¿Cuánto tendría que medir la caja para contener x veces más galletas?

José Mª Tirado Muñoz

Todos los que nos dedicamos a la escuela, podríamos elaborar un nutrido catálogo de ejemplos, que mostrarían cómo nuestros alumnos y alumnas, son capaces de adquirir determinados conceptos y aplicarlos a la resolución de problemas tipo; mientras que, paralelamente, tienen serias dificultades para resolver otras situaciones estrechamente relacionadas con los conceptos que, en teoría, dominan.

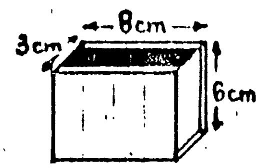
Este trabajo no se centra en las causas de tan extraña y contradictoria convivencia (amplia bibliografía existe al respecto), más bien es un modesto intento de dar respuesta a una necesidad aquí y ahora.

Durante el curso 89-90 trabajo con dos grupos de 8º y en el primer trimestre (en la línea de lo descrito arriba), compruebo que, conociendo las fórmulas para calcular volúmenes de prismas, cilindros y otros cuerpos tienen grandes dificultades para determinar qué se podría hacer para conseguir que una caja de galletas pudiera contener una cantidad doble, triple, cuádruple, ... de producto. Con el propósito de desmenuzar las variables de las que depende el volumen, en concreto de paralepípedos y cilindros (formas de envase muy corrientes en el mercado), planteo en clase las cuestiones que se detallan en el trabajo que presento.

No trascribo los razonamientos intermedios en favor de una mayor brevedad, limitándome a recoger las conclusiones a las que fuimos llegando que, en muchos casos, dieron pie a nuevas vías de investigación.

Queremos empaquetar cajitas de cerillas (fig. 1), en cajas de cartón (fig. 2), ¿podemos hacerlo colocando las cajitas de cerillas en cualquier posición?

Figura 1



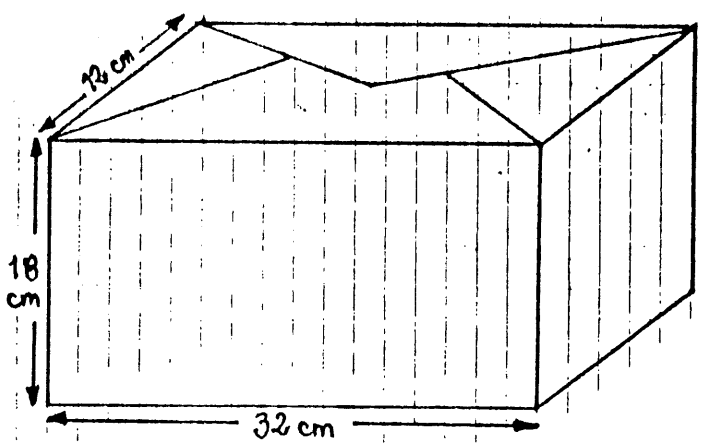


Figura 2

Las cajitas de cerillas pueden colocarse en 6 posiciones diferentes (fig. 3); pero sólo dos de ellas nos permiten llenar la caja de un modo exacto.

En la posición A caben:
- 4 a lo largo
- 4 a lo ancho
- 3 a lo alto.

En la posición C caben:
- 4 a lo largo
- 2 a lo ancho
- 6 a lo alto.

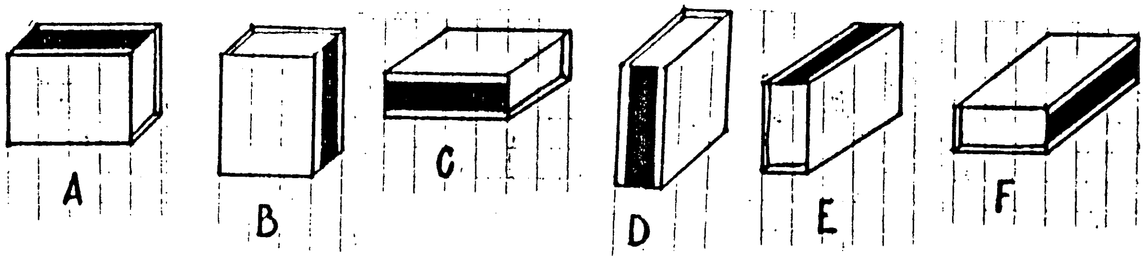


Figura 3

Podemos empaquetar el mismo número de cajitas en las dos posiciones y en ambos casos:

Si multiplicamos el número de cajitas que caben a lo largo por las que caben a lo ancho y a lo alto, obtenemos el total de cajitas que se pueden almacenar en una caja. Es lo mismo que multiplicar las cajitas que caben en una capa por el número de capas posibles.

Las posiciones B, D, E y F no permiten empaquetar porque dos de las tres dimensiones de la caja no son múltiplos de las correspondientes dimensiones de las cajitas de cerillas. Por ejemplo: en la posición B, no se puede almacenar un número exacto de cajitas ni a lo largo ni a lo alto, ya que 32 no es múltiplo de 6, ni 18 lo es de 8.

¿Habrá alguna caja que permita empaquetar las cajitas de cerillas en cualquiera de las 6 posiciones?.

Podríamos utilizar cualquier caja cuyas dimensiones fueran múltiplos comunes de las dimensiones de las cajitas de cerillas (8, 6 y 3 cm).
La más pequeña posible sería la de 24x24x48, 24x48x72, etc. (siguiendo el criterio descrito).

A partir de este momento sustituimos las cajitas de cerillas por centímetros cúbicos de madera.

¿Cuántos podría contener una caja como la de la fig. 4?

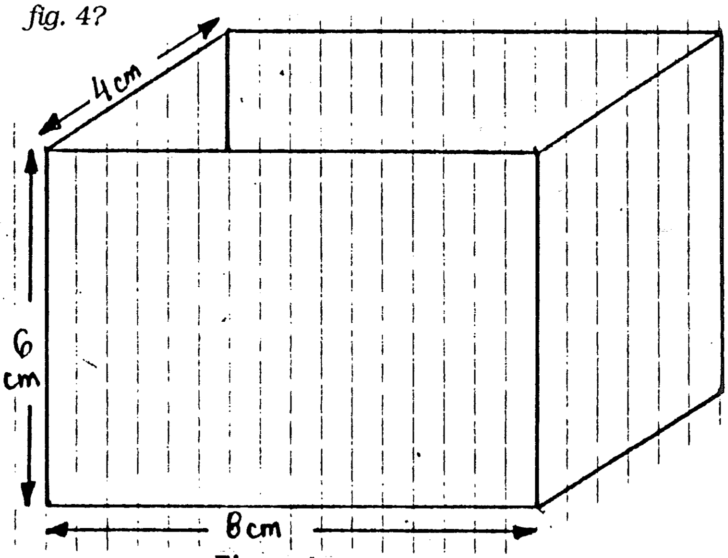


Figura 4

En la primera capa podemos colocar (8x4), cm³.
Necesitamos 6 capas para llenar la caja, luego el total sería: (8x4x6) cm³

¿Cuántos cm³ podría contener la caja si duplicamos, triplicamos, ... una de sus dimensiones?.

Si duplicamos el largo:
En la primera copa podemos colocar (16x4) cm³.

En las 6 capas: (16x4x6) cm^3 = 384 cm^3 (el doble que la caja de la fig. 4).

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDEN CONTENER
x 2	=	=	x 2
=	x 2	=	x 2
=	=	x 2	x 2
x 3	=	=	x 3
...	...	...	...

Si duplicamos, triplicamos, ... una de las tres dimensiones la caja, el número de cm^3 que puede contener, también se duplica, triplica, etc.

¿Qué ocurrirá si duplicamos, triplicamos, etc., dos de sus tres dimensiones?

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
x 2	x 2	=	x 4
=	x 2	x 2	x 4
x 3	=	x 2	x 6
=	x 2	x 3	x 6
x 3	=	x 3	x 9
...	...	...	...

Si duplicamos, triplicamos, ... dos de las tres dimensiones de la caja, el número de cm^3 que puede contener se multiplica por el producto de lo que han aumentado las dos dimensiones consideradas.

¿Qué ocurrirá si duplicamos, triplicamos, ... las tres dimensiones de la caja?.

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
x 2	x 2	x 2	x 8
x 2	x 2	x 3	x 12
x 2	x 3	x 3	x 18
x 3	x 3	x 3	x 27
...	...	...	...

Si duplicamos, triplicamos, ... las tres dimensiones de la caja, el número de cm^3 que puede contener se multiplica por el producto de lo que han aumentado las tres dimensiones.

Para aumentar, entonces, el número de cm^3 que puede contener la caja "n" veces, tendremos tantas posibilidades como trios de números seamos capaces de encontrar cuyo producto sea "n".

¿Qué cambios habría que realizar en las dimensiones de la caja para que el número de cm^3 que pueda contener sea 5 veces mayor que en la fig. 4?.

Siguiendo la regla general descrita en el párrafo anterior, se trata de encontrar trios de números (a, b y c), de tal forma que axbxc = 5.

Modificando una sola dimensión: 1 x 1 x 5
1 x 5 x 1
5 x 1 x 1.
Modificando dos dimensiones: 2 x 1 x 2.5
4 x 1 x 1.25
4 x 1 x 0.625 [1]

Modificando las tres dimensiones:

2 x 2 x 1.25	2 x 0.5 x 5	2 x 0.25 x 10
4 x 2 x 0.625	4 x 0.25 x 5	4 x 0.125 x 10
	8 x 0.25 x 2.5	2 x 0.125 x 20

Etc., etc.

(1) Descartamos valores de más de 3 cifras decimales y decimales periódicos.

De un trio inicial cuyo producto sea 5, podemos sacar otros con el mismo producto: duplicando un factor y reduciendo a la mitad otro, triplicando uno y reduciendo otro a la tercera parte, ...

Cuando uno de los factores es menor que 1, lo que realmente hacemos es reducirlo:

x 0.5 = : 2
x 0.25 = : 4
x 0.125 = : 8
x 0. 625 = x 625 y : 1.000 ó x 25 y : 40.

¿Qué ocurrirá si duplicamos, triplicamos, ... una o dos dimensiones y reducimos a la mitad, la tercera parte, ... otra u otras?.

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
x2	=	:2	=
x4	=	:2	x2
:2	x3	=	x1.5
...	...	...	...

En el tercer caso que se recoge en la tabla, el número de cm^3 que puede contener la caja se multiplica por 1.5 debido a que el ancho lo hemos triplicado y el largo lo hemos reducido a la mitad: x3 y :2 = x3 y x1/2 = 3/2 = 1.5.

La variación total del número de cm^3 que puede contener la caja se puede obtener multiplicando las variaciones habidas en las tres dimensiones (expresando las reduciones en forma de producto). Ejemplo:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
xA	:B	xC	xA x 1/B x C

El volumen de una caja de forma de paralepípedo se puede calcular numéricamente multiplicando sus tres dimensiones, o bien, multiplicando el área de la base por la altura.

¿Servirá el mismo procedimiento para calcular el volumen de una caja cilíndrica?.

a) Medimos el volumen de varios cilindros macizos por inmersión.

Medimos los radios de las bases y las alturas y realizamos los cálculos numéricos.

Comparamos los resultado obtenidos por los dos procedimientos y observamos un desacuerdo de 3-5 cm^3 que no convence.

b) Tomamos un cilindro hueco, de plástico.

Medimos el radio de la base y la altura.

Despegamos una de las bases y lo llenamos de agua hasta el borde ciudadosamente.

Medimos los cm^3 de agua que hemos necesitado.

Realizamos el cálculo numérico del volumen y admitimos que la diferencia (1.5 cm^3) entre los resultados de los dos procedimientos, puede ser debida a la acumulación de sucesivos pequeños errores de medida difícilmente evitables.

Consideramos, por tanto, válido el mismo procedimiento para calcular el volumen de un paralelepípedo y de un cilindro:

ÁREA DE LA BASE x ALTURA

¿Qué ocurrirá con el volumen de un cilindro al variar el radio de la base y/o la altura?.

Tabla resumen de los cálculos realizados:

RADIO	ALTURA	VOLUMEN
=	x2	x2
=	x3	x3
...	...	...
x2	=	x4
x3	=	x9
x2	x2	x8
x2	x3	x12
...	...	...
x2	:2	x2
:2	x2	:2
x3	:2	x4.5
x3	:3	x3
...	...	...

Si la altura del cilindro se multiplica por n, el volumen se multiplica también por n.

Si el radio del cilindro se multiplica por n, el volumen se multiplica por n^2.

Si el radio se multiplica por n y la altura por m, el volumen se multiplica por: $n^2 \times m$.

Si el radio se multiplica por n y la altura se divide entre m, el volumen se multiplica por: $n^2 \times 1/m$.

Si el radio se divide entre n y la altura se multiplica por m, el volumen se multiplica por: $1/n^2 \times m$.

¿Cuál será, entonces, el procedimiento más viable para duplicar el volumen del aljibe de la fig. 5?.

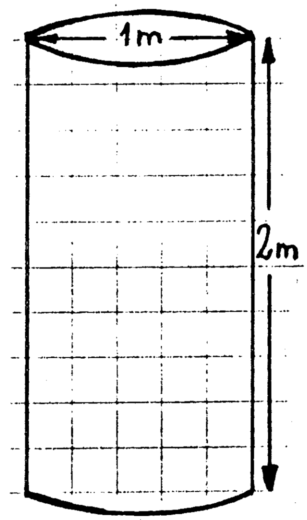


Figura 5

Lo más sencillo sería duplicar la altura ya que si quisiéramos hacerlo modificando el radio de la base, tendríamos que multiplicarlo por un número cuyo cuadrado fuera 2. Ese número sería $\sqrt{2}$, que es una expresión decimal con infinitas cifras no periódicas (número irracional).