EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Minerva AGUIRRE TAPIA, Antonio CODINA SANCHEZ y
Jose Luis LUPIAÑEZ GOMEZ
Instituto Politécnico Nacional-CINVESTAV, México

Resumen

En educación matemática el razonamiento cobra especial importancia, al mismo tiempo que su uso puede conducir a opiniones contrapuestas. Entender y dominar la demostración de un resultado matemático ayuda a su comprensión, facilita su empleo en el estudio de otras proposiciones y contribuye a la consolidación de un lenguaje matemático. Pero ¿puede sacarse partido a una demostración si se desconoce qué es, qué papel juega, y dónde reside su fuerza? ¿Deben frenarse los intentos de los alumnos de justificar a su modo los resultados matemáticos, ó modelarlos y sacarles mejor rendimiento? ¿No es mejor una aproximación medianamente fundada pero entendida, que aseveraciones bien formalizadas pero sin significado?

Si además se considera la aportación que las nuevas tecnologías realizan a la enseñanza, es necesario una reflexión acerca de cómo se ve afectada, si es que se altera, la forma de validar el conocimiento matemático en el aula, además de establecer cuál es el rigor y la formalidad de las justificaciones que se desarrollan con estos instrumentos. En este reporte, se realiza un acercamiento teórico a diferentes modos de justificar las proposiciones matemáticas en el aula, y al papel que desempeña la tecnología en esta tarea. También se describe una experimentación llevada a cabo con profesores de matemáticas en formación en la que se analizaron las concepciones que tenían acerca del valor educativo que posee la calculadora TI-92 para, de algún modo, validar dichas proposiciones.

1. El Razonamiento Matemático

Muchas investigaciones recientes giran en torno al razonamiento en matemáticas y al papel que desempeña en al ámbito educativo de esta disciplina, y estudios de este tipo distinguen entre diferentes maneras de validar el conocimiento matemático en el aula. Duval (1999), entre otros, habla de *argumentación* y *demostración* como dos tipos de razonamiento que poseen estructura, vínculos de organización y funcionamiento cognitivo distintos.

Según este autor, una argumentación *no* es una demostración. Están separadas por vínculos de organización; para que un razonamiento sea considerado una demostración, este debe de ser *válido* (tener vínculos de validez) y tener como objetivo la verdad, mientras que la argumentación es un razonamiento que obedece a vínculos de *pertinencia*, tiene como objetivo lo creíble y el convencimiento de los demás o de sí mismo, siendo por tanto más cercano a las prácticas discursivas espontáneas. Por otra parte, en la argumentación se considera el valor epistémico ligado a la comprensión espontánea de su contenido semántico, mientras que la demostración, por el contrario, se focaliza casi exclusivamente en el valor epistémico derivado del estatuto teórico fijado previamente.

De esta forma, podemos plantearnos si el trabajo con argumentaciones puede conducir a entender y aceptar el valor de la demostración matemática rigurosa, y si en un tipo de razonamiento y otro los procesos cognitivos involucrados son similares. Hablaremos en este caso de si hay ó no continuidad cognitiva en el paso de la argumentación a la demostración.

Un acercamiento a una u otra postura en relación a estas consideraciones, altera el papel que representa una argumentación en la práctica de las matemáticas y su relación con la demostración, por lo que una reflexión en torno a estas ideas posee una gran relevancia. Duval concluye que el desarrollo de la argumentación, aún en sus formas más elaboradas, no abre los ojos a la demostración, pues el razonamiento deductivo que implica esta última necesita de un aprendizaje específico e independiente (Duval, 1999).

Otros autores que estudian este tema, concluyen de diferentes formas; así, Perelman y Ducrot reflejan una postura cercana a la de Duval, en el sentido de que ponen en duda la continuidad cognitiva entre ambos tipos de razonamiento en matemáticas, mientras que Toulmin si que admite esa posibilidad. Él relaciona la validez de un enunciado con la estructura y racionalidad del discurso que la defiende, y esa validez dependerá de la de algunas premisas dentro de una continuidad, que se establece de acuerdo a determinadas reglas (Codina y Lupiáñez, 1999).

Balacheff (1999), por otra parte, es más contundente en sus opiniones: *"La argumentación constituye un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la demostración, pues en esta última se renuncia a las libertades que uno puede tomarse en la primera. La argumentación es a la conjetura como la demostración es al teorema, y considero un error de carácter epistemológico dejar creer a los alumnos que ellos son capaces de producir una prueba cuando no han hecho otra cosa que argumentar"*.

2. Reflexiones en Educación Matemática

Se puede constatar una reciente preocupación por incluir en los distintos programas educativos actuales una parte especifica relacionada con la demostración. Por ejemplo, en el borrador de los estándares para el 2000 del NCTM, uno de estos estándares se llama "Razonamiento y prueba", en el que explícitamente se señala:

Los programas de instrucción matemática deberían centrarse en el aprendizaje de razonamientos y la construcción de pruebas como parte de la comprensión matemática de forma que todos los estudiantes:
Reconozcan el razonamiento y la prueba como una poderosa y esencial parte de las matemáticas.
Realicen e investiguen conjeturas matemáticas.
Desarrollen y evalúen los argumentos y pruebas matemáticas.
Seleccionar y usar los tipos de razonamiento y métodos de demostración apropiados.

En estos y otros programas instruccionales, se resalta el papel que juega la demostración en la enseñanza de las matemáticas, pero varios puntos han de ser discutidos aún. No cabe duda que el entender y dominar la demostración de un resultado matemático ayuda mucho en la comprensión de éste, y puede facilitar su empleo como herramienta en el estudio de otras proposiciones. Pero no puede sacarse partido a una demostración si realmente no se entiende qué es, cual es su papel, y en donde reside su fuerza y utilidad; y esto es algo que los alumnos no tienen claro, y lo que puede ser peor, es algo de lo que el docente no es consciente. Por otro lado, el popular problema del ajuste a un programa educativo por parte del profesor, no facilita el que éste se involucre en intentar cambiar este aspecto, y tampoco quizás le haga pensar sobre ello. Y tampoco es sencillo transmitir la conciencia del peso que tiene la demostración en matemáticas.

Si estas consideraciones son tan habituales en el aula, ¿Por qué frenar los intentos de los alumnos de justificar a su modo los resultados matemáticos, y no tratar de modelarlos y sacarles el mayor rendimiento posible? ¿Acaso no es mejor una aproximación más o menos fundada, pero asumida y entendida, que una serie de argumentos bien formalizados pero carentes de significado?

Es posible que el trabajar con argumentaciones pueda unir esos dos extremos, y otorgue a los alumnos la posibilidad de acercarse a la forma de razonamiento matemático, sin perderse entre las dificultades que presenta el trabajar con el rigor y formalismo tradicionales de esta ciencia. Pero en ese caso, aparecen nuevas cuestiones: ¿Qué tipos de argumentaciones y cómo pueden emplearse? ¿Cuales son las propiedades que son interesantes de argumentar para los estudiantes? ¿Qué valores inculca un trabajo de este tipo?

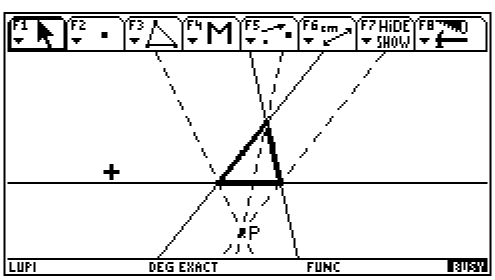
Al considerar además el trabajo con instrumentos tecnológicos en el aula de matemáticas, es necesario establecer qué tipo de justificaciones pueden realizarse con estas herramientas.

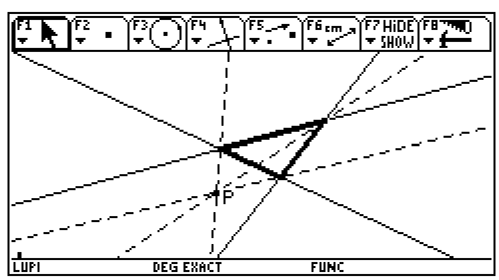
3. Demostraciones con el Uso de la Tecnología

Sin duda, el empleo de las nuevas tecnologías obliga a profundos cambios en el campo educativo, tanto a nivel de objetivos, contenidos, metodología, así como en las actividades de evaluación. Pero ¿en qué punto el uso de sistemas computacionales en la enseñanza facilita ó mejora el realizar demostraciones matemáticas?

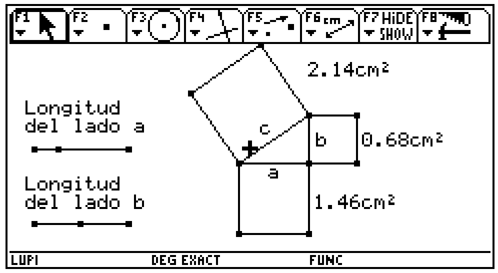
El desarrollo de programas informáticos con una marcada intencionalidad educativa como Cabri-Géomètre, ha hecho que en ramas de la matemática como la geometría puedan acercarse a los estudiantes razonamientos que resultan muy complicados de visualizarse sin estos instrumentos. Se trata por ejemplo de problemas de optimización ó de la inexistencia de figuras verificando determinadas propiedades como la siguiente: *¿Son concurrentes las bisectrices de los ángulos exteriores de cualquier triángulo?*

Si trabajamos con la versión de CABRI que incorpora la TI-92 y en este ambiente representamos un triángulo, y trazamos las bisectrices de sus ángulos externos, puede observarse que éstas se cortan en un punto, y que si variamos la posición, forma, o medidas con la posibilidad que brinda el *dragging* de la máquina, esta propiedad se sigue verificando ¿Qué grado de validez tiene esta justificación?

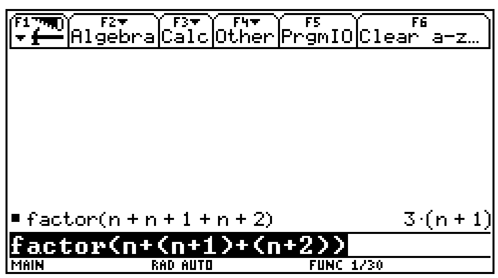




También es posible representar propiedades o teoremas en la calculadora, lo que puede contribuir substancialmente a que los estudiantes visualicen dicha propiedad. Representando como muestra la figura de la izquierda el Teorema de Pitágoras, podemos comprobar que la suma de las áreas de los cuadrados situados en los catetos de un triángulo rectángulo es la del que se apoya en la hipotenusa:



El entorno CABRI permite visualizar y ejecutar propiedades que de otra forma serían prácticamente imposibles, y nos empuja a realizar conjeturas acerca de relaciones que verifican las figuras representadas. Asimismo, y dentro de la pantalla HOME de la TI-92, pueden llevarse a cabo justificaciones sencillas como la siguiente, con la que se comprueba como la suma de tres números naturales consecutivos es siempre un múltiplo de 3:



Se introduce aquí la idea de **demostración situada** (Codina y Lupiáñez, 1999), en el sentido de que esta prueba se realiza en el ambiente computacional en el que estemos trabajando, con las posibilidades y limitaciones que nos ofrece, con los elementos que pone en juego, y con las reglas de validación que sean permitidas. En el ejemplo planteado antes, el problema podría resolverse en el ambiente CABRI: puede realizarse una demostración situada en este ambiente y dentro del contexto que nos suministra

Nosotros sostenemos la tesis de que no se pueden realizar demostraciones matemáticas rigurosas en el sentido popular en el que se entienden, pero no queremos decir tampoco con esto, que sean este tipo de razonamientos "tradicionales" los que tengan que llevarse necesariamente al aula. Por otro lado, ya contamos en la historia con ejemplos de demostraciones realizadas con el apoyo de tecnologías, como ocurre con el Problema de los Cuatro Colores.

En un estudio de casos realizado con profesores de matemáticas en formación (Lupiáñez, 2000), se investigaron las ideas que los docentes tienen sobre la demostración matemática y el valor que le otorgan en el ámbito educativo, examinar sus concepciones sobre lo que las nuevas tecnologías pueden aportar a este respecto, y validar dichas concepciones mediante un ejemplo que realizaran con la calculadora de algún tipo de razonamiento.

De los 5 trabajos presentados por los profesores, en sólo uno de ellos el sujeto afirmó que se trataba de una demostración perfectamente rigurosa, pero durante su exposición logró convencer formales. Por otro lado, la idea de *argumentación* planteada por Duval (Duval, 1999) estuvo presente en las opiniones de los encuestados, con relación a que es un tipo de razonamiento que no tiene la dosis de rigor que posee la demostración, si bien constituye un tipo de justificación que tiene un interés muy importante y válido en la educación matemática en el ámbito de Secundaria.

Asimismo, los entrevistados hicieron especial hincapié en la necesidad de planificar qué resultados y propiedades deben y pueden justificarse en un curso de secundaria, y cómo el empleo de la calculadora obliga a importantes modificaciones en el curriculum de matemáticas, tanto en la forma de entender la enseñanza en lo que a modificación de actividades y de su evaluación se refiere, como en los procesos de aprendizaje, en donde pueden desarrollarse nuevas facetas de la construcción del conocimiento de los estudiantes. La investigación permitió observar interesantes opiniones de los sujetos entrevistados acerca de la demostración con el uso de la tecnología, y lleva a reflexionar sobre el interés de continuar este tipo de estudios con la idea de implementar correctamente el uso de las nuevas tecnologías en las prácticas educativas de nuestros docentes.

4. Referencias Bibliográficas

[1]. BALACHEFF, N. (1999) **¿Es la Argumentación un Obstáculo? Invitación a un debate**, International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proff, May-Jun 1999.

[2]. CODINA, A., LUPIÁÑEZ, J.L (1999) (Por publicar) **El Razonamiento Matemático: Argumentar y Demostrar**. Actas del XXXII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana. Guadalajara, México, 1999.

[3]. DUVAL, R. (1999) **Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?**, México D.F.: Iberoamérica.

[4]. LUPIÁÑEZ (2000) (Por publicar) **Concepciones de Profesores en Formación acerca de la Validación del Conocimiento Matemático con el uso de Tecnología** en HITT, F. & HERNÁNDEZ, A (Edts.) (2000) **Experimentaciones en Matemática Educativa en los niveles Medio-Superior y Universitario**. Dpto. Matemática Educativa. Cinvestav /IPN, México D.F., México.

[5]. NCTM (1998), **Principles and Standards for School Mathematics: Discusion Draf**, Virginia: NCTM.