La curiosa historia de ...

Dos o tres teoremas bastante paradójicos de Pappus

Mariano Martínez Pérez

No sabemos casi nada con seguridad acerca de la vida de Pappus de Alejandría, salvo que vivió y trabajó hacia mediados del siglo IV de nuestra era, cuando el Imperio Romano se encaminaba ya, lento pero seguro, a su desintegración.

Su obra más importante, que nos ha llegado casi completa, es la llamada **Synagoge** o **Colección**, que contituye una enérgica reivindicación de la mejor geometría clásica griega, en la tradición de Euclides, Arquímedes y Apólonio, aunque no tan sistemática, y que ha servido además a los historiadores para reconstruir partes de otras obras anteriores que se han perdido.

En el libro VI de la **Colección** demuestra Pappus dos o tres teoremas sugeridos por algunas proposiciones de la **Óptica** de Euclides, y que resultan un tanto paradójicos por chocar con algunos aspectos de nuestra intuición espacial.

Se trata de las proposiciones 50, 53 y 54, que vamos a comentar brevemente.

Todo el mundo estará de acuerdo en que, al observar una circunferencia situada en un plano, digamos horizontal, desde cualquier punto de la recta perpendicular a dicho plano por el centro de la circunferencia, excluído precisamente ese centro, lo que vemos es realmente una circunferencia (no deformada por ningún efecto de perspectiva). Es trivial demostrar que, en efecto, es así. Pero mucha gente se dejaría cortar alguna cosa (no entremos en el qué) porque los puntos de esa recta son **los únicos** desde los que la circunferencia se ve como una "verdadera" circunferencia. Desde otro punto cualquiera "lateral", la circunferencia se vería inevitablemente como una elipse, tanto más deformada cuanto más nos aproximemos al plano de la circunferencia.

Nada más alejado de la realidad, sin embargo, tal como nos dice Pappus. En la proposición 50 del libro VI afirma (y la demostración es inmediata) que, aparte de los puntos de la recta mencionada, la circunferencia se ve como una verdadera circunferencia desde todos los puntos de la superficie esférica que tiene por ecuador a dicha circunferencia (Fig. 1), excluída, naturalmente, ella misma (¡cierto que no lo parece, pero...la demostración es irrefutable!).

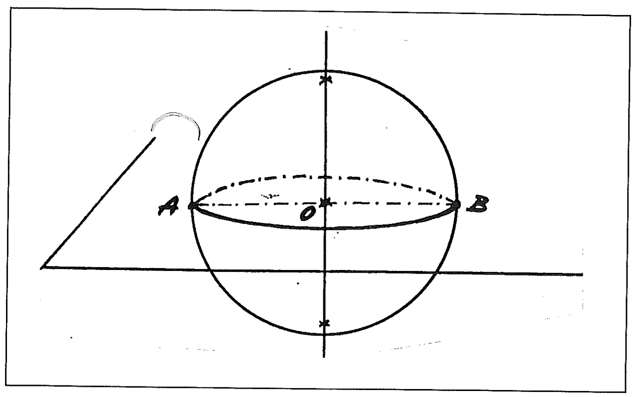

Figura 1

En la proposición 51 demuestra Pappus que desde cualquier otro punto no situado en el plano de la circunferencia, se verá ésta "aplastada", con un diámetro aparentemente máximo y otro aparentemente mínimo, perpendiculares entre sí y en las condiciones que eran de esperar. Ninguna sorpresa en ésto. Pero las sorpresas van a volver a aparecer. Al final de la proposición 51 dice Pappus:

"Puesto que la circunferencia parece presentarse al ojo bajo la apariencia de una elipse [cosa por demostrar aún], y su centro *pasa por ser* el centro de dicha elipse, esta consideración da lugar a una objeción *poco común*. Es posible, en efecto, demostrar que es otro cierto punto del círculo el que se ve como si fuera el centro de la línea, tal como se nos presenta a la vista". [Subrayados míos].

Y, efectivamente, después de la proposición 52, que no es más que un lema técnico, demuestra Pappus la bella proposición 53, que dice lo siguiente:

"Sea AHBD una circunferencia de centro O situada en un plano α, y sea E un punto cualquiera exterior a α y tal que OE no sea perpendicular a α y además sea distinto del radio OA de la circunferencia. Sea M la proyección perpendicular de E sobre α; tracemos la recta OM que corta al círculo según el diámetro AB; unamos A y B con E y sea EC la bisectriz del ángulo AEB [que no es EO, pues es fácil demostrar que $\widehat{AEO} < \widehat{OEB}$]. Sea la cuerda DH perpendicular por C al diámetro AB. Tracemos las tangentes a la circunferencia por D y por H, y sea K su punto de intersección. (Fig. 2).

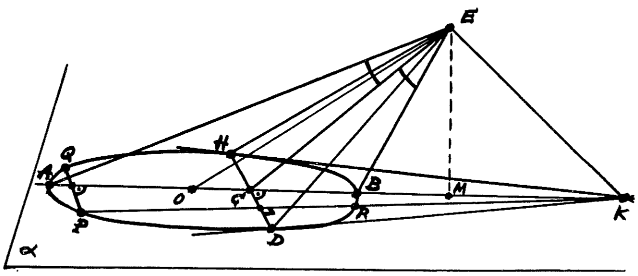

Figura 2

Entonces, la circunferencia AHBD, vista desde E, se presenta como una elipse de centro C, semieje mayor CD (=CH), semieje menor CA (="aparentemente" a CB). En dicha elipse, las cuerdas paralelas al eje mayor DH son las "verdaderas" cuerdas paralelas a DH en la circunferencia, como PQ, mientras que las cuerdas paralelas al eje menor AB, y perpendiculares por lo tanto al DH (ambas cosas "aparentemente") son exactamente aquéllas que prolongadas pasan por K, como la PR por ejemplo".

En la elegante demostración de Pappus se usa la propiedad de que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AK}{KB}$$

es decir, que C y K separan armónicamente a A y B, propiedad hoy "proyectiva" y bien conocida de la polaridad. Esto le permite demostrar de paso que el ángulo $\widehat{CEK}$ siempre es recto.

Es interesante observar que el hecho de que "parezcan" perpendiculares a la cuerda DH todas las rectas que pasan por su polo K (y sólo ellas) es una anticipación notable y sumamente curiosa del tratamiento de la perpendicularidad en el modelo de Beltrami-Klein de la geometría hiperbólica (con "universo" el interior de un círculo y rectas las cuerdas sin sus extremos).

Pero sigamos, sigamos, que Pappus nos tiene reservada otra notable sorpresa como traca final de esta breve serie de proposiciones, en la número 54. Dejemos hablar de nuevo a Pappus directamente:

"Proposición 54: Demostrado todo ésto, es posible mostrar un problema aún más sorprendente, que proponemos de la manera siguiente:

Dada una circunferencia en un plano y un punto del interior de su círculo, encontrar el lugar del ojo desde donde se vea la circunferencia como una elipse que tenga por centro el punto dado interior al círculo.

Sea AHBD la circunferencia dada de centro O, y sea C (Fig. 3) un punto interior al círculo [ha de ser C ≠ O, como se verá enseguida]. Se trata de buscar el lugar desde el que la circunferencia aparezca como una elipse de centro C. Prolonguemos la recta CO de una parte y de la otra y tracemos por E la perpendicular DH a AB. Sean HK y DK las tangentes a la circunferencia por H y por D, respectivamente, y tracemos la semicircunferencia CEK de diámetro CK y situada en el plano perpendicular al de la circunferencia AHBD. Yo afirmo entonces que, si se toma un punto cualquiera sobre el arco completo CEK y se sitúa allí el ojo, entonces la circunferencia se verá efectivamente como una elipse de centro C" [habría que excluir los extremos C y K del arco, claro].

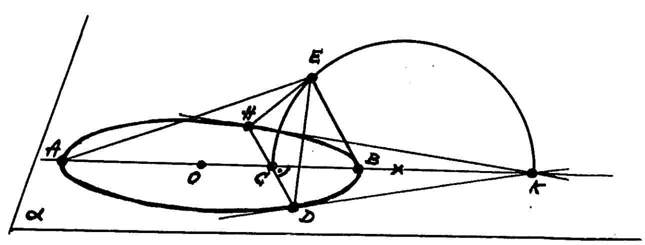

Figura 3

Mariano Martínez Pérez