Reseñas

Editan: Arthur F. COXFORD y Albert P. SHULTE: *The ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook National Council of Teachers of Mathematics.*

Un alumno escribía: «El Álgebra es bastante pesada y sin embargo, muy educativa, el 90 por 100 de las veces es muy frustrante, hay que emplear muchas horas y no consigues entender casi nada». Así comienza el *Yearbook* del 88 editado por el «national Council of Teachers of Mathematics» [1].

Desde que en 1985 el NCTM publicó como libro del año *The Secondary School Mathematics Curriculum,* se propuso como objetivo ir recorriendo temas concretos del currículum de matemáticas. En el prólogo del libro podemos leer que la elaboración y posterior edición del presente libro es un reconocimiento, por una parte, del hecho de que el Álgebra es una de las partes de las Matemáticas que más tiempo ocupa en los currícula de la enseñanza secundaria, y por otra, a que investigaciones recientemente realizadas han puesto de manifiesto que el aprendizaje del Álgebra presenta especiales dificultades entre la mayoría de los alumnos.

El libro está dividido en cinco partes, en las que se abordan diferentes aspectos relacionados con la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

La *primera parte* del libro tiene como objetivo presentar algunos de los errores más frecuentes entre los alumnos (interpretación de las incógnitas como números desconocidos y no como variables, ausencia del concepto de función, mal manejo de las reglas algebraicas...) y analizar algunas de las causas que más directamente pueden influir en la existencia y persistencia de estos errores.

En los capítulos incluidos en la *segunda parte* se estudian algunos de los conceptos aritméticos que por su repercusión en el aprendizaje del Álgebra los alumnos deberían tener asimilados previamente, dándose sugerencias para su enseñanza; por ejemplo: sugiere que se trabaje la proporcionalidad a partir de la razón de una propor-

[1] Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de América.

ción; que se trate la igualdad como una equivalencia y no como unión de una operación y su resultado. Para trabajar las propiedades de operaciones numéricas se cuenta una experiencia basada en el uso de la calculadora.

En las *partes tercera y sexta* del libro se presentan ideas concretas de aula para la enseñanza de los temas más usuales del Álgebra: ecuaciones, sistemas, polinomios, desigualdades, funciones, problemas con enunciado... Es importante señalar que estos temas se abordan en más de un capítulo y desde enfoques didácticos distintos, pudiendo encontrarse experiencias que están en un contexto más matemático —resolución de ecuaciones como situaciones de equilibrio siguiendo el principio «hacer lo mismo en amos lados»— y otras donde el contexto es más práctico y relacionado con el mundo real —resolución de ecuaciones en problemas concretos por medio de tanteos, confección de tablas y otros—. Asimismo estos temas se presentan desde niveles diferentes estando algunos encaminados a los principios del aprendizaje del Álgebra (ciclo superior de la EGB y 1.º, 2.º de BUP) y otros para cursos más avanzados (3.º de BUP y COU).

La *cuarta parte* centra su atención en los problemas con enunciado. Presentando algunas de las dificultades más usuales entre los alumnos y dándo sugerencias para la mejora de su enseñanza, en esta parte cabe destacar el capítulo 12 donde se defiende la idea de la introducción del Álgebra a través de este tipo de problemas y a partir de aquí ir trabajando los aspectos más manipulativos y operativos.

La *parte quinta,* capítulos 15-24. Plantea el uso de microordenadores como herramientas para la enseñanza del Álgebra, se cuentan experiencias concretas para: cálculo de raíces de polinomios, representación de funciones, logaritmos..., muchos de ellos incluyen los programas de ordenador utilizados.

Cabe destacar que en muchas de las ideas que se plantean a lo largo del libro es frecuente el uso de calculadoras (de 4 operaciones y científicas) no sólo como instrumento para ahorrar cálculos, sino como herramienta fundamental para el aprendizaje de conceptos.

Echamos en falta algún capítulo que dirija su atención al Álgebra como Lenguaje, aspecto éste que ha sido estudiado por varios autores (Freudenthal lo hace en el capítulo 16 de su libro *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*), poniendo de manifiesto que las reglas del Álgebra son mucho más estrictas que las de cualquier lenguaje, donde pequeñas modificaciones en una oración no influyen en su significado mientras que en el Álgebra esto no es así: $(6 - x \neq x - 6)$. Lo que corrobora que la enseñanza-aprendizaje del Álgebra es una tarea en la que hay muchos aspectos a tener en cuenta.

Como resumen, podríamos decir que este libro está pensado para los profesores que en sus aulas enseñan Álgebra, tanto en los primeros años de la enseñanza secundaria, como en los años anteriores a la universidad. Pensamos que de su lectura se pueden sacar ideas prácticas y variadas para utilizar en nuestras clases.

Grupo Azarquiel

Efrain FISCHBEIN: *Intuition in Science and Mathematics. And Educational Approach,* 225 págs. Mathematics Education Library. D. Reidel Publishing Company, 1987, ISBN: 90-277-2506-3 Dordrecht, Holland.

«La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad.» (Courant/Robbins, *¿Qué es la Matemática?*.) La cita con la que comenzamos supone una síntesis elegante de los rasgos distintivos que algunos matemáticos, preocupados por el sentido y significado de su disciplina, suelen atribuir a las matemáticas. Sin embargo no todos ellos tienen el mismo peso real en la producción científica, libros y revistas, dedicados a la matemática. Todo educador matemático conoce algunos libros de lógica e incluso lógica matemática, ha trabajado con más de un manual de análisis, ha utilizado argumentos de tipo constructivo y es capaz de reconocer y utilizar generalidades o particularizaciones en sus razonamientos. Nada de esto ocurre con la intuición: ¿dónde hay libros de matemáticas que hablen de la intuición?, ¿cuándo se utiliza la intuición como criterio en un argumento?, ¿qué aplicaciones matemáticas tiene la intuición? Todos parecen estar de acuerdo en que hay una parte oscura, antes de que se organicen las ideas, de la que surgen los motivos sobre los que trabajar; y a la que en términos generales se le llama intuición. Parece también que, por motivos principalmente retóricos, conviene hablar de intuición cuando se caracteriza la matemática como forma de pensamiento. Pero igual se supone que la matemática no debe decir nada sobre la intuición, que en todo caso es materia como mucho para filósofos y ensayistas en general. Puede que la Matemática no tenga mucho que decir, salvo reconocer que es una de sus fuentes de inspiración, pero la Educación Matemática sí debe tener que decir y mucho sobre este concepto; si se tratase de una simple figura retórica, lo mejor es prescindir de ella.

El libro que presentamos viene a poner claridad sobre este término, elaborar y organizar los conceptos relacionados con la intuición y poner de manifiesto el papel real que desempeñan las intuiciones en la comprensión, formación y adquisición de conocimiento matemático. La obra está dividida en dos partes. La primera de ellas está dedicada a elaborar una teoría sobre la intuición. Después de enumerar y comentar la visión que distintas escuelas filosóficas han tenido sobre la intuición (principalmente Descartes y Spinoze), el autor elabora el concepto de intuición a la que define como «un tipo de cognición caracterizado por las siguientes propiedades: auto-evidencia e inmediatez; certeza intrínseca; estabilidad o perseverancia; coercitividad; estatus teórico; extrapolabilidad de información; globalidad e implicitud». El análisis de cada una de estas características es profundo, extenso y detallado, pero quizá lo más importante para el educador matemático consiste en que dicho análisis está elaborado sobre ejemplos de conocimientos matemáticos. El carácter intuitivo de muchas de las nociones que consideramos básicas en matemáticas y la dificultad que supone el argumentar sobre las mismas, si prescindimos de este soporte intuitivo; es una reflexión seria sobre los fundamentos y las limitaciones de nuestro conocimiento. La segunda parte está dedicada a los factores que conforman la intuición. Para ello, en primer lugar estudia las relaciones entre experiencia e intuición, destacando que «la experiencia desempeña un papel fundamental en la formación de intuiciones llegando a producir a largo plazo un sistema estable de representaciones que implican programas estructurados de acciones y expectativas». Como ejemplo destacado de la practicidad de los significados intuitivos estudia el caso de los números negativos. La conclusión de que los números negativos deben servir como un primer ejercicio y ejemplo de estudio formal de un concepto, por su carencia de base intuitiva es una consecuencia sorprendente de un análisis detallado de la fundamentación del concepto de número entero.

Continúa con una clasificación detallada de los tipos de intuiciones atendiendo a dos criterios fundamentales: según el papel que desempeñan las intuiciones en primer lugar, y en segundo lugar según los orígenes de la intuición.

El papel de los modelos en el conocimiento intuitivo y su empleo en matemáticas constituyen otra parte considerable de este trabajo. Se clasifican los modelos en tipos; se estudia el papel de las analogías en la construcción de modelo; se estudian el empleo de modelos analógicos en matemáticas y se señala su papel en la formación de nociones falsas. Los modelos paradigmáticos y los diagramas constituyen una parte muy interesante de este trabajo con una consideración especial sobre la representación gráfica de una función.

Finalmente estudia algunos mecanismos que se han identificado como participantes en la formación de intuiciones. Los conflictos y compromisos que pueden establecerse sobre la base de las intuiciones cierran la amplia y completa reflexión teórica que este libro realiza. El libro está escrito en un estilo preciso y directo, resulta de lectura fácil y agradable, tiene gran riqueza de ejemplos, en su casi totalidad matemáticos, y proporciona múltiples consideraciones didácticas para el profesor de matemáticas. No creemos que el libro agote el tema: más bien nos proporciona una base sobre la que comenzar el trabajo para comprender la enorme complejidad que encierra el concepto de Intuición en el campo de la Educación Matemática. También nos ofrece un modelo de cómo realizar un análisis profundo sobre un concepto básico, integrando información procedente de muy diversas disciplinas formales —Psicología, Matemáticas, Pedagogía y Filosofía— señalando un camino que está aún por recorrer con la mayor parte de las nociones importantes de Área Didáctica de la Matemática.

En la larga lista de libros necesarios para la Educación Matemática que esperan ser traducidos al castellano para su difusión y uso por el profesorado, este que comentamos es uno de los que nos parece debiera tener prioridad.

Luis Rico Romero