El Razonamiento Matemático: Argumentación y Demostración

Antonio Codina Sánchez
Jose Luis Lupiañez Gómez

INDICE

PRÓLOGO

El *razonamiento* es una actividad que adopta multitud de formas, ya que abarca enfoques muy alejados unos de otros. Se puede definir como un esquema organizado de proposiciones que se orienta hacia un enunciado-objetivo, con miras a modificar el valor epistémico, y que por tanto, altera el valor de verdad bajo el cumplimiento de ciertas condiciones.

Las dos características siguientes, son necesarias para que un discurso pueda ser reconocido como razonamiento:

- Estar orientado hacia el enunciado-objetivo, es decir, hacia la proposición a justificar.
- Estar centrado en el valor lógico o espistémico de esta proposición, y no sobre su contenido.

Precisamente esta segunda propiedad distingue al razonamiento de la *explicación*: la explicación de una ó más razones para volver comprensible ó entendible un dato, tiene un valor descriptivo, sin valor epistémico; el razonamiento también da razones, pero su papel es el de comunicar la fuerza de argumento a las afirmaciones que se desean justificar.

Uno de los razonamientos que vamos a desarrollar es el de *demostración*, pero, ¿Qué se entiende por demostración?

Hoy en día, los matemáticos afirman que una demostración no es otra cosa sino aquello que los matemáticos aceptan como demostración; en palabras de N. Balacheff (Acuña, 1996): "*prueba es una explicación aceptada por una comunidad en un momento dado, [...], y si un enunciado se conoce como verdadero y bien definido, a estas pruebas las llamaremos demostraciones*".

Para ilustrarlo esta opinión, citaremos la conversación entre el Matemático Ideal y un joven estudiante (Davis&Hersh, 1995)[1] .

> E: *Profesor, ¿qué es una demostración?*
>
> M.I: *Lo que se hace es expresar los axiomas de la teoría formalizadamente utilizando un alfabeto o lista de símbolos dada. A continuación, se escriben las hipótesis de los teoremas con ese mismo simbolismo y, seguidamente, se muestra que mediante las reglas de la lógica se pueden ir transformando paso a paso las hipótesis hasta alcanzar la conclusión. Eso es una demostración.*
>
> E: *¿De verdad? ¡Me sorprende! !He seguido muchos cursos y jamás he visto a nadie hacer eso!.*
>
> M.I: *!Claro que nadie lo hace! !Se tardaría toda una vida! Basta hacer ver que sería posible hacerlo; con esto es suficiente.*
>
> E: *Por tanto, ¿Hay que saber mucho de lenguajes y lógicas formales para poder dar una demostración matemática?*
>
> M.I. *¡Desde luego que no! Cuanto menos se sepa, mejor. A fin de cuentas, todo eso no son más que sin sentidos abstractos.*
>
> E: *Entonces profesor, ¿qué es de verdad una demostración!*
>
> M.I: *Bueno, es un razonamiento que convence a quienes conocen bien la cuestión.*

Esta polémica también puede observarse en las discusiones que suscitaron casos famosos tales como la demostración de Teorema de los Cuatro Colores por medio de la computadora o del último Teorema de Fermat.

En este documento, tratamos de comparar dos tipos de razonamiento: la argumentación y la demostración, desde el análisis de su funcionamiento cognitivo y del de su estructura y niveles organizativos, así como de la posibilidad de tránsito de la primera a la segunda.

[1] Reproducida sólo parcialmente

Por otra parte, recogemos algunas consideraciones relacionadas con aspectos educativos, y finalmente reflexiones acerca de la capacidad de las nuevas tecnologías para desarrollar demostraciones matemáticas.

1. EL LENGUAJE COMÚN, EL LENGUAJE MATEMÁTICO Y EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Las matemáticas han desarrollado una "especie" de lenguaje particular para transmitir su pensamiento libre de cualquier influencia, y está excesivamente formalizado. El lenguaje matemático esta influenciado por el habla común y además, sus principios no pueden reemplazar a aquellos del lenguaje cotidiano utilizado por maestros y alumnos, aunque se pueden modificar y cambiar.

En su forma ideal, el lenguaje matemático, y por lo tanto su interpretación, debe ser independiente de cualquier referencia a su ámbito sobre-entendido o incontrolable. Así, se pueden encontrar perturbaciones producidas por tomar en préstamo términos o proposiciones del lenguaje cotidiano y darles un significado parcial o totalmente diferente del sentido que tienen habitualmente. Es importante señalar, que el sentido de una palabra y del símbolo, en un texto matemático, es objeto de negociación y de definición; de esta forma, el lector no debe de agregar un conocimiento extra que no se haya dado en el texto.

Es debido a las características particulares entre el lenguaje matemático, común y el razonamiento que nos planteamos dos preguntas (Pluvinage, 1996):

1. ¿Qué diferencia hay entre un *razonamiento* y otras formas de uso del lenguaje (descripciones, narraciones, aclaraciones, comentarios,...)?
2. ¿Cuáles son las características que permiten decir que un discurso es un *razonamiento*?

A este respecto, Duval (Duval, 1999) afirma que “todo lenguaje común incluye términos que permiten indicar una relación *lógica* entre las proposiciones: son los conectivos. Así, la elección de los conectivos, cuyo uso sería inherente a toda técnica de razonamiento, permitiría realizar la distinción”. Aunque en realidad la situación es más complicada, es importante señalar que se puede distinguir tres tipos de conectivos; los combinatorios, los argumentativos y los organizativos, y en base a la existencia de éstos se realizará posteriormente la distinción.

2. EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO: DE LA ARGUMENTACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN

Cuando la importancia del lenguaje natural y de la existencia de una forma de razonamiento natural, la argumentación, que no se deja describir ni evaluar según criterios lógicos, comenzó a ser reconocida en el aprendizaje de las técnicas y del razonamiento propio de los matemáticos, surgió el problema de la posibilidad del pasaje entre dos tipos de razonamiento, a saber, de la argumentación a la demostración.

Este problema exige la confrontación entre el funcionamiento cognitivo de la argumentación con el funcionamiento respectivo de la demostración y si existe continuidad o ruptura cognitiva entre ambos, para lo cual, hay que analizar previamente otros puntos (Duval, 1999).

Comenzaremos estudiando la exigencia de *justificación* de una proposición, dentro de la cuál, hay que separar dos operaciones:

1. *Producción de razones*, que se manifiesta por:
    - preguntas *“de dicto”* (¿por qué afirmas que...?, ¿por qué expresas que...), que requieren al menos de un argumento.
    - preguntas *“de re”* (¿por qué se produce...?, ¿por qué se obtiene...?), que requieren una explicación.

2. *Aceptabilidad de las razones expuestas*. Una proposición se acepta ó no según su:
    - *Pertinencia*, en relación a los respectivos contenidos de la afirmación y del argumento.
    - *Fuerza*, que depende de si el argumento tiene o no réplica, y de su valor epistémico (evidente, necesario, auténtico,...).

Ambas operaciones son bien diferentes, a pesar de que a menudo nos parezcan indistinguibles. Los individuos por lo general, se limitan sólo a la producción de razones, enumerando muchas para justificar una posición, sin preocuparse de relacionarlas y articularlas.

La producción de razones depende de la explicación, en la cual el valor epistémico de las proposiciones no es tomada en consideración y sólo se apoya en su contenido. El examen de aceptabilidad de los argumentos, por el contrario, depende del razonamiento, y el valor epistémico aquí es tomado en consideración; las razones dadas en el razonamiento intentan comunicar la fuerza del argumento, las tesis discutidas, y las conclusiones adquieren un nuevo valor. El razonamiento tiene por objetivo la modificación del valor epistémico de un enunciado-objetivo y la determinación de su valor de verdad en el momento en que se satisfacen ciertas condiciones.

Una argumentación *no* es una demostración, están separadas por vínculos de organización; para que un razonamiento sea considerado una demostración, este debe de ser *válido* (tener vínculos de validez) y tener como objetivo la verdad, mientras que la argumentación es un razonamiento que obedece a vínculos de *pertinencia*, tiene como objetivo lo creíble y el convencimiento de los demás o de sí mismo, siendo por tanto más cercano a las prácticas discursivas espontáneas.

Ahora bien; ¿Cuál es la "distancia cognitiva" que esta diferencia cubre? ¿Se puede, sí o no, pasar de una a otra sin mucho esfuerzo y sin contrasentido?.

Responder *sí*, implica admitir una continuidad cognitiva entre argumentación y demostración (la discusión para defender diferentes puntos de vista conduciría al descubrimiento de la demostración). Por el contrario, responder *no*, implica admitir una ruptura entre los funcionamientos cognitivos de la argumentación y los razonamientos puestos en juego en una demostración.

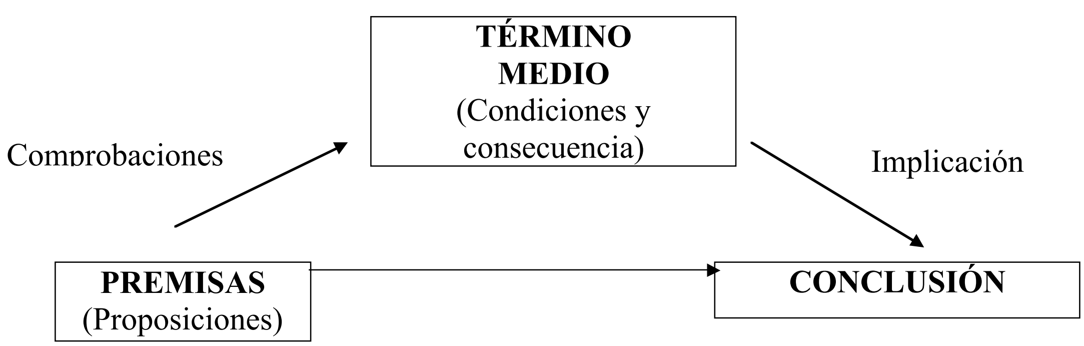
Es realmente complicado medir la distancia cognitiva que marca la diferencia entre ambos tipos de razonamiento, y además, ¿De qué criterios se dispone para determinar si un texto expresa una argumentación o una demostración?

No cabe duda que la respuesta a esa pregunta pasa por el análisis del funcionamiento cognitivo de ambas.

3. FUNCIONAMIENTO COGNITIVO EN LA DEDUCCIÓN Y EN LA ARGUMENTACIÓN

El modelo de razonamiento válido es el razonamiento deductivo, regido por la regla de implicación, *modus ponens*. Es decir, la obtención de una conclusión B, a partir de las premisas que están en la proposición A y de una implicación A ⇒ B.

El esquema de funcionamiento puede expresarse como sigue:



Debe existir sobreposición entre las proposiciones dadas como premisas y las proposiciones mencionadas en la parte *Condición* del término medio, la *conclusión* sólo resulta de la mera implicación de la consecuencia del término medio. El paso de deducción se organiza en función del estatuto operativo de las proposiciones dadas en la premisa y en el término medio, el cual depende sólo del estatuto teórico fijado previamente (No depende del contenido de las proposiciones), así la conclusión se impone como una implicación de la parte "consecuencia".

Para el estudio de una argumentación:

Algunas de las diferencias que separan el funcionamiento de un pasaje de deducción del de una argumentación son las que recoge la siguiente tabla:

Pasaje de Deducción	Pasaje de Argumentación
1. Las relaciones entre premisa y término medio están basadas en proposiciones.	**1.** Las relaciones entre premisa y término medio están basadas en los términos que constituyen el contenido de la proposición.
2. La conclusión afirma lo que ya se ha dicho en la parte consecuencia del término medio.	**2.** La conclusión puede afirmar una cosa diferente de lo que se dice en el término medio, constituye una aportación o un traslado de contenido informativo respecto al término medio
3. El término medio se debe aceptar más allá de cualquier duda.	**3.** El término medio no tiene porqué ser aceptado sin discusión.
4. El valor epistémico del término medio está ligado a su estatuto teórico.	**4.** El valor epistémico del término medio está directamente ligado al contenido de sus proposiciones, por lo que siempre se puede revisar o discutir.
5. La conclusión se impone necesariamente para el sujeto que entiende el funcionamiento de la deducción.	**5.** La conclusión no se impone jamas necesariamente.
6. Siempre emplea un término medio.	**6.** Una argumentación puede recurrir a pasajes de razonamiento sin término medio como a pasajes con término medio.

Para pasar del funcionamiento de la argumentación al de la demostración, y viceversa, se requiere por una parte un descentramiento con respecto al contenido, y por otra, una toma de conciencia de la existencia de otro valor epistémico.

4. UN EJEMPLO:
¿PASAJE DE LA ARGUMENTACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN?

Vamos a analizar la siguiente argumentación, recogida de un texto de Isócrates, en la que se sostiene la tesis de que es mejor formar formadores que formar alumnos:

" (1) Los maestros que educan a individuos sólo ofrecen un servicio a sus alumnos, pero,

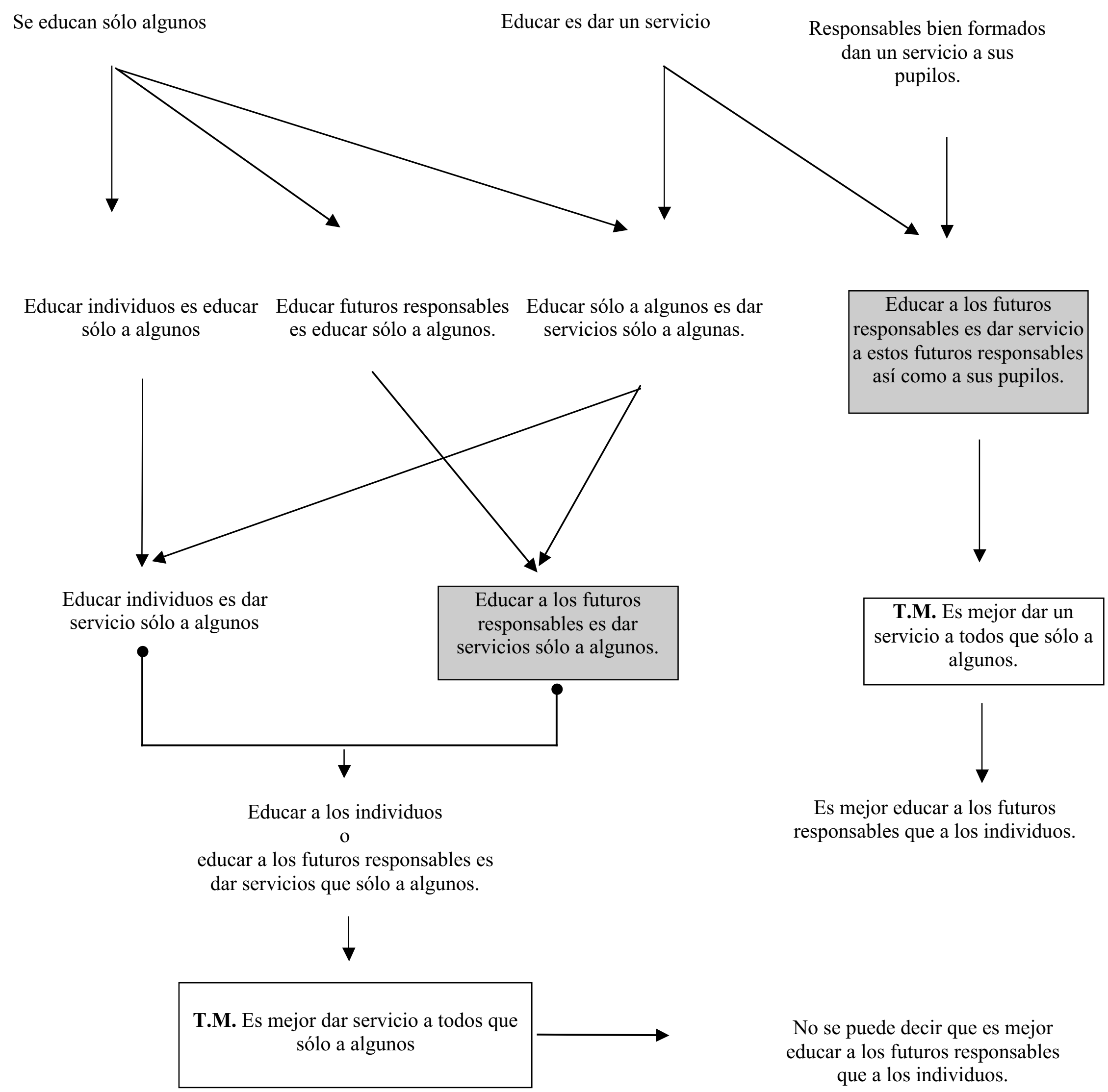
(2) cualquiera que empuje hacia la virtud a los maestros de las masas, dará un servicio tanto a unos como otros, a los que detentan el poder como a los que se someten a esa autoridad ".

Este texto busca "demostrar" la hipótesis de que es mejor formar formadores que formar alumnos. Por otro lado, se encuentra la siguiente restricción: una acción de formación siempre alcanza sólo a un público restringido.

Esta argumentación, ¿es equivalente a una demostración?. Primero fijaremos el estatuto operativo de un cierto número de enunciados preliminares.

Problema:	Probar que es mejor educar a futuros responsables más que educar a individuos.
Hipótesis:	1. Se educan sólo algunos. 2. Educar es dar un servicio. 3. Responsables bien formados dan un servicio a los que ellos guían.
Principio: (Término Medio)	Es mejor dar un servicio a todos, que sólo a unos cuantos.

En la siguiente figura, se representa un grafo proposicional para una demostración que no es posible, no pudiendo por tanto obtener una árbol deductivo:



Se observa que:

- Se obtienen 2 condiciones diferentes y no sólo una.
- Ningún paso funciona como un pasaje de deducción (con la operación implicación).
- Aparecen contradicciones internas (las sombreadas).

Se comprueba por tanto, que no se puede deducir la proposición pedida.

5. ESTRUCTURA Y ORGANIZACIÓN DE ARGUMENTACIONES Y DEMOSTRACIONES

Como ya se mencionó antes, un razonamiento es una organización que se orienta hacia un enunciado-objetivo, para modificar el valor epistémico que dicho enunciado-objetivo tiene dentro de un campo de conocimientos dado. Una análisis del aspecto morfológico de los dos tipos de razonamiento que estamos tratando, debe realizarse desde dos puntos de vista: atendiendo a si considera ó no el valor epistémico de las proposiciones que emplea, y estudiando el grado de uniformidad que presenta en su organización.

En la argumentación se considera el valor epistémico ligado a la comprensión espontánea de su contenido semántico. La demostración, por el contrario, se focaliza casi exclusivamente en el valor epistémico derivado del estatuto teórico fijado previamente. Por otro lado, la demostración si presenta un cierto grado de uniformidad en su organización, pues cualquier pasaje de razonamiento puede expresarse en términos de la regla modus ponens; En la argumentación, no ocurre esto, hay gran variedad de reglas de funcionamiento: modus ponens, la susunción de algo particular bajo una regla general, por inferencia semántica, por enumeración de casos particulares,...

La variedad de formas discursivas hace que parezca difícil caracterizar un discurso argumentativo tipo o determinar una característica verdaderamente específica, pero: ¿Se puede considerar como argumentación todo aquello que no es una demostración?. Y una demostración que se revela falsa, ¿es entonces una argumentación?.

En primer lugar, la distancia discursiva entre las dos formas de funcionamiento cognitivo es, por lo general, débil. En ambos casos se recurre a unos conectivos comunes que se consideran habitualmente como etiquetas del razonamiento.

Por otro lado el discurso argumentativo se puede limitar a dar razones sin llegar a examinar la aceptabilidad, e incluso se pueden mezclar intentos de explicación con intentos de demostración.

También existen argumentaciones que se insinúan bajo formas de organización para las que se han establecido vínculos formales de validez. Aparecen bajo la forma de razonamiento por absurdo, silogismos, de disyunción de casos, etc..; así, la organización de la argumentación según un modelo lógico no podría, por tanto, ser considerado como un criterio necesario para que exista una argumentación.

Esta diferencias entre argumentación y demostración las expresa Grize: “Es sencillo construir un cuerpo de demostraciones, pero no es nada evidente construir uno de argumentaciones”.

Con estas diferencias, ¿Es posible decidir si un discurso es argumentativo ó demostrativo? ¿Podría buscarse en la presencia de los *conectivos* un criterio que permitiera identificar la presencia de una argumentación?.

Como sabemos, todo lenguaje común incluye términos que permiten indicar una relación “lógica” entre las proposiciones: son los *conectivos*. Así, la elección de estos, cuyo uso sería inherente a toda técnica de razonamiento, permitiría determinar si se está o no frente a una argumentación. Vamos a distinguir tres tipos de conectivos:

- Los **conectivos combinatorios**, son aquellos que integran más proposiciones en una sola superposición. La relación indicada por estos conectivos no se basa en el contenido de las proposiciones ligadas, sino en la aserción de ciertas parejas de valores, respectivos, de verdad posibles. (El “si..., entonces, la “o” exclusiva e inclusiva, la “y” , son conectivos que tienen, en matemáticas, un uso puramente combinatorio).

- Los **conectivos argumentativos**, son aquellos que ponen en relación dos proposiciones, pero que no las integran en una superproposición. La relación indicada se basa en las “orientaciones” respectivamente inducidas hacia el enunciado-objeto por el contenido de cada una de las proposiciones ligadas. Los conectivos de "co-orientación" ("también") y los conectivos de "contraorientación" ("pero", "sin embargo", "aunque", etc.).

- Los **conectivos organizativos**, son aquellos que indican el estatuto de una proposición en relación a otras proposiciones, determinan su lugar en la organización del discurso ("ahora", "porque", "en consecuencia", "por lo tanto"). Observar que la indicación del estatuto de las proposiciones puede hacerse igualmente sin recurrir a conectivos. Es suficiente usar construcciones del tipo "se sabe que", "es necesario que", "concluyo que", que requieren proposiciones para ser completadas. Esta segunda forma de indicar el estatuto, que evita los conectivos, es la manera más natural y espontánea por una simple razón: el estatuto de una proposición depende del valor epistémico que se le reconoce.

Esta categorización no es, evidentemente, una categorización de las palabras o de las expresiones empleadas, pueden encontrarse algunas que funcionen como conectivos combinatorios y argumentativos: "si... entonces", "o", etc. Además, en determinadas argumentaciones, puede no aparecer ningún conectivo; todo depende del nivel de organización de la argumentación.

6. COMPARACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DE EXPANSIÓN DISCURSIVA DE UNA DEMOSTRACIÓN Y UNA ARGUMENTACIÓN

	Demostración	**Argumentación**
I. Focalización del discurso	Un enunciado-objetivo siempre formulado de manera explícita.	Un enunciado-objetivo que puede ser implícito.
II. Resultado que se busca en la producción del discurso.	Modificaciones del valor epistémico del enunciado-objetivo (en el sentido de su necesidad) y determinación de su verdad.	Modificación del valor epistémico del enunciado-objetivo para sí mismos o para un interlocutor.
III. Aspectos de las proposiciones que se toman en consideración en el discurso.	Estatuto operativo determinado a partir del estatuto teórico fijado previamente.	Los términos intencionales y extensivos que constituyen el contenido.
IV. Consideraciones de las relaciones de oposición, intención o extensión entre las proposiciones	Limitada a la contradicción en el razonamiento por absurdo (producción y rechazo de una contratesis).	Recurrencia a una red de oposición que se explícita de manera parcial para poner en relación razones en *pro* y en *contra*.
V. Indicaciones de las relaciones entre las proposiciones	Libre, dado que las relaciones se determinan por los respectivos estatutos de las proposiciones. Tres posibilidades: nada, construcciones que se deben completar, conectivos organizativos.	A través de los conectivos argumentativos.
VI. Continuidad del discurso.	Asegurada localmente por el reciclaje de las conclusiones intermedias.	Asegurada global y temáticamente por el mantenimiento de la referencia a algunos objetos en las proposiciones sucesivas.

La presencia o ausencia de la mayor parte de estas características permite determinar si un discurso es o no un discurso argumentativo.

7. CONSIDERACIONES EDUCATIVAS

De lo expuesto hasta ahora, no resulta inmediato extraer consecuencias directas para el plano educativo, pero dado que uno de los objetivos de la formación matemática es fomentar en los alumnos la capacidad de razonar matemáticamente, varias cuestiones surgen en este punto.

No cabe duda que el entender y dominar la demostración de un resultado matemático ayuda mucho en la comprensión de éste, y puede facilitar su empleo como herramienta en el estudio de otras proposiciones. Pero no puede sacarse partido a una demostración si realmente no se entiende qué es, cual es su papel, y en donde reside su fuerza; y esto es algo que los alumnos no tienen claro, y lo que puede ser peor, es algo de lo que el docente no es consciente.

El popular problema del ajuste a un programa educativo por parte del profesor, no facilita el que éste se involucre en intentar cambiar este aspecto, y tampoco quizás le haga pensar sobre ello. Y tampoco es sencillo transmitir la conciencia del peso que tiene la demostración en matemáticas.

Si estas consideraciones son tan habituales en el aula, ¿Por qué frenar los intentos de los alumnos de justificar a su modo los resultados matemáticos, y no tratar de modelarlos y sacarles el mayor rendimiento posible? ¿Acaso no es mejor una aproximación más o menos fundada, pero asumida y entendida, que una serie de argumentos bien formalizados pero carentes de significado?

Es posible que el trabajar con argumentaciones, en el sentido que se ha estudiado en el documento, pueda unir esos dos extremos, y otorgue a los alumnos la posibilidad de acercarse a la forma de razonamiento matemático, sin perderse entre las dificultades que presenta el trabajar con el rigor y formalismo tradicionales de esta ciencia. Pero en ese caso, aparecen nuevas cuestiones: ¿Qué tipos de argumentaciones y cómo pueden emplearse? ¿Cuales son las propiedades que son interesantes de argumentar para los estudiantes? ¿Qué valores inculca un trabajo de este tipo?

Volviendo al campo de la geometría, encontramos que proliferan el visualizar resultados geométricos mediante ilustraciones que de algún modo *argumentan* un teorema o una propiedad relevante. Estas *justificaciones*, ¿aportan algo positivo al alumno, ó por el contrario, desvirtúan las concepciones que este debe tener acerca de la prueba matemática?

La noción de razonamiento en niveles elementales no plantea problemas en sí misma, y los profesores de matemáticas identifican bien los errores que los estudiantes cometen al respecto. En general, el estudio de lo que es el razonamiento matemático no llama la atención de los educadores (Pluvinage, 1996). No sólo su enseñanza queda reducida, sino que es prácticamente nula; el aprendizaje del razonamiento se concibe como resultado del aprendizaje de contenidos matemáticos.

Por otro lado, la concepción de formalismo que tienen un gran número de profesores, les hace valorar más el rigor en el tratamiento de los conceptos e ideas matemáticas, que el procedimiento utilizado en la prueba o demostración que los estudiantes plantean.

Se puede constatar una reciente preocupación por incluir en las distintos programas educativos actuales una parte especifica relacionada con la demostración. Por ejemplo, en el borrador de los estándares para el 2000 del NCTM, uno de estos estándares se llama "Razonamiento y prueba", en el que explícitamente se señala:

Los programas de instrucción matemática deberían centrarse en el aprendizaje de razonamientos y la construcción de pruebas como parte de la comprensión matemática de forma que todos los estudiantes:

- *Reconozcan el razonamiento y la prueba como una poderosa y esencial parte de las matemáticas.*
- *Realicen e investiguen conjeturas matemáticas.*
- *Desarrollen y evalúen los argumentos y pruebas matemáticas.*
- *Seleccionar y usar los tipos de razonamiento y métodos de demostración apropiados.*

Si bien no constituye una sección entera, en el currículo del área de matemáticas de España[1] existen también orientaciones metodológicas acerca del razonamiento.

Estas y otras muestras, pueden darnos una idea de la importancia que tiene para el aprendizaje de las matemáticas la argumentación, la explicación y la demostración.

8. DEMOSTRACIONES CON EL USO DE LA TECNOLOGÍA

Sin duda, el empleo de las nuevas tecnologías obliga a profundos cambios en el campo educativo, tanto a nivel de objetivos, contenidos, metodología, así como en las actividades de evaluación. Pero ¿en qué punto el uso de sistemas computacionales en la enseñanza facilita ó mejora el realizar demostraciones matemáticas?.

Una de las ramas en las que más expectativas de actividades y experiencias se han abierto has sido en la geometría, debido fundamentalmente a programas informáticos como el CABRI. Con este software, se pueden modelizar situaciones, representando figuras geométricas, y experimentando y descubriendo propiedades, gracias a la posibilidad de manipular y ejecutar dichas figuras. CABRI es un micromundo de exploración que nos hace perceptual aquello que es complejo para nuestra mente.

Sin embargo, y a pesar de las inmensas posibilidades que ofrece este programa, le han surgido muchas críticas en relación a que desalienta a los alumnos a demostrar, pues éstos quedan satisfechos al comprobar perceptivamente una propiedad geométrica: “Si es

---

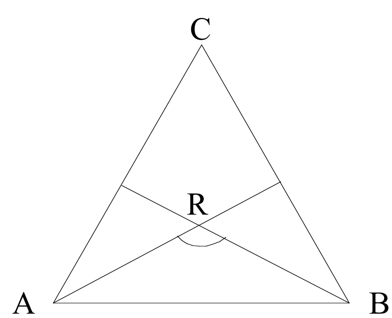
[1] BOJA n^{0}56, del 20 de junio de 1992.

cierto al variar la figura, seguramente será cierto siempre”. Aunque más bien, quizás los alumnos no demuestren porque el profesor no se lo pide (L.S.D. 2, 1994).

Esta crítica puede llevar a concebir tareas en las que la demostración pueda plantearse en CABRI, para las que con lápiz y papel se necesitaría de la exploración de muchos dibujos. Se trata por ejemplo de problemas de optimización ó de la inexistencia de figuras verificando determinadas propiedades como la siguiente:

¿Es posible hallar un triángulo en el que dos de sus bisectrices sean perpendiculares?

Si representamos esta construcción en CABRI, medimos el ángulo de corte, y variamos el triángulo, observamos que no parece posible: la única forma de obtener 90º en ese ángulo es degenerando el triángulo a una recta. ¿Está demostrado, ó necesitamos el siguiente razonamiento?



Si $\hat{R} = 90^o \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^o \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^o$, entonces no tenemos un triángulo.

El entorno CABRI permite visualizar y ejecutar propiedades que de otra forma serían prácticamente imposibles, y nos empuja a realizar conjeturas acerca de relaciones que verifican las figuras representadas; pero nosotros mantenemos la tesis que no se pueden realizar demostraciones matemáticas rigurosas. No queremos decir tampoco con esto, que sean este tipo de razonamientos “tradicionales” los que tengan que llevarse necesariamente al aula.

Donde no estamos tan de acuerdo los autores es en que las computadoras constituyen una herramienta que permite justificar determinados resultados matemáticos, aunque esto ya es otra historia, y esa discusión bien merecería un análisis posterior. No obstante, relatamos brevemente un ejemplo de esto que decimos: el Problema de los Cuatro Colores (Singh, 1998).

> “ Una tarde de Octubre de 1852, en Inglaterra, el matemático Francis Guthrie se encontró con un acertijo en apariencia trivial que no podía resolver. Sólo quería saber el número mínimo de colores que se requerían para colorear cualquier mapa concebible de tal manera que ninguna región tuviese frontera con otra del mismo color. Más concretamente, y después de algunos ensayos, quería saber si cuatro colores eran suficientes para todos los mapas.
>
> Frustrado e intrigado, Guthrie comentó el problema a su hermano menor, Frederick, estudiante del University College, en Londres. A su vez, este planteo el problema a su profesor, el eminente Augustus De Morgan, quien poco tiempo después escribió al gran matemático y físico irlandés Willian Rowan Hamilton.
>
> Hamilton no fue capaz de inventar un mapa que necesitase cinco colores, pero tampoco pudo demostrar que tal mapa no existiera. Las noticias sobre el problema se extendieron rápidamente a través de Europa, pero éste resistió con fuerza todo los ataques, probando ser engañosamente difícil.
>
> Ya en 1879, el matemático británico Alfred Kempe publicó un artículo en el American Journal of Mathematics en el que aseguraba haber resuelto el enigma de Guthrie. Se le eligió miembro de la Royal Society y poco tiempo después fue armado caballero por su contribución a las

matemáticas. Pero en 1890, Percy John Heawood encontró una equivocación en los fundamentos de la prueba de Kempe, y gracias a esto, fue capaz de demostrar que el número máximo de colores necesarios era cuatro o cinco, pero no más alto.

Cabe señalar que gracias al estudio de este tipo de problemas se empezó a armar unas de la nuevas ramas de las matemáticas, la topología y grandes matemáticos posteriores realizaron aproximaciones del problema basándose en esta nueva especialidad: llegó a demostrarse que con cuatro colores puede pintarse un mapa que contenga hasta un máximo de 39 regiones (Ore y Stemple en 1970). Pero en 1975, el matemático y escritor Martin Gardner publico un mapa en la revista Scientific American que requería cinco colores. (El mapa es el que mostramos en la página 24 del documento, e invitamos al lector a comprobar el error de Gardner)

En 1976, dos matemáticos de la Universidad de Illinois Wolfgang Haken y Kenneth Appel, desarrollaron una nueva técnica que revolucionó el concepto de demostración matemática. Consiguieron reducir el estudio a una base de 1482 mapas con los que se generaban cualquier otro, pero tratar ese número de mapas con un computador ocuparía más de un siglo. Con lo que Haken y Appel no contaron fue con lo siguiente (en palabras de ellos):

El programa nos sorprendió. Al principio comprobábamos sus argumentos a mano de manera que pudiéramos predecir el curso que seguiría en cualquier situación; pero ahora, de repente, empezó a actuar como una máquina de jugar al ajedrez. Creaba estrategias complicadas basadas en todos los trucos que se le habían "enseñado", y a menudo tales enfoques eran mucho más hábiles que los que nosotros hubiéramos intentado. Así que empezó a enseñarnos formas de avanzar que nunca *habríamos esperado. En cierto sentido, había superado a sus creadores en algunos aspectos tanto de las partes "intelectuales" como mecánicas del problema.*

En Junio de 1976, gracias a 1200 horas de ordenador, Haken y Appel anunciaron que los 1482 mapas habían sido analizados y ninguno de ellos requerían más de cuatro colores."

Dado que el hilo conductor de este trabajo es el análisis de diferentes formas de razonamiento, y más concretamente de la argumentación y la demostración, nos preguntamos si cabe la posibilidad de argumentar, aunque no demostrar, determinadas propiedades geométricas.

Tenemos por ejemplo, la siguiente versión del Teorema de Simson (Recio, 1998):

Los tres pies de las perpendiculares desde un punto del plano a los lados de un triángulo, están alineados si y sólo si, el punto está en el círculo que circunscribe a dicho triángulo.

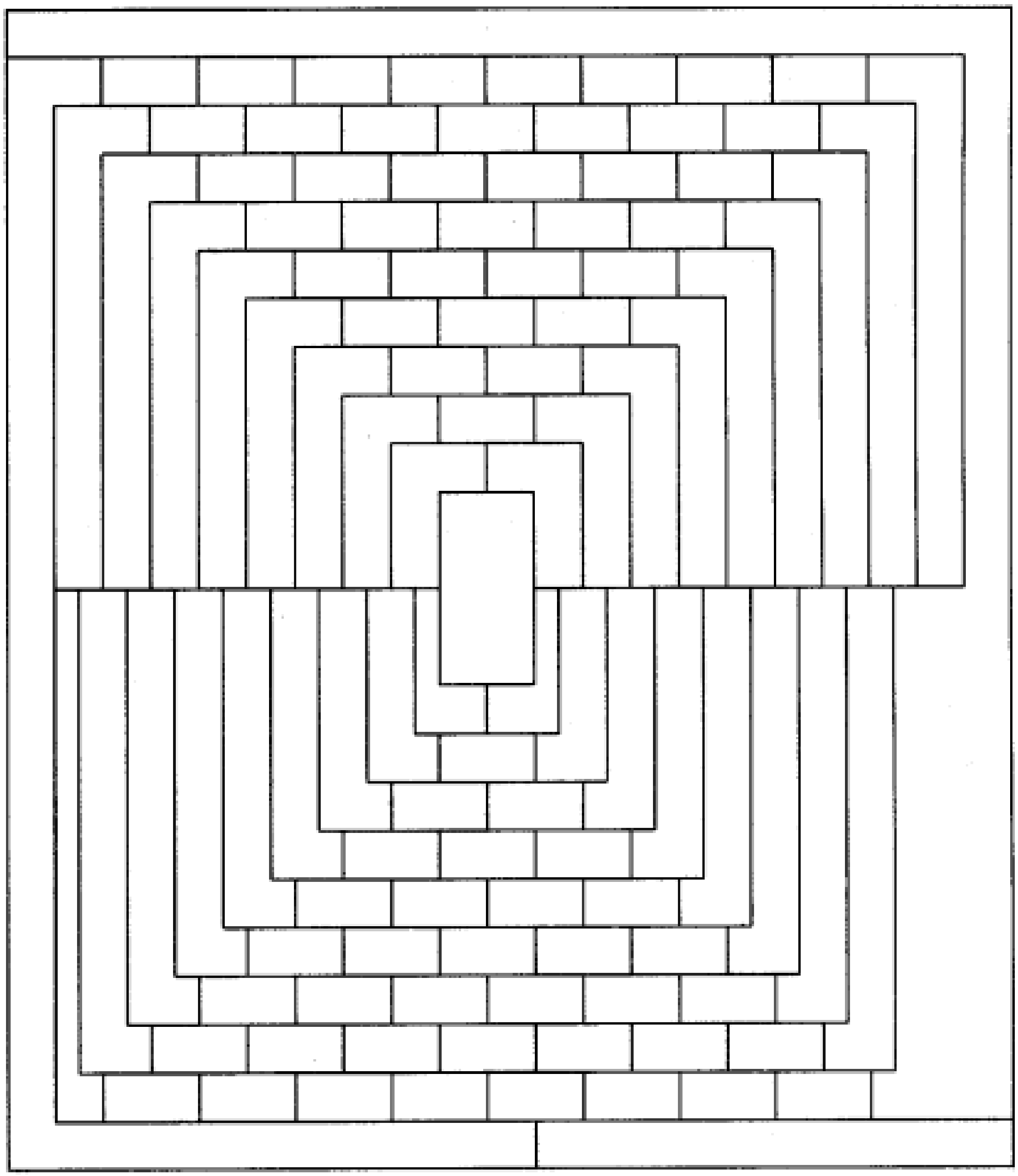
Representando esta situación en CABRI, podemos afirmar las siguientes premisas, en donde P designa al punto de partida:

a) Si el punto P se mueve en la circunferencia citada, los tres pies de las perpendiculares. están alineados. (Condición suficiente del teorema).
b) Si P está en el interior del triángulo, cada uno de los pies de las pp está en un lado del triángulo, por lo que no pueden ser colineales.
c) Si P está en el triángulo, los pies tampoco están alineados, a no ser que P coincida con uno de los vértices, en cuyo caso, 2 de los pies de las perpendiculares. también coinciden con dicho vértice, y por lo tanto, los tres pies están alineados.
d) En la componente conexa no acotada del plano que determina el triángulo, existen localizaciones de P en las que los pies quedan alineados, pero si alejo P lo suficiente del triángulo, como para que los tres pies salgan de los lados del mismo, tampoco

estarán alineados, pues se mueven en rectas de distinta pendiente que únicamente se cortan dos a dos en los vértices del triángulo. Luego P sólo puede moverse en un extremo del triángulo.

e) Calculamos algunos puntos notables del triángulo, a saber, el ortocentro, el baricentro, el circuncentro y el incentro (respectivamente, intersección de alturas, medianas, mediatríces y bisectríces), y medimos la distancia de P a cada uno de ellos en lugares en los que los pies estén alineados, y esa distancia resulta prácticamente constante en el caso del circuncentro, que es el centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo, entonces generalizamos

Estas afirmaciones, ¿constituyen una argumentación del teorema o sólo una explicación?



Mapa propuesto por Martin Gardner para rebatir el Problema de los Cuatro Colores.

BIBLIOGRAFÍA

[1]. ACUÑA C.M. (1996), Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior. *Investigaciones en Matemática Educativa, Didáctica: XX Aniversario*, pp. 73-109, México D.F.: Iberoamérica.

[2]. ALSINA, C., FORTUNY, J.M., PEREZ, R. (1997) **¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO**, Madrid: Síntesis.

[3]. DAVIS P.J., HERSH R., MARCHISOTTO E.A. (1995) **The Mathematical Experience**, Boston: Birkhäuser.

[4]. DUVAL, R. (1999) **Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?**, México D.F.: Iberoamérica.

[5]. DUVAL, R. (1995) **Sémiosis et Pensée Humaine** Bern: Peter Lang.

[6]. FRANÇOIS, P. (1996) **Diferentes formas de razonamiento matemático** en *Investigaciones en Matemática Educativa, Didáctica: XX Aniversario*, pp. 77-91, México D.F.: Iberoamérica.

[7]. JUNTA DE ANDALUCÍA (1992) **B.O.J.A. n^{0}56 Anexo II relativo al curriculum del área de matemáticas***,* Sevilla: J.A.

[8]. L.S.D. 2, IMAG, UJF (1994) **Cabri-classe: Aprendre la géométrie avec un logiciel**, Argenteuil: Archimède.

[9]. MAIER, H. (1999) **El conflicto para los alumnos entre lenguaje matemático y lenguaje común**, México D.F.: Iberoamérica.

[10]. NCTM (1998), **Principles and Standards for School Mathematics: Discusion Draft**, Virginia: NCTM.

[11]. RECIO, T. (1998) **Cálculo Simbólico y Geométrico**, Madrid: Síntesis.

[12]. SINGH, S (1998) **El Enigma de Fermat**, Barcelona: Planeta.