Acerca de la enseñanza de inecuaciones de una variable

P. Alson

Resumen

En el artículo se exponen dos métodos de resolución de inecuaciones. Se comparan desde varios puntos de vista y se comentan algunos aspectos del trabajo realizado a partir de 1983 en la enseñanza de dicho tópico en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

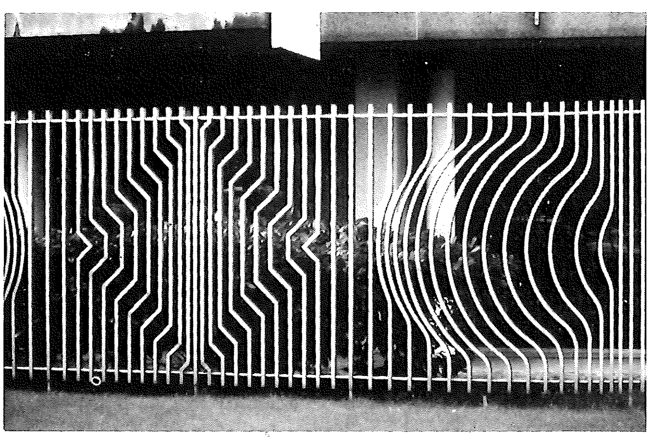


Foto: Pilar Moreno

Introducción

El programa de Matemáticas del primer semestre de las licenciaturas de Biología o de Química de la Universidad Central de Venezuela incluye el tópico de inecuaciones en una variable. Se trata esencialmente de aprender a resolver inecuaciones de la forma $f(x) < g(x)$ [o formas análogas como $f(x) - g(x) < 0, f(x) > g(x)$..., etc.] con f y g funciones racionales elementales, o polinomios de grado menor o igual que dos, o valores absolutos de ambas. Algunos ejemplos son: $x^2 - 1 > 0$, $|x + 2| + |x - 3| > 1$.

El porcentaje de alumnos que dominaban el tópico al final del semestre rara vez sobrepasaba el 15 por 100. Esto me llevó a considerar métodos alternativos para enseñarles. En este artículo se muestran los resultados de ese esfuerzo.

Mostraremos primeramente la manera usual de enseñar el tópico y las razones que a nuestro entender impedían el aprendizaje. Luego describimos *a grosso modo* los primeros intentos hechos para mejorar la enseñanza del tópico y explicamos la solución finalmente adoptada. La última parte compara los dos métodos desde diversos ángulos, e incluye comentarios acerca de la experiencia.

Presentación de los dos métodos

Nuestra manera usual de trabajar el tópico era resolver con lujo de detalles varios ejercicios. Luego se le proporcionaba al estudiante una lista de inecuaciones como ejercicios. A continuación se presentaba un ejercicio típicamente resuelto.

Ejercicio: Resuelva la inecuación $x - 3 < 3/(2x + 1)$.

Modo de resolución: «El denominador $(2x + 1)$, de acuerdo al valor de la variable x, puede tomar tanto el signo positivo como el signo negativo. Si $2x + 1 > 0$, entonces $x - 3 < 3/(2x + 1)$ es equivalente a $(x - 3)(2x + 1) < 3$. Esta desigualdad es equivalente a $2x^2 - 5x - 6 < > 0$. Como $2x^2 - 5x - 6 = 2[x - (5 + \sqrt{73})/4]\,[x - (5 - \sqrt{73})/4]$, x es un número del intervalo $[5 - \sqrt{73})/4, (5 + \sqrt{73})/4]$. Como se asume que $2x + 1 > 0$, es decir $x > -1/2$, x debe estar en el intervalo $[-1/2, (5 + \sqrt{73})/4]$. Si se asume que $2x + 1 < 0$, haciendo un razonamiento similar se obtiene que x debe pertenecer al intervalo $[-\infty, (5 - \sqrt{73})/4]$. Se obtiene ahora la solución de la inecuación uniendo los conjuntos obtenidos al hacer las suposiciones sobre los signos de $2x + 1$; es decir, la solución es: $(-\infty, (5 - \sqrt{73})/4] \cup [-1/2, (5 + \sqrt{73})/4]$. (Para ver un ejemplo similar al que se acaba de desarrollar, véase Protter y Morrey, pág. 5.)

A través de las dificultades que percibimos en los estudiantes y del tipo de errores que cometían, llegamos a la conclusión de que no eran capaces de dar un significado correcto a las expresiones algebraicas que se utilizaban. La equivalencia entendida como la relación entre dos partes que tienen diferente forma, pero igual significado, no tenía sentido para ellos. No entendían las reglas que permiten transformar expresiones algebraicas en sus equivalentes. Con este bajo nivel, eran incapaces de captar el sentido general de la explicación dada por el profesor. Eran incapaces de hacer analogías entre los diferentes ejemplos dados por el docente y a partir de esto inferir cuáles son los pasos «lógicos» a seguir para resolver una inecuación. Se veían obligados a gastar una gran cantidad de energía tratando de memorizar y clasificar «los diferentes tipos de inecuaciones y sus métodos de resolución».

La primera solución a este problema fue aumentar el número de ejemplos y los detalles de su resolución explicando y tratando de justificar cada equivalencia. Cada uno de los pasos de resolución se hicieron más explícitos y al mismo tiempo se trató de uniformarlos con el fin de que el estudiante estableciera analogías y que con ello comprendiera los mecanismos subyacentes a la resolución. Los resultados fueron escasos. Esto, y la escasez de tiempo, nos llevó a desarrollar, y finalmente, adoptar la estrategia que a continuación se explica.

La estrategia radica en dos puntos: primero, dar al estudiante un método general y único para resolver inecuaciones. Segundo, interpretar la desigualdad en un contexto familiar donde la solución de la inecuación tuviese un significado evidente. Esas premisas condujeron al siguiente método para resolver las inecuaciones:

Resolver una inecuación de la forma $f(x) < g(x)$ es llenar

1	2
3	4

de acuerdo a las siguientes reglas:

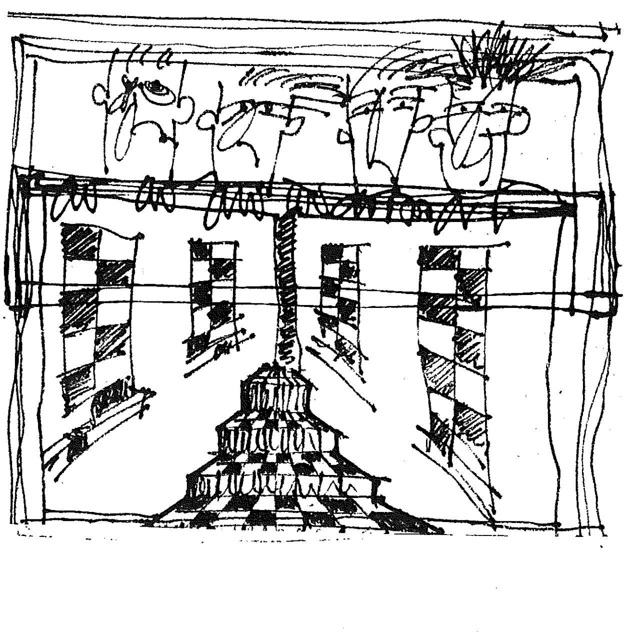
Cuadrado 1: escribir la desigualdad $f(x) < g(x)$.

Cuadrado 2: dibujar aproximadamente los gráficos de f y g. Rayar la parte del eje x donde la altura de f es menor que la de g.

Cuadrado 3: resolver la ecuación $f(x) = g(x)$.

Cuadrado 4: escribir el conjunto definido por el rayado del eje x (en 2) y las soluciones de la ecuación (de 3). El conjunto así obtenido recibe el nombre de conjunto solución de la inecuación.

En la sección que sigue hacemos algunos comentarios acerca de las reacciones que se observaron en los estudiantes.



Reacciones de los estudiantes

Presentar el método con una forma cuadrada no es esencial, pero tiene indudablemente ciertas ventajas: definir un espacio físico para cada uno de los subprocesos de la resolución ayuda a los estudiantes de muy bajo nivel a fijar y entender el método. También recalca el hecho de que el método es único.

El hecho de que el método sea esencialmente la combinación de dos tipos de resultados, uno geométrico, visual o cualitativo y otro algebraico o cuantitativo, tiene al menos tres ventajas:

i) Ayuda a disminuir los errores.

ii) Permite el mejor uso de las posibilidades de los estudiantes.

iii) Ayuda a profundizar en ciertos conceptos.

A continuación se ilustran estos puntos con algunos ejemplos.

Cuando $x^2 < 2$ es resuelta por los estudiantes utilizando el método puramente algebraico, una respuesta frecuente es $x < \sqrt{2}$. Si se utilizan los gráficos esa respuesta es descartada automáticamente. Otro ejemplo es, cuando se simplifica la incógnita x sin tener en cuenta que no se puede hacer cuando $x = 0$. Por ejemplo al resolver $2x = 3x$, el estudiante obtiene $2 = 3$, y no sabe cómo interpretar esta contradicción; si dicha ecuación es resuelta como parte de la resolución (con el método propuesto) de $2x < 3x$, los gráficos de $2x$ y $3x$ lo orientarán a corregir su error.

El método usual de resolución de inecuaciones es esencialmente un ejercicio de simplificación de predicados. La habilidad exigida al estudiante es principalmente el manejo fluido de los axiomas de los números reales y algunas reglas del cálculo de predicados. Al introducir el subproceso geométrico, las exigencias algebraicas disminuyen considerablemente: el manejo explícito del símbolo $<$ es soslayado. Esto es particularmente útil, porque es más fácil enseñar la representación gráfica de funciones elemantales que tratar de reparar vicios de formación arraigados a través de varios años.

Al comienzo, el estudiante percibe dos subprocesos: uno algebraico y el otro gráfico. Rápidamente comienza a descubrir relaciones entre ambos. La interpretación gráfica de las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$ resulta particularmente útil. Algunos ejemplos de ello son: interpretar qué significa que una ecuación no tiene solución ($x - 1 = x^2$); resolver ecuaciones en las que la incógnita no se puede despejar y que, por lo tanto, las soluciones deben ser aproximadas [$x^2 = exp(x)$].

Existen también aspectos sicológicos que deberían ser señalados. Se notó que el hecho de tener que resolver una ecuación para hallar extremos del conjunto solución de la inecuación (es decir, con una finalidad clara) era un aliciente para hacer el trabajo. Algunos estudiantes se sienten más motivados a hacerlo que cuando se trate de un ejercicio aislado.

Otro aspecto sicológico es la relación que establecen con el tópico de inecuaciones. Ellos se sienten muy seguros, aunque a veces cometan errores o no puedan resolver una ecuación o dibujar la gráfica de una función. Se notó, cuando las manipulaciones algebraicas para resolver una ecuación son muy complicadas o desconocidas (polinomios de grado tres por ejemplo), que algunos estudiantes tratan de hacer las gráficas de manera más precisa para tener aunque sólo sea una idea aproximada de la solución. La idea de lo que es el conjunto solución y la totalidad de la estructura algebra-gráfico es profundamente interiorizada por la mayoría de ellos.

En cuanto a una cuantificación de los resultados no se han llevado estadísticas rigurosas, pero es opinión de los profesores que han trabajado con esta estrategia (unos diez en total a partir de 1983) que más del 90 por 100 de los estudiantes logra al final del curso resolver inecuaciones con soltura.

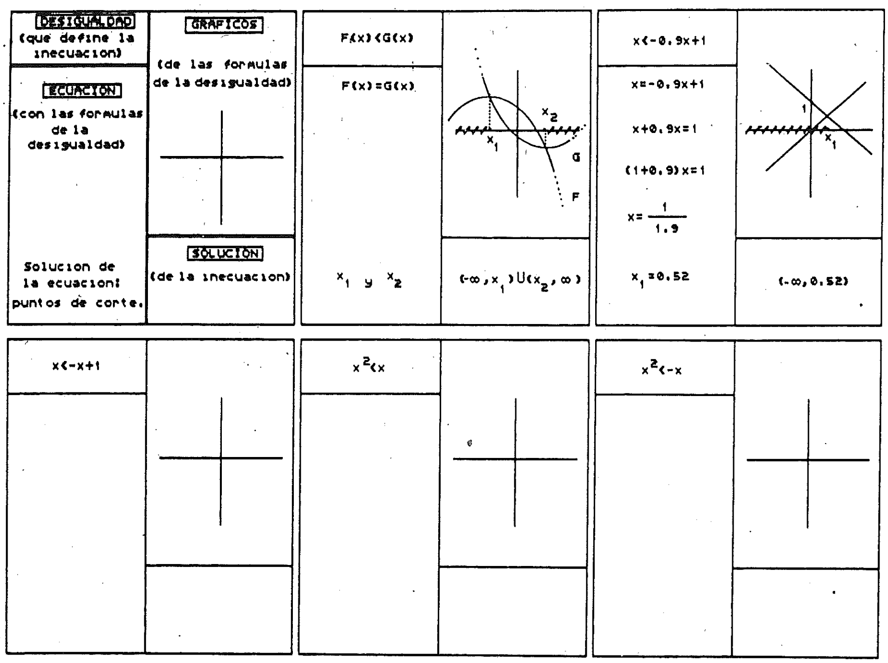
Comparación de ambos métodos

En los anteriores párrafos ya se han hecho algunas comparaciones desde el punto de vista del estudiante. En esta sección los vamos a comparar desde otros ángulos.

La primera observación es que el método gráfico es más general. Con ello queremos decir que cuando el estudiante aprendía con el método puramente algebraico era incapaz de resolver inecuaciones que no fuesen del tipo tratado en el curso, como por ejemplo $x^2 \leq exp(x)$. Por otro lado los ejercicios tratado con los métodos puramente algebraicos son fácilmente resolubles con método gráfico.

El método gráfico mejora la capacidad de representar funciones del estudiante. Además puede ser enseñado en cuanto adquieren unos rudimentos de funciones (rectas, parábolas, hipérbolas...), mientras que el método puramente algebraico requiere un buen conocimiento de manipulaciones algebraicas.

Este último punto nos lleva a considerar la relación del tópico de inecuaciones con el resto del programa. En nuestros programas las inecuaciones aparecen justo después del tema de las propiedades de los números reales. Esto, aunque no explícitamente, es una indicación al profesor para trabajar la resolución de las inecuaciones en el contexto de una aplicación de las propiedades de los números reales y no como una aplicación de la teoría de funciones. ¿Por qué existe esta tendencia que favorece el uso de métodos no gráficos?



Una respuesta parcial es que el método puramente algebraico para resolver una inecuación es no sólo un método sino también la prueba de que la solución obtenida es efectivamente la solución (entendida como el conjunto de números que satisfacen la inecuación). En cambio el método gráfico es sólo un método y de hecho en algunos casos si los gráficos son demasiado imprecisos la solución obtenida puede ser errónea. Paradójicamente el método algebraico es percibido por los estudiantes como un método y no como una prueba, mientras que el método gráfico es percibido como un método y una prueba. Esto se debe principalmente al hecho de que para ellos lo que se ve no requiere prueba. Sería interesante profundizar en cómo sensibilizar al estudiante a la idea contraria, es decir: es necesario probar lo que se «ve». Apenas se comienza a tratar de probar lo que se «ve», comienzan a aparecer ideas como las de continuidad de funciones crecientes..., etc., dando pie para motivar nuevos conceptos.

Otro punto relacionado con los programas es el siguiente: la dificultad para enseñar las inecuaciones hacía que el tópico fuese considerado como un fin en sí. Al enseñar con el método gráfico, el tiempo de explicación disminuye considerablemente y permite al profesor tratar problemas que normalmente son tratados muy de prisa o dejados de lado. Estamos pensando en ejercicios del tipo: «halle a de manera que la solución de $ax^2 + 2 < x$ sea $(-\infty, -2) \cup \cup (1, \infty)$». En este sentido el tema de inecuaciones, al ser trabajado con el método presentado, tiende a convertirse en un medio para madurar en otras direcciones.

Recientemente he sabido de la existencia de libros y trabajos relacionados con lo expuesto. Encontré un libro de bachillerato inglés (Clarke, pág. 145). Por otro lado el profesor C. Gaulin me envió el artículo de Dreyfus y Eisenberg (1985). Dichos autores, en una comunicación personal, me hicieron saber que sus alumnos preferían los métodos puramente algebraicos. No es el caso de nuestros alumnos. Creo que el hecho de tener una muy mala formación en álgebra, determina en gran parte la preferencia de nuestros estudiantes.

En cuanto a los profesores, la mayoría de los que hemos trabajado con el método gráfico, lo preferimos. Sin embargo, hemos recibido críticas de colegas que dicen que además del método gráfico se deberían de enseñar los algebraicos y en los exámenes exigirlos. Consideran que el método gráfico es demasiado fácil y que la matemática debe ser difícil. Puede ser que esto sea otra razón por la cual el método gráfico, a pesar de todas las ventajas señaladas sea tan poco utilizado.

Referencias

CLARKE, L. H., *Pure Mathematics at Advanced Level* (tercera edición de F. G. J. Norton, Heinemann Educational Books London).

DREYFUS, T., EISENBERG, T. (1985), «A Graphical Approach to Solving Inequalities», *School Science and Mathematics,* Vol. 85 (2).

PROTTER, M. H., MORREY, B. Ch. (1980), *Cálculo con Geometría Analítica* (tercera edición, Fondo Educativo Interamericano).