Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de van hiele

Zaida Margot Santa Ramírez
zsanta@ayura.udea.edu.co
Carlos Mario Jaramillo López
cama@matematicas.udea.edu.co
Universidad de Antioquia

Resumen

Dado que muchos estudiantes de la inferfase bachillerato – universidad presentan dificultades en la comprensión de los conceptos relacionados con las secciones cónicas, se pretende con este trabajo de investigación describir el nivel de razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan con la construcción de las secciones cónicas con la axiomática del doblado de papel. En ese proceso de descripción, se espera que el estudiante tenga la posibilidad de avanzar en la conceptualización de dichos lugares geométricos. Para lograrlo, se va a diseñar un guión de entrevista semi estructurado de carácter socrático, que en primer lugar permita detectar el nivel de razonamiento de los estudiantes, y en segundo lugar, se constituya en una experiencia de aprendizaje para avanzar en su nivel de razonamiento.

La definición geométrica de cada sección cónica (elipse, hipérbola y parábola) se puede lograr con base en el modelo educativo de van Hiele, no sólo porque es un modelo diseñado inicialmente para la geometría, sino por su carácter visual geométrico, que facilita definiciones formales a partir del reconocimiento visual, el análisis y la clasificación.

El doblado de papel es una herramienta útil y funcional que le brinda la posibilidad al sujeto de interactuar con una hoja de papel para visualizar conceptos y así facilitar el aprendizaje de la geometría. Se relaciona con el modelo porque es una estrategia de visualización geométrica que enriquece el nivel I de razonamiento y al mismo tiempo le contribuye con una componente de tipo experimental.

Presentación del trabajo

En la tesis de pregrado "Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características" (Santa, Bedoya & Jiménez, 2007) se realizaron una serie de pruebas y entrevistas a estudiantes y profesores de ciertas instituciones públicas de la ciudad de Medellín, que llevaron a afirmar que la geometría analítica se venía enseñando de una forma tradicional y bastante lineal en dichos contextos. Es decir, los profesores se limitaban a construir las secciones cónicas en papel milimetrado y después se interesaban por llevar a los estudiantes al conocimiento de las ecuaciones generales y canónicas, para posteriormente, evaluarles la búsqueda algorítmica de los elementos de cada sección cónica. De hecho, nuestra experiencia docente a nivel universitario nos lleva a afirmar que los estudiantes llegan a los primeros semestres de universidad con habilidades para encontrar dichas ecuaciones, pero sin reconocer el concepto de lugar geométrico propio de cada una de las secciones cónicas. Al respecto, afirman Cruz y Mariño (1999) "dentro del estudio de la geometría analítica, se han presentado dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas" (p. 15). Y argumentan que:

"en los trabajos sobre educación matemática para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos de los estudiantes se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el por qué de su definición como lugar geométrico, lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen" (p. 15).

Dada esa dificultad, con este trabajo de investigación pretendemos, con base en el modelo de van Hiele, describir el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante al momento de enfrentarse con la construcción de las secciones cónicas para diseñar así una propuesta metodológica que le permita avanzar en la comprensión de la conceptualización de dichos lugares geométricos.

De acuerdo con el objetivo general, los objetivos específicos son:

- Diseñar un guión de entrevista semi – estructurado de carácter socrático, que permita detectar el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante al momento de enfrentarse con la construcción de las secciones cónicas y a la vez constituya una experiencia de aprendizaje para avanzar en su nivel de razonamiento.
- Determinar los descriptores para ubicar a un estudiante en uno de los niveles de razonamiento de van Hiele, en relación con los conceptos de cada sección cónica, utilizando la axiomática del doblado de papel.
- Consolidar la axiomática del doblado de papel como una propuesta alternativa para mejorar el razonamiento de los estudiantes en el área de la geometría.

Marco teórico

MODELO DE VAN HIELE

El Modelo de Van Hiele es un modelo de enseñanza de la geometría euclidiana. Fue creado en Holanda por los esposos Van Hiele, profesores de matemática, quienes se encontraron con el problema de que muchos estudiantes no compartían el mismo nivel de razonamiento a la hora de abordar un tema de geometría.

El modelo no sólo brinda una descripción del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la Geometría, sino que también muestra una relación entre ambos procesos. Por eso, está compuesto por tres partes fundamentales: la percepción o Insight, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.

En el artículo "El Modelo de van Hiele y el Doblado de Papel" de los profesores Carlos Mario Jaramillo, Orlando Monsalve y Pedro Vicente Esteban (2005), se encuentra que:

"La percepción se logra cuando una persona es capaz de actuar en una situación no familiar; ejecuta de forma competente (correcta y adecuadamente) las acciones requeridas por la situación y emplea intencional (deliberada y conscientemente) un método que resuelve la situación. Se logra la percepción cuando los estudiantes comprenden lo que hacen, por qué lo hacen y cuándo lo hacen; además, pueden aplicar su conocimiento a la resolución de nuevos problemas no rutinarios". (p. 2)

La segunda parte del modelo, los niveles de razonamiento, es de tipo descriptivo, puesto que identifica una estratificación del razonamiento humano en niveles jerarquizados, a través de los cuales *"progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo"* (Jaime & Gutiérrez, 1990, p. 305).

La tercera parte del modelo, las fases de aprendizaje, es de tipo prescriptivo, porque da una serie de directrices a los profesores para que puedan ayudarle a sus estudiantes a pasar de un nivel de razonamiento al inmediatamente siguiente.

Los niveles de razonamiento de van Hiele son:

Nivel I: De reconocimiento visual

El estudiante en este nivel reconoce las figuras como un todo, es decir, se le dificulta encontrar partes constitutivas de los objetos; se limita a describirlos en su forma física: el color, la forma… (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Nivel II: De análisis

El estudiante es capaz de determinar las partes constitutivas de los objetos; es capaz de encontrar propiedades, pero todavía no cuenta con las capacidades para relacionar unas propiedades con otras, o hacer clasificaciones correctas (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Nivel III: De clasificación

El estudiante es capaz de relacionar unas propiedades con otras; de hecho puede establecer que unas propiedades se deducen de otras; es capaz de hacer clasificaciones lógicas correctas. En este nivel, el estudiante empieza a comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es capaz de seguir demostraciones, pero todavía se le dificulta hacerlas sin ayuda (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Nivel IV: De deducción formal

El estudiante en este nivel comprende la estructura axiomática de las matemáticas y es capaz de realizar demostraciones de propiedades que antes había mencionado de manera informal (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Principios básicos de los niveles

La parte descriptiva del modelo de van Hiele, los niveles de razonamiento, comparten ciertas características comunes: la jerarquización y secuencialidad, relación entre el lenguaje y los niveles y, la continuidad del paso por los niveles.

Jerarquización y secuencialidad: Como cada uno de los niveles representa un grado de sofisticación en el razonamiento matemático, entonces es válido afirmar que cada nivel se apoya en el inmediatamente anterior. Luego, "*no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel anterior"* (Jaime & Gutiérrez, 1990, p. 312). Esto es importante en la medida en que se puede recurrir a los conceptos y definiciones desarrollados en un nivel anterior.

Relación entre el lenguaje y los niveles: Las capacidades de razonamiento de cada uno de los niveles no sólo tienen relación con la resolución de problemas sino también con la manera de expresarse y con la forma de utilizar cierto vocabulario. Luego, "*a cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico… y dos personas que razonan (y que interpretan los argumentos del otro) en diferentes niveles no podrán comprenderse" (p. 315).*

Continuidad en el paso por los niveles: El paso de un nivel al siguiente se produce de forma continua. Esto es, en palabras de Jaime y Gutiérrez (1990), "*el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y del otro"* (p. 319). Esto implica que los estudiantes podrán mostrar rasgos en sus procedimientos y razonamientos que corresponden a un estado de transición entre dos niveles.

Las fases de aprendizaje propuestas por van Hiele son cinco:

1. Información: Es la fase en la que los estudiantes tienen la oportunidad de conocer el tipo de trabajo que van a hacer y los profesores, de descubrir el nivel de razonamiento en el que están esos estudiantes en un tema particular.
2. Orientación dirigida: Es la fase en la que los estudiantes construirán los elementos fundamentales de la red de relaciones del nuevo nivel, es decir, "descubren, comprenden y aprenden" (p. 334) los conceptos y propiedades principales de la temática que están estudiando.
3. Explicitación: Es la fase en la que los estudiantes revisan, socializan y comparan el trabajo. Es una puesta en escena de los conocimientos obtenidos hasta entonces para perfeccionar el lenguaje y la forma de expresar las ideas.
4. Orientación libre: En esta fase, los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos en las fases anteriores en otras investigaciones, temas o áreas.
5. Integración: En esta fase, el estudiante debe condensar los conocimientos que ha construido hasta entonces en un todo; es decir, acumula, integra y compara todos los conocimientos para estructurar su red de relaciones final. (Jaime & Gutiérrez, 1990).

AXIOMAS DE HUZITA[1] (Huzita, 1989, p. 143)

1. Dados dos puntos p_1 y p_2, se puede encontrar un doblez que pasa a través de ellos.
2. Dados dos puntos p_1 y p_2, se puede encontrar un doblez que lleva a p_1 sobre p_2.
3. Dados dos dobleces l_1 y l_2, se puede encontrar un doblez que pone a l_1 sobre l_2.
4. Dado un doblez l_1 y un punto p_1, se puede encontrar un doblez que pone a l1 sobre sí misma y pasa por p1.
5. Dados un doblez l_1 y dos puntos p_1 y p2, se puede encontrar un doblez que lleva a p_1 sobre l_1 y pasa por p2.
6. Dados dos dobleces l_1 y l_2 y dos puntos p_1 y p_2, se puede encontrar un doblez que pone a p_1 sobre l_1 y a p2 sobre l_2.

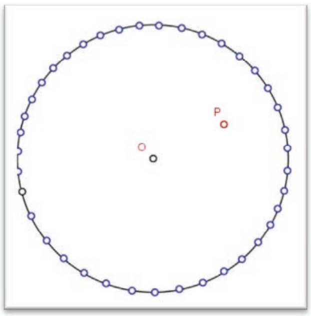
CONSTRUCCIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS CON DOBLADO DE PAPEL

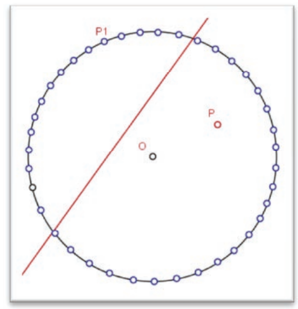
Elipse:

Para construir una elipse con la axiomática del doblado de papel, es necesario partir de una hoja de papel de forma cuadrada y dibujar en su interior una circunferencia[2]. Se ubican el centro O y un punto P en el círculo. Además, se deben dibujar muchos puntos alrededor de la circunferencia. Aplique sucesivamente el axioma 2 con los puntos de la circunferencia (P_n) y el punto P: "dados dos puntos existe un doblez único que pone al punto P_n sobre el punto P".

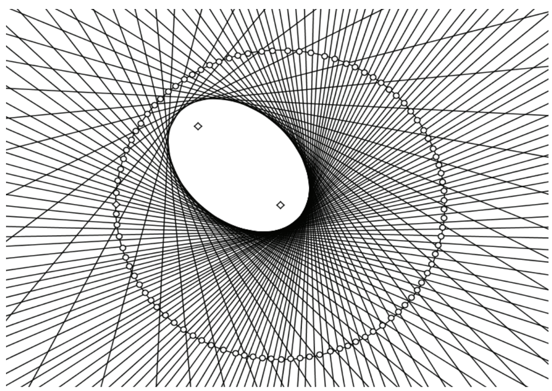
1 La traducción de estos axiomas se realizó en el Seminario de Investigación Geometría y Doblado de papel, del grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (UDEA – EAFIT).

2 Con el doblado de papel también es posible definir el lugar geométrico circunferencia. Sin embargo, sólo es posible hablar de puntos discretos de la misma. Para el caso de la elipse se va a asumir que la circunferencia ha sido definida previamente desde la axiomática del doblado de papel.



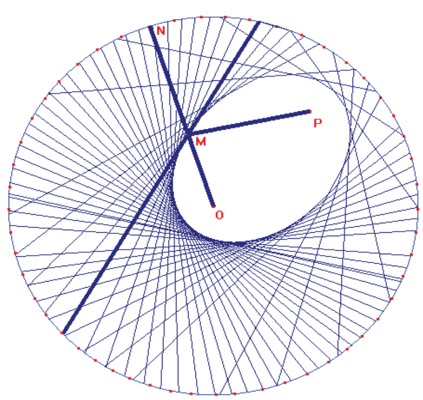


Al finalizar todos los dobleces, la sección cónica se forma como la “envolvente de una familia de rectas” (Ibánez, 2002, p. 22). Así:



La anterior construcción permite llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico, de la siguiente manera:

Suponga que O y P son los focos de la elipse. Sea M el punto donde se intersecan el radio NO y la mediatriz del segmento NP (axioma de Huzita 2). Nótese que MP es congruente con NM, por el segundo axioma de Huzita.



Luego, OM + MP = r, donde r es el radio de la circunferencia inicial de la que se partió para la construcción.

Por lo tanto, se puede concluir que la ELIPSE es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados FOCOS, es una constante.

Metodología del taller

El taller que se propone, está organizado en los siguientes momentos:

Momento 1: Presentación de la propuesta de investigación “Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de van Hiele”.

Momento 2: Axiomática del doblado de papel (Axiomas de Huzita) y sus implicaciones geométricas.

Momento 3: Construcción de la elipse con doblado de papel y definición como lugar geométrico.

Referencias bibliográficas

- Cruz, L., & Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. Revista Educación, 97, 14 – 21.
- Geretschläger, R. (1995, December). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine,* 5, 357–371.
- Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology,* 143-158.
- Johnson, D. (1975). Matemáticas más fáciles doblando papel. España: Distein.
- Jaime, A y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele. En: S, Llenares, M.V. Sánchez (eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática. España:* Alfar, p. 295 – 384.
- Jaramillo, C., & Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele. Revista Educación y Pedagogía, vol XVIII, 109 - 118.
- Jaramillo, C. (2000) La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, España.
- Jaramillo, C., Monsalve, O., & Esteban, P. (2005) “El Modelo de van Hiele y el Doblado de Papel”. Documento sin editar.
- Lang, R. (1996 – 2003). Origami and Geometric Constructions. Buscado: Junio 4, 2006, de: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares en Matemáticas. Bogotá.
- -------- (2004) Serie Documentos: Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá: Enlace Editores Ltda.
- -------- (2006) Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá.
- Monsalve, O., & Jaramillo, C. (2003). El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, Vol. XV, 35, 11 – 25.
- Royo, J. Matemáticas y papiroflexia. (2002). Sigma: *Revista de Matemáticas*, 21, 175 – 192.
- Row, S. (1966). Geometric Exercises in Paper Folding. New York: Dover Publications.
- Santa, Z., Bedoya, D., & Jiménez, O. (2007). Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características. Tesis de grado. Universidad de Antioquia: Facultad de Educación.
- Van Hiele, P. (1990). El problema de la comprensión. (A. Gutiérrez, traducción). Proyecto de investigación: Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. (Tesis doctoral presentada en 1957).