Nicómaco y una propiedad de los números impares

Ricardo Barroso Campos

No solamente porque decimos que existía en las demás en la mente del Dios creador como algún plan universal y ejemplar, confiando en ella como un diseño y arquetipo, el creador del universo puso en orden sus creaciones materiales y las hizo de acuerdo con sus propios fines; sino también porque es por su naturaleza anterior en su nacimiento...

Nicómaco de Gerasa fue un filósofo griego de fines del siglo I de nuestra era; se distinguió, además, como músico y matemático.Pertenece a la época de sincretismo de la filosofía griega, caracterizada por la renovación de las doctrinas pitagóricas, en cuya labor le acompañan el español Moderato de Cádiz y Apolonio de Tyana. Los biógrafos antiguos le atribuyen una Vida de Pitágoras, una Colección de los dogmas pitagóricos y un Tratado sobre las fiestas de los egipcios. La primera y la última se han perdido y de la segunda formaban quizá parte los diferentes fragmentos que hoy nos quedan de él. Tales son los Arithmetica Theologumena, conservados por Focio y publicados por Aot junto con la obra del mismo título de Jámblico (Leipzig, 1817). Se ocupan de las relaciones místicas de los números.

Su Enchiridion Harmonices es la fuente más antigua acerca de la teoría musical de los pitagóricos.

La obra que ha cimentado la fama de Nicómaco es la Introductio Arithmetica en dos tomos, publicada por Wechel en 1538, por Nobbe en 1862 y por Pistelli en 1894; pero su importancia no es debido al mérito intrínseco de la obra, sino a sus condiciones didácticas, y, sobre todo, a la influencia que ejerció durante la Edad Media, tanto en Oriente, donde fue comentada por Jámblico,Proclo, Filopón y otros, como en Occidente, gracias a la versión de Apuleyo y a la paráfrasis de Boecio. Todas las obras de Nicómaco ofrecen un mismo carácter: la unión de la teoría mística de los números con la simbólica explicativa del Universo.

La Introductio es considerada por Morris Kline como el resurgimiento de una aritmética independiente. Desde el punto de vista histórico, su importancia para la aritmética es comparable a la de los Elementos de Euclides para la geometría.Este libro no sólo fue estudiado, tomado como referencia y copiado por decenas de autores posteriores, sino que se reconoce como inspirador de varios libros por otros autores del mismo periodo, con lo que refleja el interés de la época. Los números representaban cantidades de objetos y dejaron ya de ser considerados como longitudes de líneas. Nicómaco utiliza siempre palabras, mientras que Euclides emplea dos letras tales como AB -refiriéndose a un segmento lineal-al hablar de números.

De las cuatro materias destacadas por Platón (aritmética, geometría , música y astronomía), Nicómaco afirma que la aritmética es la madre de las demás. Mantiene que:

La aritmética, continúa, es esencial para las demás ciencias ya que éstas no existirían sin ella. Sin embargo, si las demás ciencias fueran abolidas ,la aritmética seguiría existiendo.

La esencia de la Introductio está en los trabajos aritméticos de los primeros pitagóricos. Considera números pares e impares, cuadrados, rectangulares, primos, compuestos y paralelepipédicos (de la forma $n*n*(n+1)$) y define muchos más tipos. Da la tabla de multiplicar entre el 1 y el 9 tal y como la aprendemos nosotros.

Descubrió la siguiente proposición: Si escribimos los números impares:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ...

entonces el primero es el cubo de 1; la suma de los dos siguientes, $3 + 5 = 8$, es el cubo de 2, la suma de los tres siguientes, $7 + 9 + 11 = 27$, es el cubo de 3, y así sucesivamente.

Comprobemos esta propiedad:

1	=	1^3
3 +5	=	2^3
7 +9 +11	=	3^3
13 + 15 + 17 + 19	=	4^3
...		

El primer número impar de cada una de las n-uplas es:

$$n^2 - n + 1$$

Veámoslo por inducción:
La n-upla 1ª lo verifica:

Para n=1, es: $1^2 - 1 + 1 = 1$

Supongamos que el primer elemento de la n-upla h es:

$$h^2 - h + 1$$

Dicha n-upla tiene h números impares, por lo que habría que sumarle 2h para obtener el primer elemento de la n-upla siguiente, sería:

$$h^2 - h + 1 + 2h = h^2 + h + 1$$

Valor que coincide con:

$$(h + 1)^2 - (h + 1) + 1 =$$
$$= h^2 + 2h + 1 - h - 1 + 1 =$$
$$= h^2 + h + 1$$

c. q. d.

También es posible verlo mediante las diferencias :

1 3 7 13 21 31 ...

Primeras dif: 2 4 6 8 10 ...

Segundas dif: 2 2 2 2 ...

Luego el término general es un polinomio de 2º grado:

$$a n^2 + b n + c$$

Para n=1	$a + b + c = 1$
Para n=2	$4a + 2b + c = 3$
Para n=3	$9a + 3b + c = 7$

Sistema en a, b, c que resuelto nos da: a=1 b=-1 c =1, es decir, el primer término de las n-uplas es:

$$n^2 - n + 1$$

Veamos a continuación la suma de los n términos de la correspondiente n-upla.

Los valores a sumar son:

$(n^2-n+1) + (n^2-n+1+2) + (n^2-n+1+ 2*2) +..$

$..+ (n^2-n+1+2*j)+...+(n^2-n+1+2*(n-1)).$

Tenemos, pues, una progresión aritmética cuyo primer elemento es

$$n^2 - n + 1$$

la diferencia es 2 y está compuesta por n elementos.

Por ello, sus suma es:

$$S = \frac{(n^2-n+1) + (n^2-n+1+2\,(n-1))}{2}\,n = \frac{2n^2}{2}\,n = n^3$$

Una consecuencia muy interesante del resultado anterior es la siguiente:

Todo número cubo perfecto es la diferencia entre dos cuadrados.

En efecto, la suma de los números impares nos va dando cuadrados perfectos:

1	=	1^2
1 + 3	=	2^2
1 + 3 + 5	=	3^2
1 + 3 + + 7	=	4^2

Veámoslo en general:
Por inducción:

Para n=1 es cierto: $1=1^2$

Supongamos que para n=h sea:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2\,h-1) = h^2$$

Para n= h + 1, será:

$$1 + 3 + 5 + 7 +...+ (2h-1) + (2(h+1)-1) =$$

$$h^2 + (2\,h + 2 - 1) = h^2 + 2\,h + 1 = (h + 1)^2$$

c.q.d.

Pues bien, del primer resultado y de este, podemos concluir que:

$$1^3 = 1^2 - 0^2$$
$$2^3 = 3^2 - 1^2$$
$$3^3 = 6^2 - 3^2$$
$$4^3 = 10^2 - 6^2$$

Es decir, se verifica que:

$$n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

En efecto, desarrollando obtenemos:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n^2+n)}{4}\right)^2 - \left(\frac{(n^2-n)}{4}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(n^4+2n^3+n^2) - (n^4-2n^3+n^2)}{4}\right) =$$

$$= \frac{4n^3}{4} = n^3$$

c.q.d.

Bibliografía

* KLINE,MORRIS (1992).**El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I**. Madrid. Alianza Editorial.

* **Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana.** (1966). Madrid. Espasa-Calpe.

Ricardo Barroso Campos
Departamento de Didáctica de las Ciencias
Universidad de Sevilla