituciones se realizaron entrevistas a 2 o 3 grupos de estudiantes por cada uno de los cursos seleccionados (9° u 11°), para un total 15 entrevistas, así:

– Colegio CUND [Febrero 19 de 2009]: Inicialmente se seleccionaron 3 grupos de estudiantes grado 9° y 3 de 11°; en cada caso un grupo 3 estudiantes y dos grupos de 2 estudiantes. Finalmente se realizaron 6 entrevistas a grupos de 2 estudiantes cada uno. Una vez revisadas las grabaciones obtenidas de las entrevistas realizadas a los grupos de 9° grado se encontró que éstas no aportaban información de interés y que de los grupos de grado 11° sólo era de interés la información de 2 de los grupos entrevistados (la actividad inicial con el instrumento de indagación se realizó el 12 de Febrero de 2009).

– Colegio MMC [Marzo 16 de 2009]: Inicialmente se seleccionaron 6 grupos de 3 estudiantes cada uno: 2 grupos del curso 9-1, 2 del 9-2 y 2 del 9-3. Una vez revisadas las grabaciones, y la información de interés en las mismas, se seleccionaron sólo 4 de las 6 entrevistas realizadas a los estudiantes de grado 9°: 1 de 9-1, 1 de 9-2 y 2 del 9-3 (la actividad inicial con el instrumento de indagación se realizó o el día 9 o el día 10 de Marzo de 2009, dependiendo del curso).

– Colegio PE: [Abril 11 de 2009]: Inicialmente se seleccionaron 3 grupos de estudiantes, dos de 3 estudiantes y uno de 2 estudiantes (la actividad inicial con el instrumento de indagación se realizó el 19 de Marzo de 2009).

Así, en definitiva, una vez revisadas las 15 grabaciones, se encontró que sólo 8 de ellas contenían información de interés (53,3% aproximadamente): 2 del colegio CUND, 3 del colegio MMC y 2 de la PE . Al iniciar cada una de las entrevistas, el investigador preguntaba los nombres de los participantes, comentaba el propósito de la entrevista y recordaba la discusión que se dio en el curso, particularmente en cuanto a algunos de los significados asignados a cada una de las expresiones dadas en el instrumento de indagación y el significado que por consenso fue considerado más adecuado, así como la justificación que se dio con respecto a la equivalencia de tales expresiones algebraicas:

1(a) ***3n:*** ***Triple de un número***

1(b) ***(n-1)+n+(n+1):*** ***Suma de 3 números consecutivos***

2(b) ***(n-1)+n+(n+1)= n-1+n+n+1= n+n+n-1+1= 3n+0=3n, entonces (n-1)+n+(n+1) = 3n***

En relación con cada uno de los dos puntos anteriores se preguntó a los entrevistados si estaban o no de acuerdo con lo dicho, si querían agregar o aclarar algo, o si requerían alguna explicación de lo dicho. En general estaban de acuerdo con el resumen realizado y con las explicaciones dadas. En tal sentido, la entrevista como tal iniciaba con la pregunta sobre la respuesta que daban al tercer punto del instrumento de indagación; concretamente con la siguiente pregunta:

¿La expresión ***(n-1)+n+(n+1)*** significa ***el triple de un número?***

Estas entrevistas semiestructuradas fueron orientadas a indagar sobre aspectos específicos relacionados con un posible cambio de sentido del objeto matemático en situaciones de transformación, realizadas con grupos de 2 o 3 estudiantes, orientadas por el investigador para posibilitar cierta interacción entre ellos y dirigir preguntas específicas a los estudiantes teniendo en cuenta su participación en la conversación y posibles dificultades ubicadas.

Sobre algunas evidencias. Los siguientes son apartes de tres de las transcripciones en los que se encuentra información útil para los propósitos de este trabajo . En ellas se puede evidenciar no sólo la dificultad para reconocer el mismo sentido a las dos expresiones que inicialmente han visto como sintácticamente equivalentes, sino también el proceso mediante el cual se generan cambios de opinión a partir de la interacción entre los estudiantes . En la primera transcripción, por ejemplo, se evidencia el cambio de opinión de un estudiante (E_1), generado básicamente por la interacción con uno de sus compañeros (E_2), quien acude a evaluar la expresión (n-1)+n+(n+1) con valores específicos, reconociendo así que puede ser el triple de un número. En este grupo, no es propiamente la equivalencia de las expresiones, la que inicialmente se ha reconocido, la que les permite aceptar que si una de las expresiones es el triple de un número la otra también debe serlo; mientras que en el grupo de la segunda transcripción, uno de los estudiantes reconoce y usa la equivalencia entre la expresión (n-1)+n+(n+1) y 3n para "transferir" el significado (sentido) entre las expresiones algebraicas. Por otra parte, en la tercera transcripción 3 se evidencia que ninguno de ellos inicia usando dicha equivalencia –aunque anteriormente en el trabajo en grupo la habían reconocido–, e incluso, ninguno de ellos acude a ésta para argumentar a nivel general, sino que lo hacen con evaluaciones realizadas a las mismas.

Trascripción 1 –MMC–Grado 9°

(20) E1: […] Si…, ¿cómo es?, ¿(n-1)+n+(n+1), significa el triple de un número? Yo creo que, que no, porque el triple de un número no es así, sino [*que*] esa es la suma de tres números consecutivos, no la suma de… o sea [no es] tres veces ese mismo número, o sea… *(silencio*).

(58) E2: Por lo que, pues por lo que dice consecutivos entonces uno se imagina 1, 2, 3; pues es … ¿sí?, pero como uno está diciendo 2, 2, 2 (*reemplaza n por 2*), entonces ese es el problema ahí, que las dos respuestas pueden ser sí y no (se refiere a que en ocasiones podría ser el triple y en otras no lo sería)

(76) E2: Ahí sería el triple de 6, no … o sea ahí no quedaría… ese es el no, por ejemplo.

(81) E1: No, sí, ¡sí es!

(83) E1: Sí da, entonces, sí, esto es el triple de un número.

(86) I: *¿Qué lo está haciendo cambiar de opinión ahora?*

(87) E1: Las operaciones que estamos haciendo.

Trascripción 2 –MMC-9°

(8) E4: … No, yo, uichh, ehhh yo pensaba que ese (*refiriéndose a los términos de la expresión (n-1)+n+(n+1)*), que … eso es un número y éste es el anterior y éste es el siguiente …

(90) E4: […], Porque yo no, no, no veo como… que sea el triple…no…

(91) I. *¿Qué debería haber para que fuera el triple?*

(92) E4: … Pues como el que se repita tres veces un número…

Trascripción 3 –MMC-9°

(9) E7: ... No, pues no, no es triple.

(11) E7: Pues acá como esta, (n-1) y acá más, ehh, (n+1), pues ahí no está el triple.

(15) E8: Porque como ahí dice que número consecutivo y acá (refiriéndose a la expresión 3n) tiene… como la misma operación.

(17) E8: Sí, entonces… no es el triple de un número.

(19) E8: Porque tiene…, es un mismo número.

(34) E9: … ¡Ahhh no!, sí, sí, […], es el triple de un número…, sí porque el que se le resta acá se lo suman al otro lado.

(156) E9: Lo que hice, pues… yo dije que no, que no era el triple de n, pues… porque se le quitaba 1; pero ya veo que ese 1 que le quitan vuelve y se lo suman a lo último…

Resultados iniciales. En principio es importante tener en cuenta que, en los pequeños grupos que fueron seleccionados para las entrevistas, se dieron los siguientes hechos :

a) Aceptan que (n-1)+n+(n+1) es una suma de tres números naturales (o enteros) consecutivos

b) Reconocen que 3n es el triple de un número.

c) Saben realizar los tratamientos para trasformar *(n-1)+n+(n+1)* en 3n

d) Tienen dudas, e incluso rechazan, que *(n-1)+n+(n+1)* pueda signifique o pueda llamarse triple de un número

Lo anterior pone en evidencia la dificultad, al interior de los diferentes grupos seleccionados, de reconocer que el significado asignado a una de las expresiones equivalentes, de hecho, es asignable a la otra. Desde los planteamientos de Duval, se podría afirmar que, en tanto el requerimiento básico para desarrollar adecuadamente la actividad se reduce a un tratamiento, la dificultad evidenciada podría explicarse –desde una mirada estructural–, por el desconocimiento que de dichas reglas, propias del registro algebraico, tienen los estudiantes.

Desde la teoría de Radford, es necesario tener en cuenta que cada uno de los pequeños grupos tiene un motivo o razón cultural y social, que busca en su vida de clase, que lo lleva a aceptar que sólo una expresión como la de forma 3n es, o puede significar, el triple de algo. Se encontró evidencia respecto a que, para estos estudiantes (por ejemplo, Grado 9°-MMC), «el triple de un número» tiene que ser «*3 por algo*». Así, desde los planteamientos de Radford (2006b), la explicación de este hecho estaría basada en que, para dar respuesta a una situación como la planteada, el sujeto busca en su historia cultural y social para, encontrando que el triple siempre ha sido un 3 multiplicado por algo, asociado a una expresión como «*3 por algo»* o como 3n.

Otro aspecto que requiere un análisis específico es el referido a las dificultades encontradas para la designación de los objetos algebraicos por parte de los estudiantes; particularmente la dificultad para tomar de conciencia tanto de la diversidad como de la complejidad de los procedimientos discursivos para designar los objetos (Duval, 2002).

Referencias bibliográficas

- Castañares, W. (1985). El signo: problemas semióticos y filosóficos. Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid. Recuperado el 15 de noviembre de 2008 de: htpp://www.unav.es/gep/TesisDoctorales.html
- _______________ (2000). La semiótica de C.S. Peirce y la tradición lógica. Seminario de Estudios Peirceanos. Recuperado el 15 de noviembre de 2008 de: htpp://www.unav.es/gep/Castanares.html
- D'Amore B. (2005). Pipas, caballos, triángulo y significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Manritte, hasta nuestros días. En: Números, 61, 3-18.
- _________ (2006a). Didáctica de la Matemática (A. Balderas, Trad.). Bogotá: Magisterio. (Original publicasdo en 1999).
- _________ (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido En: Relime. Número especial, 177-196.
- D´Amore, B. & Godino, J. (2006). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. Relime, 10(2), 191-218.
- D´Amore, B. & Fandiño (2008). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI, March 2008, Rome.

- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle. (Original publicado en 1995).
- ________ (2002). L'apprentissage de l'algebre et le probleme cognitif de la designation des objets. Drouhard, J. & Maure, M. (Eds.). Actes des SFIDA 13-16, Vol. XIII, pp. 67-94, Nice: IREM de Nice.
- _______ (2004). Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle. (Original publicado en 1999).
- Eco, U. (1986). La estructura ausente: Introducción a la semiótica (F. Serra, Trad.). 3ª Ed. Barcelona: Lumen. (Original publicado en 1968).
- Font, V. y Ramos, B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. Revista de Educación, 338, 309-345.
- Frege, G. (1985). Sentido y referencia; pp. 51-86. En: Estudios sobre semántica (U. Moulines, Trad.). Madrid: Orbis. (Original publicado en 1892).
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Granada: Universidad de Granada. Recuperado el 5 de marzo de 2009 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf
- Godino, J.; Font, V.; Contreras, A. & Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Relime, 9(1), 117-150.
- Radford, L. (2006a). Semiótica y educación matemática. Relime, Número Especial, 7-21.
- _________ (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Relime, Número Especial, 103-129.
- Sisto, V. (1998). Del signo al sentido. Aproximaciones para un estudio semiótico de la conciencia. Recuperado el 15 noviembre de 2008 de: http://bibliotecavirtual.clacso.org.ar/ar/libros/chile/arcis/sisto.rtf