Una clase sobre probabilidad en COU

Salvador Guerrero

Durante el estudio de los temas de probabilidad en COU se planteó el siguiente ejercicio:

> Dos jugadores *A* y *B* juegan del siguiente modo: se lanzan dos monedas al aire y se mira el número de caras y el de cruces obtenidas al caer. Si en las dos monedas sale lo mismo, gana *A*; si sale distinto, gana *B*. ¿Es equitativo el juego?

En una primera ronda de opiniones, la apreciación intuitiva era diversa, aunque con mayor proporción de los que se inclinaban por la equitatividad, es decir que ellos podrían ser el jugador *A* sin temer que ello fuera desfavorable. Al tener que precisar y fundamentar esa opinión, una simple descripción del espacio muestral con un diagrama en árbol como el de la fig. 1, y el cálculo de la probabilidad del suceso *S:* «salir lo mismo en ambas monedas», confirmó que la probabilidad era 1/2.

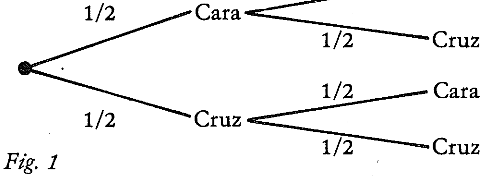


Fig. 1

El ejercicio pasó a ser interesante cuando el profesor hizo la pregunta de lo que ocurriría si los datos estuvieran sesgados, y hubiese mayor probabilidad de sacar cara (p.ej., 4/5) que de sacar cruz. ¿Seguía siendo el juego equitativo?

[*Una primera estrategia útil —a veces— para convertir ejercicios en problemas (además del propio interés humano del juego de azar como tema de estudio) es la de hacer depender el resultado de un parámetro, y estudiar la variación del resultado dependiendo del parámetro.*]

Otra ronda de opiniones sobre la apreciación intuitiva de la nueva situación, ofrece la siguiente discusión entre alumnos (¡los alumnos también saben argumentar, cuando el tema les interesa!):

Alumno A) Ahora tiene el jugador *A* mayor probabilidad de ganar, porque hay más probabilidad de que salgan las dos caras...

Alumno B) ... Pero también hay menos probabilidad de que salga cruz en las dos.

Alumno C) Entonces la del jugador *B* no ha cambiado: lo que sale «cara» de más, por lo que sale «cruz» de menos...

con el permiso de los autores.

Alumno A (el mismo A) Si no ha cambiado la probabilidad de *B* tampoco ha cambiado la de *A*, porque la suma de las dos es 1.

[*Con las discusiones en clase se pone de manifiesto que las primeras intuiciones que construye la mente, es posible que no reflejen la complejidad de la situación. Una posterior reflexión (o discusión) aunque sólo sea cualitativa (y cuantitativa si es necesario) permite ir detectando ya ciertas incorrecciones, e ir perfilando un plan de acción. Resaltar esto al resolver problemas e ir creando un ambiente de clase que permita el desarrollo de estas actitudes, es mucho más importante que el propio resultado, porque permite un ambiente de clase que propicia el desarrollo de las actitudes científicas, que hacen entender el sentido profundo del conocimiento científico —conjeturas provisionales sometidas a verificabilidad— y, en definitiva, el valor de la ciencia.*]

Sobre el mismo diagrama en árbol del espacio muestral, una probabilización distinta de la establecida en la fig. 1, como la que se ve en la fig. 2, permitió obtener que la probabilidad de que ganara *A* era de 17/25 frente a un 8/25 de que ganara *B*, o sea algo más del doble, pero que no llegaba al 80 por 100. El profesor fuerza la situación al preguntar cuál es la probabilidad de ganar *A* si la probabilidad de sacar cara en una moneda sólo fuese 1/5. La evidencia de la simetría del sesgo de la moneda hacia uno u otro resultado es patente ahora.

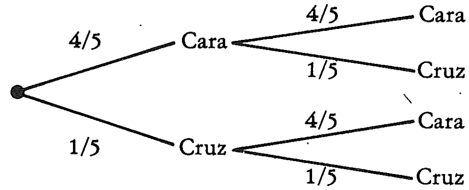


Fig. 2

Una pregunta de un nuevo alumno, que hasta ahora no había expresado sus opiniones en la discusión:

Alumno D) Aumentando la probabilidad de salir cara, ¿siempre aumenta la probabilidad de que gane *A*?

[*Resuena en la pregunta el eco de un tipo de investigación científica: "¿Cómo varía la magnitud* Y *al ir cambiando la magnitud* X*?".*]

El profesor sugiere que se estudie la probabilidad *(y)* de que gane *A* en función de la probabilidad *(p)* de salir cara. El sencillo diagrama en árbol utilizado les permite obtener ahora

$$y = p^2 + (1 - p)^2$$

o sea

$$y = 2\,p^2 - 2\,p + 1$$

siendo

$$0 \leq p \leq 1$$

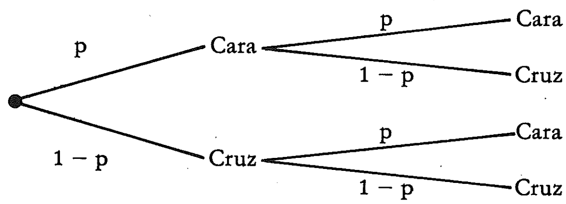


Fig. 3

[*¡Y hemos pasado de "probabilidad" a "funciones"! En el estudio matemático de una situación no tienen por qué existir los compartimentos estancos en los que solemos dividir los programas oficiales.*]

La gráfica que nos permite ver la variación de *y* es inmediata y sencilla: es una parábola, definida de manera natural en el intervalo [0, 1], que toma el valor 1 para $p = 0$.

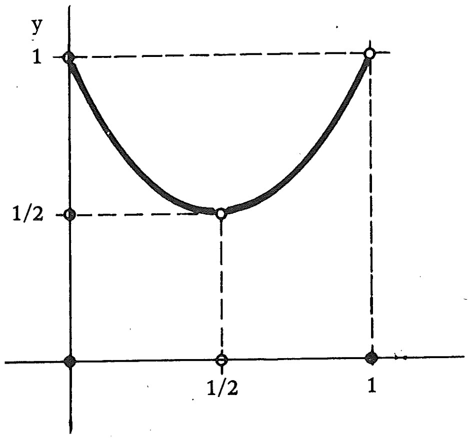


Fig. 4

PROFESOR: ¿Está eso de acuerdo con nuestra experiencia?

ALUMNO E) Claro; si siempre sale cruz en las dos monedas, gana el que juega con los dos resultados iguales. Lo mismo pasa para $p = 1$; también $y = 1$.

Así pues, la parábola de la gráfica es decreciente hasta $p = 1/2$ donde tiene el mínimo, y creciente a partir de él. El valor del mínimo es $2 \cdot 1/4 - 2 \cdot 1/2 + + 1 = 1/2$. Luego, para cualquier valor de p tiene más probabilidad de ganar que para $p = 1/2$. La probabilidad *(x)* de *B*, que es $x = 1 - y = 2p - 2p^2$, cuya gráfica es la de la fig. 5, nos permite ver que el jugador *B* está siempre en desventaja frente al *A*, pues cualquier alteración en la exactitud de la moneda, beneficia al jugador *A* pues la gráfica de *(y)* está siempre por encima de la de *(x)* para cualquier valor de p salvo para $p = 1/2$.

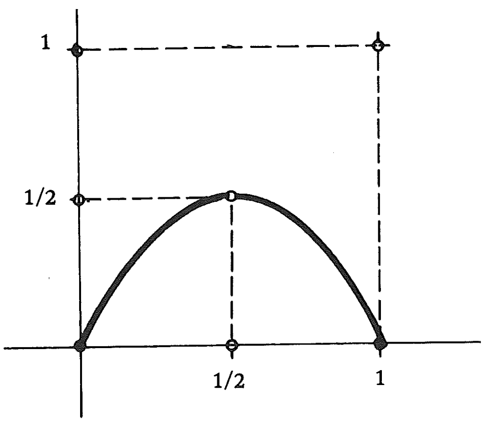


Fig. 5

[*¡El profesor está contento! La situación definitivamente aclarada..., al parecer.*]

La situación de investigación toma una ruta inesperada con una nueva intervención.

Alumno E) ¿Y si las dos monedas no están igual de mal hechas? Hay distinta probabilidad de salir cara en una que en otra.

Alumno F) O que la probabilidad de más que hay en una de las monedas, para salir cara, la tenga la otra moneda para salir cruz.

Esta última situación tuvo defensores de que no cambiaba para nada la probabilidad 1/2, pues «lo que había de más en una, lo había de menos en la otra». La resolución fue fácil, pues era un caso más de los métodos usados, y la probabilidad de que gane *A* se obtuvo fácilmente como

$$y = 2\,p\,(1 - p) = 2\,p - 2\,p^2.$$

Es decir, que la gráfica es como la de la fig. 5, y por tanto ahora es *A* el que sale siempre perjudicado salvo cuando una moneda sea exacta, en cuyo caso la otra también ha de serlo. Se han cambiado los papeles de *A* y de *B*.

La pregunta del alumno *E* deparó nuevas sorpresas, pues el habitual diagrama en árbol, probabilizado ahora como en la fig. 6, nos permitió obtener

$$y = pq + (1 - p) \cdot (1 - q)$$
$$y = 2pq - p - q + 1$$

La probabilidad de que gane *A* depende ahora de dos variables, p y q.

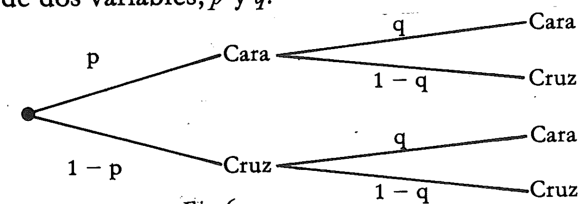
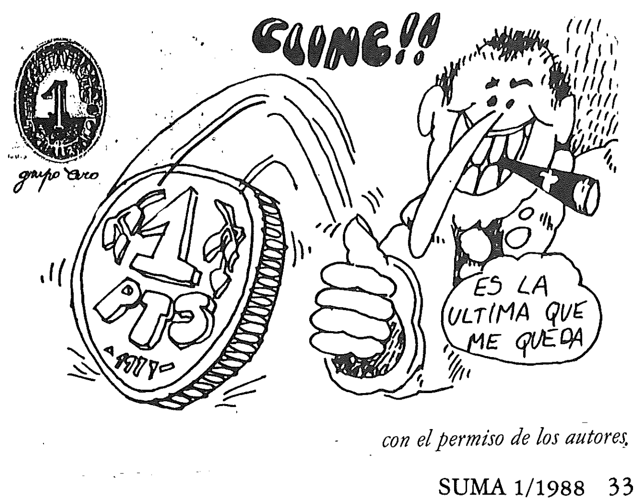


Fig. 6



con el permiso de los autores.

[*Las dos variables han aparecido de manera natural en una investigación. ¿Para cuándo introducirlas en los cursos de Bachillerato? El mimetismo hacia lo universitario hace que si no se introducen instrumentos de cálculo como las derivadas parciales no se puedan estudiar. Pero al estudiar múltiples situaciones en la realidad, aparecen dichas funciones: piénsese como ejemplo más simple en el volumen de los cuerpos, dependiendo de dos y a veces de tres variables. Hay aquí un ejemplo más de cómo el punto de vista* académico *(¡esos objetivos finales ocultos tantas veces negados o inconscientes!) influye en los programas del Bachillerato. Naturalmente que se puede conocer algo sobre los valores de la función, sin necesidad de potentes instrumentos de cálculo; es como si no se pudiera estudiar nada de las funciones de una variable hasta no haber dado la derivación. Además, el no disponer de potentes instrumentos de cálculo obliga a estudiar aprovechando al máximo de lo que se dispone, es decir enseña a utilizar mejor el cálculo y sacarle todo su provecho. En definitiva, hace que desarrollemos la creatividad.*]

Es una función de dos variables y nada más natural que intentar dibujar los valores que toma la función en el cuadrado de lado 1. Lo primero fue calcular los valores en los extremos y en algunos puntos de los bordes y en el del centro, de coordenadas (1/2, 1/2), y eso permitió ya tener un esbozo de la posible «superficie».

[*¿Pero no sólo metemos funciones en un problema de probabilidad, sino también geometría? ¡Los alumnos se van a hacer un lío! Cada cosa hay que darla en su sitio. La matemática ha sido siempre una ciencia ordenada.*

¿No oyen las carcajadas de Arquímedes, de Galileo, de Euler, de Gauss...?]

El profesor tuvo que tomar parte más activa en la clase para ayudar un poco en un esfuerzo nuevo. pensaron que una manera de hacernos idea de cómo era seria mediante sección por planos paralelos... [a lo que llamamos los planos de referencia]. El profesor sugirió que cada idea geométrica se fuese «traduciendo» a términos de cálculo:

— cortar por planos paralelos era hacer que los valores de p o de q fuesen fijos. En ese caso lo que se obtenía eran líneas rectas. ¿Cómo es su pendiente?

— el profesor sugirió que estudiaran lo que ocurría al cambiar p por q en la ecuación de la superficie. ¿Cambiaba? ¿Qué significado geométrico tiene eso?

— propuso el profesor que se estudiara lo que ocurriría al cortar por planos paralelos a la «base». Lo que se obtienen son curvas, estudiadas el curso anterior.

El inmediato movimiento de manos y dibujos para hacerse una idea de cómo era la superficie, hizo que uno de los habituales «manitas» que hay por nuestras clases, sugiriera el construir una maqueta, puesto que los cortes por los planos paralelos verticales eran líneas rectas que se podían simular muy bien con hilo tenso, atado a clavos.

[*¿No les viene el recuerdo de Galileo cortando una cicloide de latón, hecha con sumo cuidado, para calcular el área de la cicloide?*]

Una sola clase ya dio bastante de sí, aunque no habíamos hecho más que un solo ejercicio de la hoja de probabilidad. Pero también el final es anecdótico. Al sonar el timbre volvieron a la realidad (como el cuento de la *Cenicienta*).

Alumno B) ¿Pero esto último que hemos dado no entra en el programa de selectividad? Me ha gustado, pero ya lo investigaré cuando tenga tiempo.

¡Sería bonita una enseñanza sin el agobio de la selectividad! ¿Sería posible?