Palillos

E. Borrás, M. Contreras, F. Hernán

«No será la incorporación de tres o cuatro herramientas espectaculares lo que caracterizará la nueva organización de las clases, sino el uso habitual, cotidiano, de una amplísima gama de materiales que hagan del aula de Matemáticas, tanto en la escuela primaria como en la secundaria, un verdadero laboratorio-taller» [1].

Una pacífica alteración de los hábitos y los métodos de los profesores se está dando poco a poco, pero de una manera que será, sin duda, irreversible. Y no es sólo que cada vez estemos más atentos a los procesos y no simplemente a los contenidos. Es, sobre todo, el reconocimiento de un hecho psicológico de importancia capital para la enseñanza: *la mente recuerda lo que la mente hace, no lo que el mundo hace; esto es, la experiencia es la mente trabajando —no el mundo imprimiéndose en un organismo pasivo— y la experiencia es lo que será recordado* [2].

Este trabajo mental se ve estimulado cuando se ejercita sobre un soporte físico, sobre materiales estructurados o por estructurar que permitan construir la secuencia (muchas veces recurrente) exploración — investigación de posibilidades — elección de caminos.

Y ello vale tanto para el profesor como para el alumno. La acción y el pensamiento se complementan produciendo conjeturas que se pueden poner en práctica y creando la necesidad de abstraer a partir de los objetos concretos y de las acciones efectuadas sobre ellos.

Esos materiales pueden ser sofisticados o simples, unidireccionales o susceptibles de múltiples exploraciones, apropiados para una edad determinada o para un amplio intervalo de edades, caros o baratos.

Los palillos son simples, fáciles de adquirir o producir, baratos, apropiados para investigar en la enseñanza primaria y en la secundaria, y dan lugar a una considerable variedad de propuestas.

Muchas de ellas están recogidas en conocidos trabajos (ver, por ejemplo las referencias 3 y 4), cuyo mérito principal tal vez sea el de sugerir que ese campo de propuestas no queda agotado por ellos, sino que cualquier profesor puede ampliarlo en función de sus criterios, sus objetivos y sus alumnos.

Incluso el tamaño de los palillos (uno, varios; pequeños, grandes) y el color (uno solo, dos o tres, ocho o diez) son variables que, de ser tenidas en cuenta, diversificarán los

[1] ALONSO, F. *et al.*, 1987, *Aportaciones al debate sobre las Matemáticas en los 90. Simposio de Valencia,* Valencia, Ed. Mestral.

[2] JENKINS, J., 1973, «Language and Memory», en G. A. Miller ed., *Comunication Language and Meaning,* New York, Basic Books.

[3] FIELKER, D., «Five Sticks», en *Mathematics Teaching,* núm. 72, Revista de la Association of Teachers of Mathematics, Derby (Inglaterra).

[4] BAKER, L. *et al.*, 1972, *Sticks,* Association of Teachers of Mathematics.

tipos de situaciones que vayan a ser consideradas y la extensión con la que sean tratados los conceptos.

El tratamiento en clase puede hacerse de manera «ordenada»: estudiar clasificaciones, buscar simetrías, construir secuencias y encontrar regularidades funcionales, analizar propiedades de los ángulos, hallar el número de intersecciones o de regiones, plantear problemas combinatorios, etcétera, o de manera «espontánea», siguiendo las pautas y las ideas que vayan naciendo de la propia exploración de los alumnos.

Aquí hemos optado por limitarnos a construcciones en el plano y por una mezcla de lo sistemático y lo espontáneo, mezcla que no hace sino componer una de las muchas opciones disponibles.

Con palillos pequeños

Los palillos pequeños, semejantes a las cerillas de madera corrientes, permiten hacer uso de un gran número de ellos en el pequeño territorio de una mesa escolar. Si son de varios colores, las construcciones tendrán un gran atractivo plástico.

¿Cuántos palillos se necesitan para hacer un triángulo equilátero?

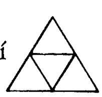
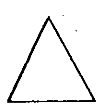
¿Y para hacer dos? Con 5 basta. 

¿Y para hacer tres? Con 7 basta. 

¿Y para hacer cuatro, cinco, seis...?

Si se forma una tabla, parece haber una sencilla regularidad:

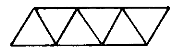
Núm. de triángulos	1	2	3	4	5	6	...
Núm. de palillos	3	5	7	9	11	13	...

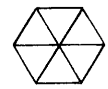
Pero, ¿y si alguien ve aquí  cinco triángulos equiláteros, cuatro pequeños  y uno grande 

Entonces el problema ha de ser redefinido: ¿triángulos equiláteros o triángulos equiláteros del mismo tamaño?

Supongamos que optamos por triángulos equiláteros del mismo tamaño. ¿Se mantiene la regularidad observada? ¿O se pueden emplear menos palillos de los previstos?

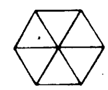
Con 13 palillos se hacen seis triángulos del mismo tamaño

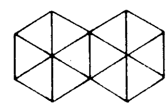


¡Pero si los triángulos se colocan así 

hay suficiente con 12 palillos!

¿Seguimos con la tabla de triángulos o pasamos a una tabla de «hexágonos»?

Un «hexágono»  12 palillos.

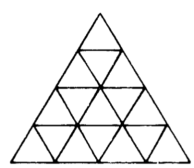
¿Y dos «hexágonos»?  23 palillos.

¿Y tres «hexágonos»? No son 34 palillos, sino 33.

¿Y cuatro, cinco, seis, siete...?

¿Cómo será la tabla que relaciona cuadrados con palillos?

Una vez construida una red (de triángulos, «hexágonos», cuadrados, etc.), sin haber contado previamente el número de palillos, por ejemplo, ésta



es interesante ver los distintos procedimientos que cabe usar para contar el número de palillos que contiene.

Un juego para dos personas:

Dada una red de triángulos (como la anterior, por ejemplo) cada jugador retira, por turno, un palillo. Con ello desaparece un triángulo —si se retira un palillo del contorno— o desaparecen dos triángulos —si se retira un palillo del interior— o no desaparece ninguno. Gana el jugador que haga desaparecer el último triángulo.

¿Hay una estrategia ganadora? ¿Es independiente de la red? ¿Ocurre lo mismo en el juego análogo con una red de cuadrados?

Con palillos grandes

Como con ellos se llena en seguida la mesa, son más apropiados para plantear propuestas con menor número de palillos o de un carácter más complejo. En tal caso, puede prescindirse de que sean de varios colores.

Intersecciones

¿En cuántos puntos pueden cortarse dos, tres, cuatro, cinco..., palillos?

¿Y si suponemos que los palillos «son» rectas?

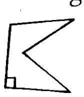
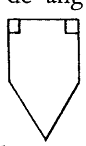
Las dos preguntas son claramente distintas, ya que en

hay cuatro intersecciones si son palillos, pero hay seis intersecciones si son rectas.

Polígonos

Con cuatro palillos pueden hacerse infinitos cuadriláteros, todos los cuales son rombos (y uno, cuadrado).

Con cinco palillos se pueden hacer infinitos pentágonos. Todos son equiláteros, y sólo uno es regular. Una primera clasificación (¡poco excitante!) es en regulares e irregulares. Pero se pueden hacer otras:

• Según el número de ángulos rectos interiores. Éste  tiene uno; éste  tiene dos. ¿Hay alguno con más de dos?

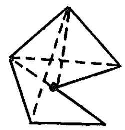
• Según el número de ejes de simetría.

El pentágono regular es inscriptible en un círculo. ¿Hay algún otro de los infinitos pentágonos equiláteros que sea inscriptible en un círculo?

¿Y circunscriptible?

Hexágonos. Después de lo que se haya hecho con pentágonos, ¿hay preguntas nuevas que puedan hacerse sobre los hexágonos? ¿Aumenta el número posible de ejes de simetría? Se puede generalizar a hexágonos el concepto de paralelogramo; ¿cuántos tipos de hexágonos paralelogramos hay?

¿Se puede generalizar el concepto de diagonal a un polígono cóncavo? Si se acuerda que una diagonal no puede cortar a ningún lado salvo en los vértices, y que necesariamente ha de estar contenida en el polígono, ¿cuál es el número mínimo de diagonales de un hexágono equilátero?

Éste  tendría cinco. ¿Puede haber menos?

Otros polígonos.

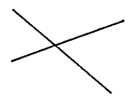
Regiones

Si suponemos que los palillos son rectas:

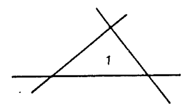
¿Cuántas regiones pueden determinarse con 1, 2, 3, 4..., palillos?

¿Cuál es el mayor número de regiones cerradas?

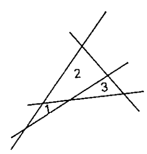
Una recta
0 regiones cerradas



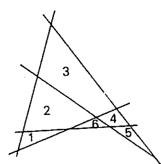
dos rectas
0 regiones cerradas



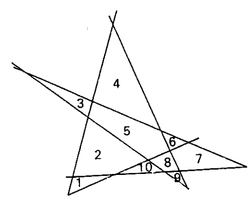
tres rectas
1 región cerrada



cuatro rectas
3 regiones cerradas



cinco rectas
6 regiones cerradas



seis rectas
10 reg. cerradas

1, 3, 6, 10, son números triangulares. ¿Es correcta la inducción de que seguiremos obteniendo los sucesivos números triangulares?

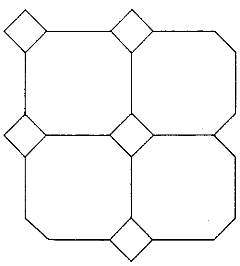
Con palillos grandes y pequeños simultáneamente

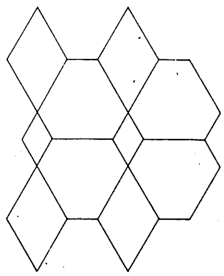
El campo de posibilidades es ahora diverso. Por ello, para limitar el contexto, utilizaremos palillos en los que los grandes tengan longitud doble de los pequeños. Evidentemente se podría optar por otra relación entre longitudes, pero ésta parece la más simple.

La utilización de los dos tipos de palillos permite recoger y extender algunas de las ideas ya expuestas: mosaicos, polígonos, ángulos, simetrías, clasificaciones...

Mosaicos

Éstos son dos





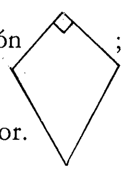
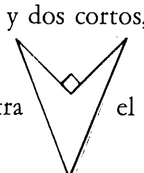
¿Qué otros pueden hacerse?

Polígonos

Tres palillos. Sólo hay dos posibilidades:
- 2 largos y 1 corto;
- 1 largo y 2 cortos.

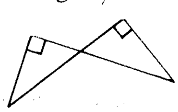
¿Cuántos triáangulos diferentes pueden construirse?

Cuatro palillos. Pueden explorarse dos clasificaciones:
- Por el número de ángulos rectos.
- Por el tipo de longitud utilizadas: 1-2; 2-2; 2-3.

Y cada una de ellas interfiere con la otra o la determina. En efecto, ¿es posible tener un cuadrilátero con un solo ángulo recto? Depende de cómo sean los palillos. Si son dos largos y dos cortos, ésta es una solución  ; pero en esta otra  el ángulo no es interior.

¿Se puede con tres cortos y uno largo?

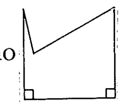
¿Es posible tener dos ángulos rectos? ¿Se admite la siguiente disposición?

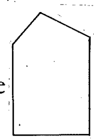


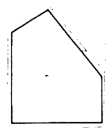
Partiendo de un cierto tipo de palillos (p.e., tres cortos y uno largo), ¿cuántos cuadriláteros simétricos se pueden construir y cuál es su grado de simetría (un eje, dos ejes...)?

A la inversa, partiendo de ejes de simetría (p.e., dos), ¿cuántos cuadriláteros pueden construirse?

Cinco palillos. ¿Hay tantos pentágonos compuestos con 4 palillos cortos y 1 largo como compuestos con 4 largos y 1 corto?

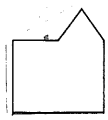
Este pentágono  tiene dos ángulos interiores rectos;

¿Puede éste  tener tres?

¿Puede tener tres este otro  ?

¿Puede haber más de tres ángulos rectos?

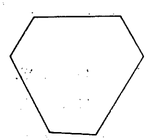
Con seis palillos

 tres ángulos de 90 grados y un ángulo de 60 grados.

¿Cuál es el máximo número de ángulos de 90 grados que puede haber en un polígono de seis palillos cortos y largos?

¿Cuán es el máximo número de ángulos de 60 grados?

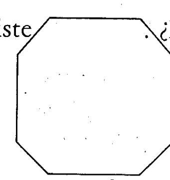
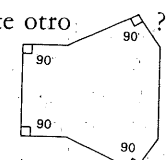
Es posible construir un hexágono alternando palillos cortos y largos:

 y que además es paralelogramo.

¿Puede construirse un hexágono poniendo tres palillos cortos y tres largos en cualquier orden?

¿Hay más de un caso de hexágonos paralelogramos?

Con más de seis palillos.

Este octógono existe  ¿Existe este otro 

?

¿Existe algún octógono de palillos cortos y largos que tenga más de cuatro ángulos rectos?

¿Pueden construirse octógonos cóncavos paralelogramos simultáneamente palillos cortos y largos?

... En algún momento hay que acabar. Y puede hacerse con una duda: ¿habría sido mejor hacer las preguntas con más precisión e ir dando respuestas o, por el contrario, deberíamos haber terminado mucho antes la exposición de esta especie de torbellino de ideas y dejar así que usted siguiese haciendo sus propias preguntas y encaminando sus propias investigaciones? Más aún, ¿por qué no haber hecho una sola pregunta, clara y abierta a la vez? Ésta: *¿Qué se puede hacer con palillos de longitudes 1 y 2?*