

Una experiencia de aula alrededor del concepto de dimensión

Jorge Edgar Páez Ortégón

Universidad Pedagógica Nacional

jopaez@pedagogica.edu.co

Clara Emilse Rojas Morales

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

clara.rojas@uptc.edu.co

Claudia Patricia Orjuela Osorio

Universidad Autónoma de Colombia

claudia.orjuela@fuac.edu.co

Docentes grupo Investigación Fractales DMA _ UPN¹

Resumen

Este documento recopila la investigación realizada por el grupo Fractales DMA_UPN, sobre la incorporación del concepto de dimensión al currículo de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Esta investigación pretende en primer lugar, caracterizar las estructuras cognitivas del estudiante a través de las concepciones, imágenes mentales y preconceptos mediante los referentes teóricos que orientan la experiencia de aula que se propone; por otro lado, aportar al campo de la Didáctica de las Matemáticas, y en especial al estudio de la cognición en matemáticas en el contexto Colombiano con relación al concepto de dimensión; por último, mostrar la conexión de los conceptos de dimensión tratados en algunos de los espacios académicos de la licenciatura y la relación entre ellos o reconocimiento de sus invariantes.

Introducción

En primer lugar, es necesario precisar que el concepto de dimensión como objeto de estudio desde una perspectiva investigativa, se justifica desde tres aspectos: el primero, es el considerarlo importante en Matemáticas, porque es potencialmente una fuente de comprensión para otros conceptos que se han enseñado desde la escolaridad y que se relacionan entre sí; el segundo, es el reconocer que es un concepto que se ha venido manejado en forma aislada en la enseñanza y se ha limitado en la mayoría de los casos a su significado intuitivo cerrando otros posibles tratamientos; y el tercero, es aceptar que es de difícil comprensión, debido a la complejidad que encierra al poderlo definir, además de considerar que al interior de las matemáticas es utilizado de diversas maneras dependiendo del área en la cual se esté estudiando, sin reconocer relaciones o invariantes entre ellas.

Partiendo de estos argumentos, se decide iniciar un estudio investigativo en el segundo semestre de 2008 con un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, inscritos en el curso electivo Fractales. Este curso, se convierte en escenario para realizar una experiencia de aula y surge a partir de la necesidad de trabajar con conceptos matemáticos no convencionales dentro de los actuales planes de estudio. La estrategia metodológica prevista para el

¹ Carlos Roberto Pérez, también colaboró en esta investigación.



seguimiento y análisis de la experiencia de aula planteada fue a través de la metodología de estudio de caso, por medio de la cual se podía realizar un seguimiento detallado a cuatro estudiantes del curso, con relación a su proceso de aprendizaje del concepto de dimensión.

Acciones importantes en el proceso investigativo

El equipo asumió para las acciones realizadas los siguientes ejes orientadores:

- El reconocimiento de la didáctica como una disciplina autónoma impone al grupo investigador la tarea de configurar un dominio de estudio teórico específico sobre la temática de la dimensión con su correspondiente incidencia en la práctica, debido a que los procesos de enseñanza y aprendizaje y la determinación del sentido del conocimiento adquirido por los estudiantes y su control, dependen del propio saber matemático y de las situaciones propuestas a los estudiantes.
- El aprendizaje de este concepto busca más que la repetición de una definición formal la construcción de los invariantes de la dimensión, de la misma manera, prima la comprensión de elementos conceptuales asociados con la representación del concepto de dimensión (representación geométrica euclidiana) y al desarrollo de competencias argumentativas en la elaboración de conjeturas y justificación de los constructos elaborados por los estudiantes a través de la orientación del docente; debido a que se reconoce la complejidad del concepto y la manera como éste ha sido abordado en los espacios académicos.
- Se deben determinar los elementos invariantes a satisfacer cualquier concepto de dimensión, sin embargo, se reconoce que éste concepto se aborda de diversas maneras al interior de las matemáticas y se utiliza de diversas formas dependiendo del área de conocimiento que se éste abordando, y por lo tanto es difícil reconocer estas relaciones o invariantes ya que su forma de enseñanza se presenta sin ninguna conexión.

Con relación a las hipótesis, el equipo investigador asumió para iniciar la investigación, en primer lugar, el hecho que la enseñanza del conocimiento matemático suele ser atomizada, un estudiante no reconoce la transversalidad del concepto de dimensión en forma articulada dentro de las áreas de la Matemática, obteniendo como resultado que evoque de manera memorística un enunciado verbal producto de su escolaridad, sin que ello conlleve a la comprensión de éste. Por otro lado, considero que la experiencia de aula permitiría evidenciar la transversalidad del concepto de dimensión en distintos espacios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, propiciando un fortalecimiento de la red conceptual inmersa en el estudio del concepto de dimensión.

De la misma manera, se pensaba de forma favorable para el proceso investigativo que los estudiantes inscritos en el curso, poseían un conocimiento matemático que permitiera dar a conocer sus imágenes mentales y conceptuales sobre la dimensión y lograr evidenciar la red conceptual inmersa en este tópico de estudio; por lo tanto se eliminaría la premisa que su conocimiento fuese netamente intuitivo, lo que garantizaba un ambiente favorable para el desarrollo de la experiencia de aula.

En cuanto a los objetivos generales del proyecto, éstos apuntaron, al diseño, implementación y análisis de una experiencia de aula mediante actividades que propiciaran la evolución del concepto de dimensión en estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, inscritos en el espacio académico electivo fractales; de modo que se presentaran alternativas de gestión en la enseñanza con relación a la compleja tarea de definir la dimensión.

En lo que se refiere a la tarea de consolidar los referentes teóricos relacionados con la dimensión, en los aspectos matemático, histórico e investigativo, fue un proceso complejo, puesto que existen de-

masiadas definiciones dependiendo del contexto matemático donde este implícito, por otro lado, no existe una definición clara de la dimensión, incluso desde la historia, lo que provocó que el equipo investigador asumiera un estudio riguroso, pausado, analítico de todas las fuentes de información halladas.

Población

El grupo de investigación fractales DMA_UPN, realizó esta experiencia en el marco del curso electivo Fractales del semestre II de 2008 inscritos en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Participaron 19 estudiantes, se resalta la heterogeneidad de éstos debido a que por el carácter del electivo, cualquier estudiante que éste adelantando sus estudios de pregrado puede acceder al espacio académico.

En cuanto a las edades de los estudiantes están en el rango de 19- 27 años, con edad promedio de 23 años. En cuanto al semestre al que pertenecen, el grupo se discriminó de la siguiente manera: 5 estudiantes están cursando IV semestre, 3 de V, 1 de VI, 1 de VIII, y 9 cursan IX semestre, este hecho indicaba que una gran mayoría del grupo debería tener numerosas imágenes conceptuales de dimensión, lo que beneficiaría el diseño de la secuencia didáctica; esto se justificaba puesto que los estudiantes que han cursado hasta IV semestre, culminan su formación desde la geometría euclidiana, han cursado Elementos de Geometría, Geometría Plana y cursan Geometría del Espacio y en el momento están adelantando sus estudios en Geometría Analítica y los estudiantes restantes han visto hasta Álgebra Lineal, y algunos de ellos han cursado Topología en el ciclo de profundización. Esta información se utilizaría para el estudio investigativo, puesto que los espacios cursados, son los focos de atención para el seguimiento de las definiciones del concepto de dimensión.

Diseño, Implementación y Resultados

En cuanto al curso, éste se desarrolló con la metodología de seminario, de tal forma que se propiciara la participación e interacción entre estudiantes y profesor. En las sesiones se realizaron exposiciones y discusiones alrededor de la temática dimensión, iniciando con las ideas previas, seguido de una revisión a nivel curricular a lo largo de toda la formación de los futuros licenciados en matemáticas; la construcción en su representación finita de estructuras fractales a través de procesos iterativos, haciendo énfasis en la autosemejanza para poder calcular su dimensión estableciendo la relación entre la escala y las partes autosemejantes que se generan; la dimensión de objetos de la naturaleza y por último, el identificar los invariantes del concepto de dimensión.

Se contó como referentes bibliográficos textos guía como *Fractals for the classroom strategic activities*, de Otto, H y Jurgens, H. (1991) volumen I y II, *Fractal Geometry of Nature* (1982) de Benoit Mandelbrot, *Geometría de medidas y conjuntos autosemejantes* Rey J. (2002), *Fractales para profanos* de Rubiano, G. (2000), *Medidas autosemejantes con solapamiento: Dimensión, momentos y aproximación*, Sastre M. (2003) entre otros; en los cuales se presentan actividades para la clase de matemáticas haciendo un recorrido desde los conocimientos básicos del fractal y el estudio de la dimensión desde lo disciplinar.

Como instrumentos para recoger la información del estado inicial de los estudiantes, se propuso una **prueba de entrada**, con la premisa que cada una de las respuestas proporcionadas evidenciará la comprensión del concepto de dimensión; las representaciones gráficas de objetos geométricos asociados con determinada dimensión; la posibilidad de la existencia de objetos de más de cuatro dimensiones enteras, de la misma manera la existencia de objetos cuya dimensión sea infinita, negativa o esté entre 0 y 1, 1 y 2, 2 y 3.



Actividad	Descripción
Dimensión de autosemejanza	<p>El equipo investigador decidió en la planeación de la actividad dividirla en dos momentos. Un primer momento, en el que la dimensión de objetos euclidianos se obtiene a partir de las imágenes conceptuales previas, la intuición o uso de cálculos sencillos y un segundo momento, en que hallar el valor de la dimensión de fractales clásicos requiere del uso de logaritmos y sus propiedades y de mayor comprensión del significado de éste número hallado en relación con el objeto. Se trabaja con los estudiantes con miras a la caracterización conceptual de dimensión, aportando elementos que modifican las imágenes conceptuales, procesos, manejo de proceptos sobre dimensión.</p>
Los fractales en la naturaleza: el caso de la hoja de papel	<p>Se articula el concepto imagen de dimensión construido hasta el momento con relación a objetos de la naturaleza, para el caso, discutir sobre la dimensión de la hoja de papel.</p> <p>El convencer a los estudiantes que los objetos de la naturaleza no son de dimensión entera, no fue una tarea fácil, pues son de estructura porosa, así, a simple vista no se distinguen. Esto con el fin de evidenciar que los únicos objetos tridimensionales son los objetos matemáticos, geométricos definidos desde la teoría, y rompe con los esquemas e imágenes mentales abordados en algunos textos escolares y de las lecciones de sus profesores. Se confirma que para ellos, romper con sus esquemas mentales previos no es fácil, pues implica reemplazar y acomodar sus imagen conceptuales, dándose el caso que algunos no modifiquen sus imágenes y se queden con las que tenían.</p>
Invariantes del concepto de dimensión	<p>En las actividades anteriores se ha estudiado y analizado el concepto de dimensión, a través de las ideas previas de los estudiantes; el análisis del trabajo que se hace en algunos de los espacios académicos de la licenciatura entorno al concepto y los diferentes métodos para calcularla, era necesario entonces consolidar todas esas acciones para llegar al concepto de dimensión y el reconocimiento de sus invariantes.</p> <p>Mínimos a satisfacer por cualquier concepto de dimensión</p> <p>Los requerimientos apuntados por Yamaguti y otros en “Mathematics of Fractals”, referidos a subconjuntos de \mathbb{R}^n</p> <p>(a) Para conjuntos constituidos por un sólo elemento $\{a\}$, la dimensión deberá ser 0.</p> <p>Para el intervalo unidad $[0,1]$, el valor deberá ser 1.</p> <p>(b) Carácter monótono: Si $A \subseteq B$, la dimensión de A deberá ser menor o igual que la dimensión de B.</p> <p>(c) Estabilidad numerable: Sea X_j una sucesión de conjuntos cerrados de \mathbb{R}^n, entonces,</p> $\dim \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \right) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \dim(X_j)$ <p>(d) Invariancia: Para alguna clase de aplicaciones ψ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n (homeomorfismos para la dimensión topológica) $\dim(\psi(X)) = \dim(X)$</p> <p>Al estudiar los elementos invariantes del concepto de dimensión, se analiza que es posible lograr un conocimiento más sólido y no limitarse a nombrar una serie de características más de tipo intuitivo que cognitivo.</p> <p>En general, la dimensión de un objeto geométrico se relaciona con el espacio que ocupa, y siempre se hace necesario establecer una relación de comparación; de la misma manera, como el objeto geométrico llena el espacio en el que ésta inmerso. El proceso de aprendizaje del concepto de dimensión no se ha logrado al nivel requerido para el estudio de las matemáticas más avanzadas, cuando se enfrentan a un trabajo en el campo de la topología, análisis., teoría de la medida.</p>
Prueba de salida	<p>El grupo de investigadores consideró pertinente la elaboración de ésta actividad con el fin de lograr una acercamiento a la caracterización de las imágenes conceptuales que poseen los estudiantes después del proceso llevado a cabo en el curso con todas las actividades propuestas, para luego realizar el análisis y determinar el <u>cambio cognitivo</u> con relación al estado inicial del concepto definición de dimensión.</p>
Encuesta final	<p>El propósito de este escrito fue determinar si el concepto de dimensión en los estudiantes se había modificado, ampliado o por el contrario permanecía igual después de experimentar cada una de las situaciones diseñadas en el curso debido a la complejidad del concepto, con el fin de <u>complementar y contrastar los resultados obtenidos en la prueba de salida.</u></p>

De esta prueba el grupo de investigadores reconoció la imagen conceptual y/o el concepto definición que estudiante posee el concepto de dimensión, la manera como su conocimiento se remite a representar gráficamente la dimensión de objetos geométricos sin cuestionarse sobre su significado, emitiendo una definición de manera memorística, producto de su proceso de formación, sin reconocer las propiedades o precisar los elementos asociados a estos objetos geométricos o de la naturaleza, estos hechos dieron lugar a que se formularan unas categorías de análisis, que luego se contrastarían en este momento del proceso investigativo. Se reconoce la complejidad del concepto, así como la dificultad para evidenciar su comprensión; elementos que se tendrían en cuenta para el diseño de la secuencia de actividades a ser desarrolla en el espacio académico electivo fractales II-2008.

Se decidió entonces planear otra serie de actividades para el desarrollo del curso, alrededor del concepto de dimensión, las cuales muestran la pluralidad de puntos de vista posibles sobre el mismo objeto matemático, que permite diferenciar las representaciones y el tratamiento que se le asocia según cada área específica de las matemáticas.

Algunas consideraciones sobre el concepto de dimensión

De acuerdo con las palabras de Dreyfus (1991), “comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante” y es el resultado de “una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales”. Las dificultades asociadas a la propia disciplina (debidas a la complejidad de los objetos matemáticos y a la complejidad de los procesos de pensamiento matemático), en general, no pueden evitarse, pero es necesario conocerlas para que el profesor implemente estrategias de enseñanza-aprendizaje que las expliciten para facilitar la adquisición de nuevos conocimientos.

La investigación se interesó por los procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógico formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que es frecuente que dicha presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante, y en relación al concepto de dimensión no es tan claro debido a que el concepto tiene un significado matemático muy amplio y, por lo tanto, consta de una pluralidad de definiciones, por otro lado, desde el punto de vista curricular, éste no se considera un concepto central dentro de la enseñanza de las matemáticas, sino que se usa en forma indirecta para definir o caracterizar otros objetos matemáticos.

Las actividades de aprendizaje deben llevar implícito una participación activa del estudiante; alejado de ejercicios rutinarios, mecánicos y repetitivos, que poco aportan para la construcción de la comprensión en matemáticas. En el caso del concepto de dimensión, los estudiantes la relacionan con características de un objeto como: longitud, superficie, espacio, grado de libertad de movimiento, es decir, con el número de direcciones en el que se pueden mover por el objeto, siendo 1 para la línea, 2 para el plano y 3 para el sólido. Por otra parte, algunos estudiantes llegan a considerar que la dimensión y el cálculo de magnitudes se relacionan en el hecho de que estas permiten conocer el lugar geométrico del objeto, además hay que tener en cuenta que la dimensión es también una magnitud que indica el espacio en el que habita un objeto geométrico.

Tall (1995) explica que existen dos secuencias de desarrollo, distintas y simultáneas, que empiezan una por la percepción de objetos y la otra con la acción sobre ellos. Afirma que la actividad matemática empieza por la percepción de objetos en forma visuo-espacial, seguida de su descripción verbal, su clasificación y el inicio de deducciones verbales. En el caso del concepto de dimensión



de manera informal, se dice que es la forma como se pueden ver las cosas, o el punto de vista como se presenta un determinado fenómeno en un contexto específico. Por otro lado, hay que partir que los conceptos de matemáticas no le corresponden una representación en el mundo real, atendiendo a la necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa), por ejemplo. La no accesibilidad de los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario, hace que su comprensión sea más difícil. En el caso de la dimensión este no aparece como un objeto real, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables, sino como una característica de los objetos matemáticos y de la naturaleza.

Desde la distinción entre la imagen del concepto y la definición del concepto de Tall y Vinner (1981), Tall (1991) considera que la causa de muchos obstáculos responde al principio de extensión genérica, el cual justifica la necesidad de diseñar cuidadosamente un currículo que evite la aparición de estos obstáculos: ‘Si un individuo trabaja en un contexto limitado en el cual todos los ejemplos que aparecen tienen ciertas características entonces, en ausencia de contraejemplos, la mente asume implícitamente en otros contextos estas mismas características conocidas’. En este caso, por ejemplo prevalece el reconocimiento del concepto de dimensión asociado a una idea intuitiva, a partir de la percepción de los objetos del mundo físico, en relación a la representación gráfica de objetos que posean dimensión entera. Ante la indicación de mencionar objetos con alguna dimensión, un estudiante suele responder que la dimensión de una línea es 1, de un cuadrado es 2 y de un cubo 3, y por ende se asocia al entorno con dimensión 3, desconociendo la existencia de dimensiones no enteras o la posibilidad de asociarlos un número negativo.

Por otro lado, algunos estudiantes no recuerdan el concepto de dimensión pero lo asocian a una imagen no estándar, por ejemplo, para objetos que posean dimensión dos, representan además de un plano, objetos como rectángulos, cuadrados, triángulos, rombos, entre otros. Así mismo, para representar objetos que habiten en la tercera dimensión, paralelepípedos, esferas, entre otros. Se evidencia que su razonamiento se centra en la representación gráfica estandar de objetos propios de la geometría euclidiana. De este modo se confirma que desde temprano se debe inquietar al estudiante por preguntar o siquiera intentar imaginar objetos matemáticos o no, de dimensión distinta a la entera y por supuesto mayor a tres, con el fin que su imagen mental no tienda a ser la misma, asociada a la forma de representación mas cercana a ellos, en particular con elementos de la Geometría Euclidiana.

Además, se evidencia al indagar por una definición de dimensión, prevalece la personal que la formal esto justificado desde las respuestas que los estudiantes proporcionaron al grupo de investigadores afirmando la dificultad al intentar definir el concepto de dimensión pues no es fácil de precisar o se desconoce tal definición; así mismo, no es usual preguntarse por dimensiones diferentes a la Euclídea, es decir, alejarse un poco del pensamiento geométrico tradicional, la relación entre la dimensión y el espacio que ocupan las figuras, el conflicto en aceptar la existencia de objetos con dimensión no entera y por último cuestionarse sobre las posibles características que debían tener esos objetos para ser enmarcados en dimensiones no enteras.

Existe aquí un conflicto que Vinner (1991) expresa diciendo: “Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos”. Desde un punto de vista cognitivo, parece que los autores de libros de texto y muchos profesores dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones y que en la resolución de problemas y realización de tareas

son éstas las que se activan en la mente del estudiante y controlan el proceso. El equipo concluye además que los estudiantes poseen imágenes mentales prototipos del concepto de dimensión asociados a la forma de los objetos, al espacio que ocupa, a cualidades del objeto.

Siguiendo con la prelación por la definición personal a la formal, y para el caso de la dimensión, con pluralidad de definiciones dependiendo del área de las matemáticas en que se ubique, al indagar en los estudiantes la relación entre los diferentes espacios académicos y el estudio del concepto de dimensión, se puede observar en las respuestas dificultades al intentar caracterizar las definiciones personales en contraste con el ambiente disciplinar, algunos parecían recordar de memoria algunas de las definiciones pero no lograban dar un significado en ese momento, recordaban y enumeraban muchas temáticas pero con dificultad al relacionarlas con el concepto de dimensión y por supuesto el no hallar ningún invariante entre las definiciones.

Por otra parte, algunos estudiantes manifiestan que el concepto de dimensión no se toca como temática importante en los espacios académicos de la licenciatura, la mayoría consideran que es algo que se conoce pero que es muy difícil de definir y aún más al intentar determinar el cómo se aborda en los diferentes ambientes disciplinares; sin embargo, algunos mencionan que en su formación en la educación media y primaria, sus docentes aludían con ésta palabra a los objetos que les rodean. En los estudiantes se presenta incertidumbre, asombro y conflicto en relación con la existencia de objetos que no posean dimensión entera, sin embargo algunos estudiantes al parecer si se han preguntado y se cuestionan ésta existencia, se evidencia que se les dificulta explicar de que posibles objetos se tratarían.

La acción sobre objetos matemáticos nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con el problema de la dualidad proceso-objeto y la noción de lo que se llama procepto. El estudio de un gran número de casos, en todos los niveles de las matemáticas pero especialmente en niveles superiores, en que un proceso y su producto se representan mediante el mismo símbolo, indujo a Tall a definir el término procepto: “como un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos.”, en el caso del concepto de dimensión de autosemejanza, se alude a una fórmula para calcularla, que a su vez implica manejar o tener un dominio conceptual y procedimental de: escala o razón, logaritmos, autosemejanza, proporcionalidad. La relación entre el número que se obtiene al aplicar el método para el calcular la dimensión de autosemejanza, y la comprensión que la dimensión se relaciona con el espacio que ocupa un objeto geométrico.

Conclusiones

El estudio del concepto dimensión, permite generar y propiciar un trabajo académico desde una mirada transversal determinando los elementos invariantes del concepto, a través de su reconocimiento en el contexto matemático y didáctico, pero como se le asocian definiciones aisladas y sin significado, entonces se afecta su proceso de enseñanza aprendizaje.

El conocimiento de la dimensión es de carácter complejo, aceptar la existencia de dimensiones no enteras ha generado conflictos de tipo cognitivo, entre la estructura del concepto imagen y la estructura lógica del concepto definido Tall (1992); esto se evidencia de alguna manera, en el desarrollo histórico del concepto, ya que sólo hasta 1854 Riemann introduce el concepto de variedad diferenciable, generalizando a cualquier número entero positivo de dimensiones; en 1919 Hausdorff y Besicovitch, muestran la existencia de dimensiones fraccionarias, pero no se da a conocer pues atentaba contra la intuición y los principios fundamentales de la matemática.

Al ser la dimensión un concepto, por lo general, de carácter intuitivo, se evidencian dificultades o er-



ros, entre los cuales vale la pena mencionar: el asociar el concepto de dimensión a la cantidad de elementos de un conjunto o a la longitud del objeto, o a la cantidad de coordenadas o parámetros para determinar la posición de una partícula. Es una tarea difícil cambiar la imagen conceptual de la dimensión de un objeto de la naturaleza, ya que siempre se piensa que es entera porque se cree que son sólidos o planos, desconociendo su estructura porosa; se concluye que los únicos objetos que pueden tener dimensión entera son los definidos en el campo matemático.

Al abordar el estudio del concepto de dimensión, se evidencia su desconocimiento lo cual se evidencia en la dificultad al definirlo, en limitar su conocimiento solamente al ámbito geométrico; al asociarlo con propiedades y representaciones visuales en objetos del mundo físico. De la misma manera, en algunos casos, se relaciona la imagen conceptual por medio de una definición de tipo memorístico sin cuestionar el significado ni los invariantes del concepto dependiendo del contexto matemático en el que se está haciendo referencia; y como lo afirma Tall (1981) “El conflicto entre la imagen conceptual de un concepto y la definición de dicho concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera comprensión del concepto”.

Con relación al diseño de la secuencia didáctica para determinar el cambio a nivel cognitivo del estudiante entorno al concepto de dimensión las ideas previas (generalmente de carácter intuitivo) fueron modificadas al establecer los mínimos que debe tener el concepto de dimensión, así como su carácter transversal en algunos de los espacios académicos. Así mismo, vale la pena mencionar la variedad de situaciones en las cuales el estudiante se encuentra en constante conflicto cognitivo, en relación con el cambio en su concepción intuitiva, logrando reconocer en ejemplos y contraejemplos los elementos mínimos del concepto de dimensión.

Gracias al ambiente de clase y a la variedad de situaciones e instrumentos utilizados permitieron revelar el cambio en las imágenes conceptuales de los estudiantes y sirvieron al equipo investigador como medio de análisis para comprender los procesos de enseñanza aprendizaje y evidenciar el cambio cognitivo en los educandos. Es importante mencionar, que para lograr un esquema conceptual es necesario partir de los conocimientos previos de los estudiantes, en actividades en donde los alumnos elaboran sus respuestas a partir de los elementos de sus esquemas conceptuales evocados por el contexto de la situación.

Esta experiencia permitió evidenciar el interés que despierta en los educandos el estudio del concepto de dimensión, generando en la mayoría de los estudiantes gran impacto, debido a que era la primera vez que escuchan hablar de dimensiones no enteras, así mismo, que los objetos de la naturaleza tienen dimensión no entera, ya que poseen características como porosidad e irregularidad.

Este proyecto permitió que el equipo investigador avanzará en su formación matemática y didáctica puesto que al iniciar esta propuesta investigativa no se consideraron aspectos relacionados con el concepto, lo que mas adelante implicó un mayor énfasis a nivel analítico y estudio serio y profundo de los elementos conceptuales necesarios para abordar su estudio y por ende su proceso de transposición didáctica.

Bibliografía

- AZCÁRATE, C. y CAMACHO M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2.
- GRAY, E. y TALL, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 26, No 2, pp. 115-141.

- MOHAN TIKOO. Integrating geometry in a meaningful way (a point of view). Department of mathematics. Universidad del Estado Sureste de Missouri
 - PEITGEN, O y SAUPE, D. et al. (1991). Fractals for the class room, strategic activities. Vol. 1. New York: Springer Verlag.
 - PEITGEN, O y SAUPE, D. et al. (1992). Fractals for the class room. Part two complex systems and mandelbrot set..Springer-Verlag New York, Inc
 - SABRINA H y MIRELES, M. (2005) Fractal: ideas y percepciones de estudiantes entre 15 y 17 años, En: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol.18.Universidad de Simón Bolívar y la Universidad Pedagógica Experimental Libertador Venezuela.
 - SPINADEL de, Vera. (2003). Geometría Fractal y Geometría Euclidiana. En: Educación y pedagogía. No.35. Vol.XV. (enero-abril), pp.85-91.
 - TALL, D. O., VINNER, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12(2).pp.151-169.
 - TALL, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, , pp. 495-511.
 - TALL, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, Proceedings of PME 19, Recife (Brasil).
 - VINNER, S. (1991). The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics, en Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Ac. Pub. Cap. 5, pp. 65-81.
-