

Actividades para el desarrollo del razonamiento matemático en estudiantes para profesor

María Nubia Soler Álvarez

Universidad Pedagógica Nacional
nsoler@pedagogica.edu.co

Juan Carlos Ávila

Universidad Pedagógica Nacional
javila@pedagogica.edu.co

Jaime Fonseca González

Universidad Manuela Beltrán
jaimejaimef@hotmail.com

Resumen

Este taller surge como una propuesta desde la investigación “Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: los procesos matemáticos de ordenar y razonar” realizada en la Universidad Pedagógica Nacional por el grupo de álgebra en la línea de investigación Currículo en matemáticas para la formación de profesores, durante los años 2007 y 2008. La intención de este taller es que los asistentes puedan realizar algunas de las actividades planteadas en esta investigación de manera que puedan identificar diferentes formas de argumentar en matemáticas. Partiendo de la discusión acerca de lo que es la verdad, se llega a que la argumentación es una manera para convencer a algún interlocutor sobre ciertas verdades particulares, se identifican formas válidas y falaces de argumentar y se hace énfasis en los razonamientos como formas válidas de argumentar. Se hace énfasis en el razonamiento deductivo, el cual garantiza la obtención de verdades utilizando ciertas reglas de inferencia válidas.

PALABRAS CLAVE: Razonamiento matemático, situaciones didácticas, situaciones a-didácticas, argumentación, razonamiento, inducción, abducción, deducción.

Presentación del Trabajo

Durante los años 2007 y 2008 se realizó la investigación “Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: los procesos matemáticos de ordenar y razonar” en la línea de investigación Currículo en matemáticas para la formación de profesores. El propósito principal de esta investigación fue diseñar actividades para orientar el desarrollo de los procesos de razonar y ordenar en estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas. Teniendo como referencia la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y como metodología la Ingeniería Didáctica, se diseñaron situaciones para ser abordadas por los estudiantes en el aula, en las cuales están implicados los procesos mencionados. Este taller tiene como propósito recrear algunas de las situaciones propuestas en la investigación mencionada.



1. Marco Teorico

Proceso de Razonar

Para describir el proceso matemático de razonar, se presentan algunas ideas acerca de lo que es verdad y su relación con la argumentación, luego sobre lo que es un razonamiento y finalmente se describe lo que se entiende por razonamiento deductivo.

1.1. Verdad, argumentación y razonamiento

Ante la pregunta ¿Dios existe?, es posible encontrar diferentes respuestas dependiendo de las personas a quienes se le formula; por ejemplo, un sacerdote, un monje o un pastor seguramente van a responder afirmativamente y además va a querer explicar desde sus creencias personales y su experiencia, porqué este hecho es cierto, además intentarán convencer a quien hizo la pregunta que la existencia de Dios es una verdad incuestionable; por su parte, un científico escéptico va a responder en sentido negativo a la pregunta, también es posible que intente mostrar porqué Dios no existe y va a utilizar resultados científicos para sustentar su respuesta. Se observa entonces que la verdad para un sacerdote no es necesariamente la misma verdad para el científico escéptico, la verdad depende de las personas y de los contextos particulares donde ellas se encuentren, en el caso de un sacerdote, un monje o un pastor, por ejemplo, el hecho de pertenecer a comunidades religiosas en las que existen unas normas, un lenguaje y algunos significados compartidos hace que haya un acuerdo tácito acerca de la existencia de Dios.

Dada esta relatividad de la verdad, el asunto ahora es tratar de identificar diferentes maneras con las cuales las personas intentan convencer a otros acerca de sus verdades particulares, las herramientas usadas para ello se denominan argumentos, los cuales tienen el propósito fundamental de convencer y de hacer cambiar de ideas, actitudes, acciones o decisiones a un interlocutor, si luego de presentar un argumento, el interlocutor no puede objetarlo, se considera que éste es un buen argumento.

La argumentación consiste principalmente en manifestar las razones y pruebas para defender opiniones, concepciones o comportamientos, en ésta se exponen premisas y tesis para la discusión, se argumenta para proponer o defender dichas tesis. Un argumento está compuesto por unas premisas, unas conclusiones y unas maneras de explicar porqué se llega a las conclusiones. Si las premisas y las conclusiones son verdaderas, el argumento se considera como válido y se denomina argumento racional o razonamiento, los demás argumentos se consideran falaces. El proceso de formular algunas conclusiones partiendo de las premisas se conoce como inferencia.

En la antigua Grecia, la argumentación fue cultivada por los Sofistas, y puesta en práctica a través de la retórica. Pero los sofistas no se interesaron por la verdad sino por la apariencia de saber, porque éste reviste de autoridad. Gorgias decía que con las palabras se puede envenenar y embelesar y se trata pues, de adquirir el dominio de razonamientos engañosos, de modo que el arte de la persuasión no está al servicio de la verdad sino de los intereses de quien habla. Existe una gran cantidad de argumentos buenos que aparentemente son racionales, pero que no lo son, unos ejemplos de ellos son los siguientes:

<i>Argumentum ad antiquitatem</i>	Esta falacia consiste en declarar que algo es bueno o correcto porque es antiguo, porque siempre ha sido así.
<i>Argumentum ad baculum o recurso a la fuerza</i>	Como su nombre lo indica, es un argumento que apela a la fuerza para presionar.

<i>Argumentum ad hóminem</i>	Los argumentos llamados <i>ad hóminem</i> , contra el argumentador, son personales en la mayoría de los casos. Son sofismas contra el adversario, no contra sus tesis, o solo indirectamente. Por ejemplo: “No es posible creerle a Pedro lo que dice, porque él es homosexual”.
<i>Argumentum ad ignorantiam</i>	Este argumento apela a la ignorancia, en el sentido de que algo debe ser cierto porque no se ha probado su falsedad.
<i>Argumentum ad verecundiam</i>	Es el argumento que recurre a la autoridad, por la admiración, respeto o conocido prestigio hacia alguien.
<i>Generalización precipitada</i>	Este argumento, como su nombre lo indica, formula una conclusión a partir de uno o de muy pocos casos.
<i>Negación del antecedente</i>	Este argumento responde a la forma: “Si A implica B y no A , entonces no B ”.
<i>Afirmación del consecuente</i>	Si A implica B y B son verdaderos, entonces, A es verdadero, por ejemplo:
<i>Argumentum ad logicam</i>	Esta es la “falacia de la falacia” de argumentar que una proposición es falsa porque ha sido presentada como la conclusión de un argumento falaz.

En lo que respecta a los argumentos válidos o razonamientos, es posible definir lo que es razonar como en el proceso de establecer una relación de dependencia convincente entre los datos disponibles y una conclusión; a esta relación la llamamos inferencia.

Desde los tiempos de Aristóteles, el estudio de la lógica se ha centrado en buscar las conexiones lógicas entre las premisas y las conclusiones en un razonamiento, y también en determinar cuando una inferencia es de tipo racional, es decir, cuando las conclusiones en un argumento resultan válidas asumiendo que las premisas también lo son (Sanchez, C., 2006, página 16).

1.2. Tipos de inferencia

Según el filósofo y matemático Charles Sanders Peirce (1903), hay tres tipos de inferencia: Inducción, abducción y deducción. En el fenómeno de la creatividad científica, según Peirce se articulan abducción, deducción e inducción. “A la abducción le corresponde el papel de introducir nuevas ideas en la ciencia: la creatividad, en una palabra. La deducción extrae las consecuencias necesarias y verificables que deberían seguirse de ser cierta la hipótesis, y la inducción confirma experimentalmente la hipótesis en una determinada proporción de casos. Son tres clases de razonamiento que no discurren de modo independiente o paralelo, sino integrados y cooperando en las fases sucesivas del método científico”.

En las inferencias inductivas se parte de fenómenos particulares y se busca una explicación de los mismos; la base del método es la suposición de que si algo es cierto en algunas ocasiones, también lo es en situaciones similares. También es frecuente el uso de la inducción para encontrar principios generales, los cuales se obtienen de la identificación de patrones y regularidades a partir de la observación de un número finito de experiencias. La inducción puede tener la dificultad de que con las mismas observaciones iniciales, se obtengan otras conclusiones, no necesariamente verdaderas.

La inferencia abductiva consiste en examinar ciertos hechos y establecer causas para lo sucedido. Por ejemplo en medicina, cuando un doctor identifica ciertos síntomas en un paciente, el médico se



formula hipótesis sobre las posibles causas y de acuerdo a ello formula exámenes y por último un diagnóstico. La abducción consiste en explicar una proposición q mediante otra proposición p considerando a p como hipótesis explicativa de q .

Sin embargo, la abducción y la inducción, no tiene validez lógica; en ambos casos la conclusión afirma más de lo que puede inferirse de las premisas y por ello debe ser confirmada. Una abducción es un razonamiento, si la regla elegida para explicar la conclusión se confirma tantas veces, que su probabilidad prácticamente equivale a una razonable certeza, y si no existen otras reglas que expliquen igualmente bien o mejor los fenómenos en cuestión.

La inferencia deductiva afirma como conclusión un caso particular de una regla conocida, del contenido de ciertas proposiciones iniciales, denominadas premisas, se deduce una o varias consecuencias a partir de la aplicación de leyes de inferencia de la lógica; no es necesaria la observación, si las premisas son ciertas, entonces la conclusión ha de serlo también porque se deriva necesariamente de ellas.

Generalmente, los argumentos basados en la experiencia u observación se expresan mejor inductivamente y se sustentan mostrando los casos individuales. Para los argumentos que dan cuenta de informaciones inconclusas, la mejor forma de explicarlos es a través de la formulación de hipótesis, y se defienden aportando razones que hagan plausibles las conclusiones. Finalmente, los argumentos basados en leyes, reglas, definiciones, u otros principios aceptados, se expresan mejor deductivamente, mostrando que se puede aplicar la ley, regla o definición, al caso que se considere.

1.3. Inferencia Deductiva

En lógica, sólo la inferencia deductiva garantiza que las conclusiones que se obtienen en una argumentación son verdaderas. Todo argumento está constituido por información inicial presentada a manera de proposiciones, las cuales denominaremos premisas, unas reglas de inferencia y unas conclusiones. En lo que sigue, se va a describir cada uno de los elementos de un razonamiento deductivo.

Proposiciones

Las proposiciones intuitivamente se pueden describir como afirmaciones con sentido completo y sin ambigüedad, las cuales se pueden considerar como verdaderas o falsas, es decir, tienen asignado un valor de verdad. Existen dos tipos de proposiciones: simples y compuestas. Las primeras son las expresiones más simples que se pueden obtener; en ocasiones se considera que una proposición simple está compuesta por un sujeto, un verbo y un predicado. El segundo tipo de proposiciones, las compuestas, resultan del vínculo que se hace entre proposiciones a partir de conectivos lógicos; algunos de los conectivos lógicos más usados son “y”, denominado también conjunción, “o”, llamado disyunción y “ \rightarrow ”, considerado como implicación, la negación de una proposición también se considera como proposición. Los conectivos lógicos brindan una manera recurrente de construir proposiciones.

Los valores de verdad de la negación de una proposición se pueden obtener fácilmente cambiando el valor de verdad de la proposición inicial; así por ejemplo, si la proposición inicial es falsa, su negación es verdadera y viceversa.

Si son conocidos los valores de verdad de algunas proposiciones, es posible considerar los valores de verdad de algunas proposiciones compuestas usando conectivos como la disyunción, la conjunción y la implicación. Los Megaricos y Estoicos establecieron los valores de verdad de las proposiciones construidas a partir de estos últimos conectivos lógicos (Devlin, 2002).

Reglas de inferencia

En relación con las reglas de inferencia, existen muchas para este tipo de razonamiento, es probable que las primeras leyes de inferencia conocidas hayan sido planteadas por Aristóteles al desarrollar su teoría de los silogismos. Aristóteles considera proposiciones de la forma sujeto-predicado, donde los sujetos pueden ser cuantificados por todo o algún y los predicados pueden ser proposiciones afirmativas o negativas, estableció así cuatro tipos de proposiciones:

1. Todo S es P
2. Todo S no es P = Ningún S es P
3. Algún S es P
4. Algún S no es P

Las reglas de razonamiento de Aristóteles, también denominadas silogismos aristotélicos estaban constituidas por dos proposiciones verdaderas y una conclusión, en las cuales se incorporaban de manera adecuada los cuantificadores y las afirmaciones o negaciones. Aristóteles encontró todas las posibles reglas construidas de esta forma, a manera de ejemplo presentamos la siguiente:

Todo S es P
Todo P es R
Todo S es R .

Otras reglas del razonamiento deductivo muy utilizadas son las siguientes:

Modus ponendo ponens (PP)

De la verdad de $p \rightarrow q$ y la verdad de p se infiere la verdad de q . Esta regla es el fundamento de la ciencia, las demostraciones en matemáticas y en muchos casos la única regla de inferencia para axiomáticas de la lógica.

Modus tollendo tollens (TT)

Negando (*tollendo*) el consecuente, se puede negar (*tollens*) el antecedente de la condicional.

Modus tollendo ponens (TP)

Esta forma de inferencia se conoce como modus tollendo ponens, se aplica a disyunciones, de manera que negando (*tollendo*) una proposición de una disyunción se afirma (*ponens*) la otra.

2. Metodología del taller

Este taller se divide en dos momentos, en el primero se reúnen los participantes en grupos de trabajo de dos o tres personas para enfrentarse a las situaciones propuestas en relación con la verdad, la argumentación y el razonamiento.

En el segundo momento se realizará una plenaria para orientar la discusión hacia la identificación y simbolización de las partes constitutivas de un razonamiento: premisas, conclusiones y reglas de inferencia; también se hará énfasis en la necesidad de validar las reglas de inferencia:

Las situaciones que se presentan son las siguientes:

1. Estaría usted de acuerdo con la afirmación “la crisis económica mundial no afecta a los colombianos”. Describa ampliamente las razones de su respuesta.
 2. ¿Es cierto que $2 + 3 = 5$? ¿Por qué?
-



3. Determine si la siguiente afirmación es verdadera:

Si los filósofos callasen, la nieve quemaría y los círculos serían cuadrados. Si los círculos fuesen cuadrados, entonces los matemáticos se dedicarían a cazar brujas y las abejas a fabricar acero. Ni los matemáticos se dedican a cazar brujas, ni las abejas a fabricar acero. Entonces, los filósofos no callan.

4. ¿Los siguientes son argumentos razonables?

4.1. Si un profesor de matemáticas es constructivista, entonces sus estudiantes aprenden muy bien los conceptos matemáticos. Tomás aprendió muy bien el concepto de factorización, por tanto, Tomás tuvo un profesor de matemáticas que era constructivista.

4.2. Si la suma de las cifras de un número natural representado en base 5 es par, entonces el número es divisible por 2, y si la suma de las cifras de un número natural representado en base 5 no es par, entonces, el número no es par.

4.3. Eduardo afirma que el congreso debería considerar que el aborto no fuese un delito cuando ha sido producto de una violación. No estoy de acuerdo, él no tiene autoridad moral para hablar de esas cosas, ya que es homosexual.

4.4. El secretario de Educación de un departamento colombiano tomó la decisión de no destinar recursos a los docentes para que realicen estudios de posgrado, esto debido a que algunos profesores manifestaron en una entrevista que les hicieron que por las muchas ocupaciones que tenían no disponían de tiempo para realizar ese tipo de estudios posgraduales.

4.5. Alguna función continua no es derivable.

Toda función continua es integrable.

Por lo tanto, alguna función integrable no es derivable.

Referencias

- Caicedo, X. (1989) *Lógica y Calculabilidad*. Una Empresa Docente, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
- Campos, A. (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.
- Devlin, K. (2002). *El Lenguaje de las Matemáticas*. Mannon Troppo.
- Kneale, W., & Kneale, M. (1972). *El Desarrollo de la Lógica* (J. Muguerza, Trans.). Madrid: Editorial Tecnos.
- Peirce, C. (1903) "Tres tipos de razonamiento" (Lecciones de Harvard sobre el pragmatismo, Lección VI). Traducción castellana y notas de José Vericat. En: Charles S. Peirce. *El hombre, un signo* (El pragmatismo de Peirce), J. Vericat (tr., intr. y notas), Crítica, Barcelona, 1988, pp. 123-141. "On Three Types of Reasoning" corresponde a CP 5. 151-179. Extraído el 20 de noviembre de 2007 de <http://www.unav.es/gep/OnThreeTypesReasoning.html>.
- Sánchez, C. (2008) *Lógica y argumentación en matemáticas*. En: memorias del XXII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá, 4 al 7 de diciembre.