Construcción de actividades basadas en los acercamientos de la civilización China a la noción de aproximación

William Fernando Estrada García
wiferesga@yahoo.es
María Giovanna Castiblanco Alvarez
mgcastiblanco@yahoo.es
Profesores Gimnasio Moderno

Resumen

A partir de la historia de la matemática se pueden diseñar actividades que favorezcan la formación humanística y matemática de nuestros estudiantes. En este caso se presentan algunos acercamientos de la civilización China a la noción de aproximación, y con base en estos se muestra parte de una actividad que busca fortalecer la comprensión de esta noción básica del cálculo.

Este trabajo es un producto parcial del grupo de estudio en Historia de la Matemática del Departamento de Matemáticas del Colegio Gimnasio Moderno. En este momento el grupo centra su atención en el estudio de desarrollos históricos que estén relacionados con nociones básicas del Cálculo como aproximación, variación, optimización y predicción; así como en el diseño de actividades que favorezcan la comprensión de estas nociones. La razón por la cual nos interesa el Cálculo, es porque es una de las áreas de la matemática que mayor dificultad presenta a los estudiantes, ya que sus conceptos se basan en nociones de inexactitud y cambio que evidentemente chocan con la concepción tradicional de la matemática como una ciencia exacta. Por ejemplo, la comprensión del concepto de límite en un sentido riguroso es extremadamente difícil y casi imposible para los estudiantes debido a que la noción en la que se sustenta, la aproximación, produce tal incertidumbre que los mismos profesores la han expulsado de aquella variedad de nociones básicas que deben ser enseñadas en la escuela. Pero además, la estructura conceptual de ésta noción es tan compleja, que requiere de un tiempo prolongado y del uso de diferentes vías didácticas para ser plenamente comprendida (García et al., 2002).

Haciendo un estudio de los desarrollos matemáticos de la civilización China nos encontramos con que en ella se establecieron algunos procedimientos de aproximación para calcular áreas de regiones curvilíneas, así como un método para aproximar tanto como se quiera la raíz cuadrada de un número; también obtuvieron la fórmula del volumen de la esfera por un método que antecede a la técnica de Cavalieri en doce siglos aproximadamente.

Este taller pretende por una parte, mostrar los acercamientos de la civilización China a algunas nociones básicas del cálculo, específicamente la aproximación y la variación; así como hacer evidente la presencia de procesos infinitos en algunos desarrollos matemáticos de esta civilización. Por otra parte, busca presentar algunas actividades diseñadas desde una perspectiva histórica, es decir, un diseño que resalta la dimensión humana del conocimiento matemático, sus conexiones con otros ámbitos de la cultura, el contexto en el que nace y evoluciona, y por supuesto, que busca fortalecer la formación matemática de nuestros estudiantes.

En la primera sesión, mostraremos los acercamientos a las nociones básicas de aproximación y/o variación de la civilización China. En la segunda sesión presentaremos algunas actividades inspiradas en los desarrollos de las civilizaciones anteriormente mencionadas.

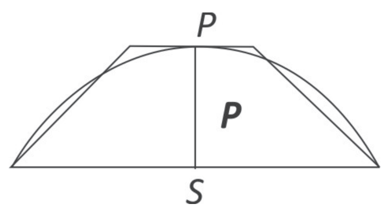
Algunos desarrollos matemáticos en la antigua China

La fuente más importante de conocimiento de la matemática de la antigua China es el libro titulado los Nueve capítulos del arte matemático que data del siglo III a.c. y el cual parece haber sido escrito por varios autores. En el aparecen 246 problemas muy concretos sobre agricultura, ingeniería y tributos. Este libro fue la base de la formación matemática de los funcionarios requeridos por el estado.

A continuación presentamos tres problemas de esta civilización en los que se evidencia la aproximación como concepto y como técnica.

Problema 1: El segmento circular

Los chinos aproximaron el área de un segmento circular mediante un trapecio isósceles cuya base mayor es la cuerda y cuya base menor es congruente con el segmento que une el punto medio de la cuerda con el punto medio del arco. Con base en ello encontraron que el área de un segmento circular determinado por una cuerda de longitud y con la distancia del punto medio de la cuerda al punto medio del arco igual a p, viene dada por $\frac{(s+p)p}{2}$



Problema 2: La raíz cuadrada de un número

Los chinos inventaron un procedimiento para obtener de manera aproximada la raíz cuadrada de un número. Este método, por un lado, es un proceso que se puede continuar en forma infinita y por otro, es un procedimiento que permite una aproximación a la raíz cuadrada de un número con tantas cifras decimales como se quiera. Es decir, es una técnica que incluye dos ideas importantes del cálculo: la idea de un proceso infinito y la idea de aproximación tan cercana como se desee.

Este método está basado posiblemente, en la aproximación del área de un cuadrado por recubrimientos de cuadrados y rectángulos. De ser esta la idea en la que se basa el procedimiento, estaríamos ante una idea en la que subyace un método de exahución muy elemental, base del cálculo integral.

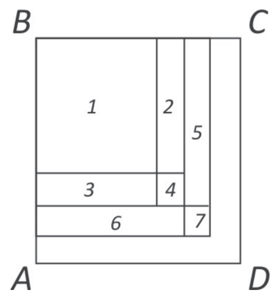
Describiremos de modo intuitivo la idea en la se basa el método.

Fundamento del método

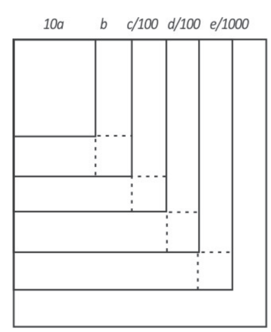
Para los Chinos, calcular la raíz cuadrada de un número equivalía a encontrar la longitud del lado de un cuadrado cuya área fuese precisamente dicho número. Para tal fin, construían un cuadrado, digamos ABCD, y empezaban a recubrirlo con cuadrados cada vez más grandes que se obtenían a través de un procedimiento particularmente interesante.

En primer lugar se construye un cuadrado 1 de lado entero cuya área sea lo más cercana al área del cuadrado ABCD. Luego se agregan los rectángulos 2 y 3; después se añade el cuadrado pequeño 4;

posteriormente se agregan los rectángulos 5 y 6 y en seguida se añade el cuadrado 7. Volvemos a agregar dos rectángulos y de nuevo un cuadrado pequeño y continuamos de esta manera en forma indefinida, deteniéndonos, sólo hasta obtener la aproximación deseada al área del cuadrado ABCD.



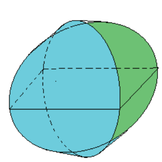
Conociendo las dimensiones de los cuadrados y rectángulos que se van agregando, se puede obtener paulatinamente el lado del cuadrado y por tanto, la raíz cuadrada del número dado. Los chinos manejaron la base 10, de manera que si la raíz cuadrada que estaban buscando constaba, por ejemplo, de dos cifras enteras y la querían con aproximación de tres decimales entonces procedían a escribirla en la forma 10a+ b + (1/10)c + (1/100)d + (1/1000)e donde *a, b, c, d, y e* son dígitos, y además, donde tal expresión es precisamente la raíz cuadrada buscada. Si tan sólo querían una aproximación de dos cifras decimales e intuían que la raíz constaba de cuatro cifras enteras, entonces procedían a escribirla en la forma 1000a+100b+10c+d+(1/10)e+(1/100)f donde *a, b, c, d, e, f* son nuevamente dígitos. De modo que conociendo los valores de las variables se podía calcular el lado del cuadrado y por tanto la raíz deseada.

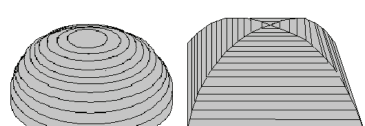


Problema 3: Volumen de la esfera

Los Chinos consideraron la esfera como un sólido cuyo volumen estaba muy próximo al sólido formado por dos sombrillas cuadradas, una de las cuales cubre el hemisferio norte y otra el hemisferio sur. De modo que al obtener el volumen de este sólido, podrían encontrar el volumen de la esfera.

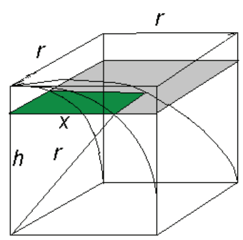
Su análisis les permitió concluir que por cada sección transversal de forma cuadrada que compone el sólido sombrilla, existe una sección transversal de forma circular en la esfera. Así, existe una correspondencia biunívoca entre las secciones transversales del sólido sombrilla y la esfera.



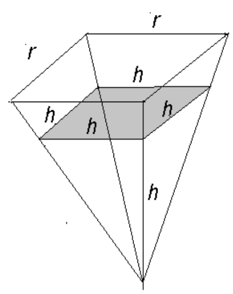


Los chinos sabían que la razón entre el área de un cuadrado y un círculo inscrito es de 4 a π donde π=3. Con base en esto notaron que el área de cada sección cuadrada en el sólido sombrilla está en razón de 4 a π con el área de la sección circular correspondiente en la esfera, por lo cual el volumen del sólido sombrilla y el de la esfera están en esta misma razón.

$$Area(\sec.transv.cubo) - Area(\sec.transv.sombrilla)$$
$$r^2 - x^2 = h^2$$
$$Area(\sec.transv.pirámidecuadrada) = h^2$$



Pero un sólido para el cual también se cumple que el área de una sección transversal ubicada a una altura h es h2, es la pirámide de base cuadrada con altura igual al lado de su base y tal que una de sus aristas laterales es perpendicular a ésta.



Por tanto, el volumen del sólido que resulta de quitarle al cubo (de arista r) el octante de sombrilla (de radio r) es igual al volumen de una pirámide de base cuadrada de lado r y altura r. Así tenemos:

$$V(cubo) - V(oct.sombrilla) = V(pirámidecuadrada)$$

$$V(oct.sombrilla) = V(cubo) - V(pirámidecuadrada)$$

$$V(oct.sombrilla) = r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2}{3}r^3$$

$$\frac{V(sombrilla)}{V(esfera)} = \frac{4}{\pi}$$

$$V(esfera) = \frac{\pi}{4}V(sombrilla)$$

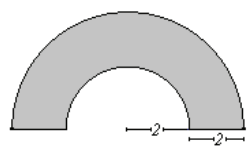
$$V(esfera) = \frac{\pi}{4}\frac{16}{3}r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

En esta demostración se aprecia con toda claridad y precisión el método de Cavalieri para obtener el volumen de sólidos. Pues el punto de partida del razonamiento es el principio según el cual si las secciones transversales de dos sólidos ubicadas a la misma altura del plano que contiene las bases están en una razón dada, entonces los volumenes de los sólidos están en esa misma razón. Este principio, conocido como principio de Cavalieri, fue considerado como una base para el desarrollo del cálculo integral, al considerar los sólidos formados por secciones muy delgadas. Tuvo inconsistencias desde el punto de vista de la rigurosidad matemática, pero fue uno de los primeros acercamientos a la idea de infinitesimal y constituyó un método bastante práctico para obtener resultados matemáticos, en un momento en el que la ciencia y la tecnología los demandaban con urgencia.

A manera de ejemplo presentamos parte de una de las actividades que desarrollaremos con la que se pretende ampliar y fortalecer la formación matemática de nuestros estudiantes.

Actividad I

1. Construya una figura rectilínea cuya área sea aproximadamente igual al área de la figura indicada tomando como base el procedimiento chino para calcular el área del segmento circular.



2. Calcule aproximadamente el área de la figura anterior usando las figura construida
3. Suponga que el trapecio construido por los chinos para aproximar el área de un segmento circular también sirve para aproximar su perímetro. Utilice este hecho para calcular aproximadamente el perímetro de la figura anterior.
4. Calcule el área y el perímetro de la figura anterior utilizando los métodos actuales y compárelos con los obtenidos mediante la técnica china. Con base en esto determine que tan exacto es el método chino.
5. ¿Con qué otra figura rectilínea se podría aproximar el área de un segmento circular? Compare su método con el método actual y establezca que tan efectivo es con respecto al método chino.

Reflexión didáctica

1. ¿Qué conceptos matemáticos están involucrados en el desarrollo de la actividad anterior?
2. ¿Qué habilidades y destrezas potencia el desarrollo de esta actividad con nuestros estudiantes?
3. ¿Cuáles son las actividades que usted propone sus estudiantes para acercarlos a la noción de aproximación? ¿Qué ventajas o desventajas tiene esta actividad con respecto a las que usted propone?

Referencias bibliograficas

- García, G.,Serrano, C., Díaz, H. (2002). La aproximación una noción básica en el Cálculo. Un estudio en la educación básica. Colciencias. Bogotá.
- Katz, V. (2004). The History of Mathematics. Addison Wesley. New York.
- Swetz, F. (1995). “The Volume of a Sphere: A Chinese Derivation”, en The mathematics teacher, Vol. 88, Nº 2, pp. 142-145..0.0.