El uso del Cabri en la demostracion de teoremas de la geometria euclidiana

Fabio Fidel Fuentes Medina
fabiofuentes63@hotmail.Com
Orlando Enrique Castañez Díaz
Luís Hernán Gordillo Cárdenas
luiscordillocar@yahoo.Com
Gelis Ibret Mestre Carrillo
gelismestre@hotmail.Com
Grupo de investigación de geometría y matemáticas geoma.
Universidad popular del cesar

Resumen

Con el presente taller se propone utilizar el CABRI PLUS II para abordar las demostraciones de algunos teoremas de la geometría euclidiana, asociados con ángulos, triángulos y cuadriláteros, temática que es abordada en la básica primaria y secundaria, al igual que en la geometría euclidiana de la licenciatura de matemáticas de las Universidades de Colombia. La utilización de las demostraciones de teoremas es considerada una potente herramienta que ayuda a mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje y desde luego a desarrollar el pensamiento geométrico; con ello se busca que los estudiantes sean capaces de interpretar los teoremas, generando un cambio conceptual, con el uso de las NTIC's.

Introducción

El origen de la geometría es atribuida a los egipcios y babilonios, quienes construyeron una geometría práctica, la relacionaban con la medida de la tierra y los impuestos de contribución; al igual en las construcciones de edificaciones. Los griegos fueron los primeros en realizar muchas construcciones geométricas; a ellos debemos las construcciones con regla y compás que conocemos, fueron ellos quienes se encargaron de axiomatizarla. Euclides fue el principal autor de este cambio, se encargó de sistematizar lo existente en su libro "Los Elementos", de claridad tan excepcional que muchos países aún lo utilizan como texto guía. En éste libro, Euclides enuncia con gran precisión sus fundamentos, simplifica los enunciados y demostraciones de las proposiciones; clasifica, ordena y numera todos los principios fundamentales, las definiciones y proposiciones. Para él, sólo es válido el uso de la regla y el compás, no permite el uso de otro instrumento; sus demostraciones se apoyaban en un proceso de formalización y rigor, basadas únicamente a través de la circunferencia y la línea recta. La geometría desarrollada de esta manera se llama geometría euclidiana.

La geometria en la educacion

La geometría es considerada como una de las asignaturas más ligadas a la realidad. Los estudios geométricos son de tan gran importancia, que los países iberoamericanos, a través de sus ministerios de educación, la están retomando en sus currículos, sugiriendo para su desarrollo el uso de las ultimas estrategia pedagógicas modernas, como lo son “Los Medios Interactivos Programables”: calculadoras graficadoras y software, que han demostrado ser un medio para lograr un mejoramiento en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Software como: Derive, Regla y Compás, y CABRI entre otros, permiten mejorar el aprendizaje, especialmente de la geometría desde otra perspectiva, proporcionando contexto de aprendizaje con nuevas posibilidades de representación (MEN), conocida hoy como “Geometría Dinámica”, desplazando a la “Geometría Euclidiana”. El uso de las nuevas tecnologías permite experimentar muchas propiedades que no lo permite el uso de la regla y el compás. La diferencia entre los medios estáticos y dinámicos es muy simple: los medios estáticos no cambian en función del tiempo; los medios dinámicos sí.

Algunas verdades geométricas denominadas teoremas, son demostradas utilizando el método sintético o axiomático, es decir; de verdades conocidas, se pasa de la hipótesis a la tesis. Por el contrario, el método analítico permite estudiar las relaciones entre magnitudes. Las demostraciones de teoremas de geometría euclidiana han sido, en ocasiones, pensada sólo para los niveles más elevados de las matemáticas, considerada como un obstáculo para estudiantes y profesores. El resultado obtenido no es el esperado, siendo el uso de las demostraciones una potente herramienta

El presente taller pretende mostrar como CABRI nos brinda esa oportunidad para estudiar teoremas de la geometría euclidiana, con tal sencillez por la forma como se manipula; pero sin perder la rigidez que se merece, detectando los modos de razonamiento, permitiendo al alumno ir más allá. CABRI posibilita al alumno obtener sus propias conclusiones; es decir, llegar a la tesis y generalizar la situación objeto de estudio.

Antecedentes

En la Universidad Popular del Cesar, en la licenciatura de matemática y física, se están trabajando la demostraciones de teoremas con el uso del CABRI con estudiantes de geometría euclidiana y de ultimo semestre que toman una electiva como seminario de profundización en geometría con el uso de las nuevas tecnologías. Durante el desarrollo de las asignaturas a los estudiantes se les entrega un teorema, con base en su enunciado deben construir la gráfica y elaborar los pasos de la demostración, luego se les pide que dinamicen la figura construida para que generalicen en algunos casos, si es posible. De igual forma en las I. E. Manuel German Cuello de Valledupar y Nacional Agustín Codazzi de Codazzi, existen semilleros de geometría dirigidos por los autores, utilizando la metodología propuesta para el presente taller, con los cuales se están abordando la temática correspondiente a la geometría euclidiana, que se encuentran en el currículo de matemáticas de la básica primaria y secundaria de Colombia, en los grados quinto, sexto y séptimo; los teoremas son abordados desde la geometría euclidiana y con CABRI. Algunos de los teoremas objeto de estudio de los semilleros son los propuestos para el taller.

Definiciones preliminares

Para la demostración de los teoremas de la geometría se deben tener en cuenta algunas proposiciones suma importancia, que enunciaremos a continuación:

1. Una proposición es un enunciado de un hecho, como una ley o principio, que es verdadera o falsa, pero no ambigua. Existen varias clases de proposiciones que se emplean a menudo en geometría y a las cuales se le han dado nombres especiales como: axioma, postulado, teorema, escolio, lema.

2. Un axioma, es una proposición tan evidente que no necesita de demostración.
3. Un postulado, es proposición cuya verdad aunque no tenga la evidencia de un axioma, se admite sin demostración. Muchas veces es difícil distinguir entre un postulado y un axioma. Tanto el uno como el otro es una suposición que se hace, algo que se da por verdadero.
4. Un lema, es una proposición que es preciso demostrar antes de establecer un teorema.
5. Un teorema, es una proposición que afirma una verdad demostrable, para que sea evidente. En todo teorema hay que distinguir tres partes: la hipótesis o lo que se da por cierto, la tesis que es el enunciado del teorema en forma simbólica y la demostración. Dos teoremas son recíprocos cuando la tesis del uno es hipótesis del otro, o viceversa.
6. Un corolario o lema es una proposición que se produce por sí sola como consecuencia de la demostración de un teorema.

Algunos Axiomas

1º. Si a cantidades iguales se agregan o se quitan cantidades iguales, los resultados son iguales

2º. Si cantidades iguales se multiplican o dividen por cantidades iguales, los resultados son iguales

3º. Si en los miembros de una desigualdad se realiza la misma operación con números positivos, el sentido de la igualdad no cambia

4º. Si dos desigualdades del mismo sentido se suman miembro a miembro, la desigualdad resultante es del mismo sentido

5º. Si los dos miembros de una desigualdad se restan de los de una igualdad, los resultados son desiguales en sentido opuesto al de la desigualdad dada.

6º. Dos cantidades iguales a una tercera lo son entre sí

7º. Toda cantidad puede reemplazarse por su igual

8º. Si una cantidad es mayor que otra y esta es mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera.

9º. El todo es mayor que cualquiera de sus partes, e igual a la suma de sus partes.

10º. Dados dos segmentos, debe verificarse una y sólo una de las tres condiciones: el primero es mayor, igual o menor que el segundo y los otros segmentos iguales a ellos están entre sí en la misma relación.

Metodología

El taller se desarrollará en dos sesiones; durante las cuales se presentarán en algunos casos enunciados de teoremas de geometría euclidiana, para que con el uso del CABRI PLUS II, los participantes busquen la posible demostración, previa justificación de sus pasos. En otros casos, se darán los pasos de construcción de las figuras; y bajo una serie de preguntas se inducirán a los participantes a realizar la generalización o enunciado del teorema. A continuación presentamos algunos de los teoremas a tratar:

Primera Sesión

1. TEOREMA. Dos ángulos: uno agudo y otro obtuso, que tengan sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios por defecto.

2. TEOREMA. Si por el punto medio de un lado de un triángulo se traza una paralela al otro lado, ésta paralela pasa por el punto medio del tercer lado y el segmento que une dichos puntos es igual a la mitad del lado paralelo.
3. TEOREMA: "SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN POLÍGONO CONVEXO". La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es igual tantas veces dos ángulos rectos como lados menos dos tiene el polígono
4. TEOREMA. La medida del ángulo exterior de un triángulo, es igual a la suma de la medida de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Segunda Sesión

1. TEOREMA. Las medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto situado a los 2/3 de cada una, a partir del vértice.
2. TEOREMA. Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un mismo punto equidistante de los tres lados.
3. TEOREMA. En todo triángulo la bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores correspondientes a los otros dos vértices concurren en un mismo punto equidistante de los tres lados.
4. TEOREMA. "En un trapecio, el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos, es paralela a las bases e igual a la semisuma de ellas".
5. TEOREMA. Las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.
6. Demostrar que si se unen consecutivamente los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera, resulta un paralelogramo cuyos lados son respectivamente a la mitad de las diagonales.

Referentes Bibliograficos

- ALVAREZ C., Emiliano. Elementos de Geometría. Universidad de Medellín. Medellín. 1996
- BRUÑO, G. M. Geometría. Cuarta Edición. Editorial Bedout. Medellín. 1966.
- CASTAÑEZ, Orlando; FUENTES, Fabio. Geometría Plana, de Euclides al Cabri. Valledupar. Universidad Popular del Cesar. 2007
- CLEMENS, Stanley. Geometría. Primera Edición. Serie Awli. Editorial Pearson Educación. México. 1988.
- HERMANOS DE LAS ESCUELAS CRISTIANAS. Nociones Elementales de Geometría. Novena Edición. Editorial Mame. Paris. 1902.
- H. S. M, COXETER. Fundamentos de Geometría. Editorial Limusa. México. 1971.
- LANDAVERDE, Felipe de Jesús. Curso de Geometría. Segunda Edición. Editorial Progreso, S. A. México. 1962.
- MOISE, Edwin. Geometría. Serie Matemática Moderna. Editorial Norma. Bogotá. 1972
- OLEG, A. Belyoev. Introduction to Symmetry. Fundamentals of Geometry. 2004
- RESTREPO, Celina; LINSKENS, Marcela y ESQUET, Hilda. Geometría. Editorial Kapelusz y Cia. Buenos Aires. 1943
- REY Pastor, J. y PUIG Adam. Elementos de Geometría Racional. Tomo I. Editorial Nuevas Graficas. Madrid. 1960.

- SERIE ESTUDIOS. Tecnología Informática: Innovación en el Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media. Bogota. MEN. 2004.
- SERIE LINEAMIENTOS CURRICULARES. Documento 1. Bogota. MEN. 1998
- WENTWORTH, Jorge y SMITH, David Eugenio. Geometría Plana y del Espacio. Editorial Ginn y Cia. Londres. 1915.