Artículo de sección
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 12, N^o 1. Agosto – Febrero 2012.

Factorización de polinomios.

Sandra Schmidt Q.
sschmidt@tec.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

1.1 Introducción

Se presenta aquí la factorización de polinomios, concentrándose especialmente en factorización de polinomios utilizando las fórmulas notables y llegando por medio de ellas a la fórmula general para factorizar polinomios de grado dos.

Los polinomios son expresiones algebraicas donde se combinan monomios a través de la adición y sustracción. Pero, qué cosa son los monomios? Pues bien, son expresiones donde se combinan variables, representadas por letras de nuestro abecedario y números reales. Sin embargo, esta combinación no es al azar. Para que sea monomio los exponentes de las variables deben ser positivos y es el producto quien une variables y números reales.

Según lo que se define anteriormente como monomio, responde: de las expresiones siguientes cuáles corresponden a monomios?

1. $-3xy$ 2. $\sqrt{5}x^2+3x$ 3. $\dfrac{4x^2}{y}$

4. $4a^{\frac{1}{3}}$ 5. $\sqrt{2}ab$ 6. $\dfrac{-3a^2b}{4}$

La combinación de dos monomios por adición o sustracción se le suele llamar binomio. Si se combinan tres monomios por adición o sustracción se les llama trinomios. Bueno, el asunto de los nombres se puede simplificar si les llamamos simplemente polinomios.

Ahora, otra vez responde según la información anterior: de las expresiones siguientes cuáles corresponden a polinomios?

1. $-3z^3-8z+y$ 2. $\sqrt{5}x^2+3x-4$ 3. $\dfrac{2}{x}-3y$

4. $\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{2}}+x^{-2}$ 5. $2x-3\sqrt{z}$ 6. $5b^2-3ay^2-8y$

Podemos tener polinomios en varias variables o polinomios en una variable. Trataremos solamente a los polinomios en una variable. Además, muchas veces para simplificar el lenguaje escrito les ponemos nombres tales como: $p(x), q(x), r(x)$, etcétera, con minúscula y otras con mayúscula: $P(x),\ Q(x),\ R(x)$.

Ejemplos de lo anterior son:

a) $P(x) = \sqrt{5}x^2 + 3x - 4$

b) $Q(x) = 3x^5 - 1$

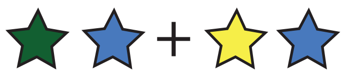
c) $q(x) = 2x^4 + 3x^2 - \dfrac{1}{2}$.

Por ahora nos interesa la factorización de polinomios de grado dos. Estudiaremos esto por casos. Por cierto, qué significa factorizar un polinomio?

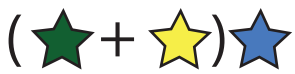
Factorizar un polinomio es descomponerlo en dos o más polinomios llamados factores, de tal modo que al multiplicarlos entre sí se obtenga el polinomio original.

1.2 Factorización por factor común

Observa lo que hay en común en la representación siguiente, toma en cuenta que las estrellas representan valores reales:



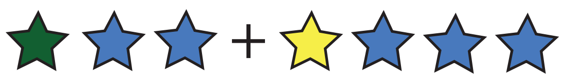
La estrella azul se repite en ambos sumandos, por lo que podemos escribir la expresión anterior como sigue:



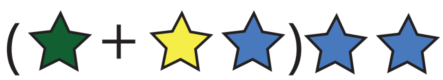
Esta visualización nos ayuda a recordar la propiedad distributiva de la adición con respecto a la multiplicación. La cual establece que:

$$ac + bc = (a + b)\,c$$

Veamos otros ejemplos.



La estrella azul se repite, por lo menos, dos veces en cada sumando, así podemos representar esa expresión, nuevamente por la propiedad distributiva de la adición con respecto a la multiplicación, de la manera siguiente:



Uno más:

Luego tendríamos:

Ahora, utilizando la representación simbólica del álgebra, considera que la ilustración anterior, figura (3) y figura(4), se puede expresar así:

$$9x^2 - 12x^3 = (9 - 12x)\,x^2$$

Esto que hemos estado haciendo corresponde a la factorización por factor común. Ahora respondamos la siguiente pregunta: por qué también se cumple que $9x^2 - 12x^3 = x^2\,(9 - 12x)$?. Observemos ahora las representaciones de la figura (5) y la figura (6), debes tener que:

$$9x^3 - 12x^4 + 16x^5 = \left(9 - 12x + 16x^2\right)x^3 \qquad \textbf{(I)}$$

Podríamos entonces tener la regla siguiente:

Factorizando por factor común significa: que debe haber una variable que se repite en todos los sumandos del polinomio y el factor común será aquella variable común con el menor exponente.

Ejemplos:

a) $4a^3 - 2a^2y + 6a = \;2a(2a^2) - 2a(ay) + 2a(3) = 2a(2a^2 - ay + 3)$

b) $\frac{5}{3}a^3 + \frac{4}{9}a^2b^2 - \frac{7}{6}ab^3 = \frac{1}{3}ab(5a^2) + \frac{1}{3}ab\left(\frac{4}{3}ab\right) - \frac{1}{3}ab\left(\frac{7}{2}b^2\right)$

$= \frac{1}{3}ab\left(5a^2 + \frac{4}{3}ab - \frac{7}{2}b^2\right)$

c) $x(y - z) - w(z - y) = -x(z - y) - w(z - y) = (z - y)(-x - w)$

La factorización de polinomios puede realizarse combinando diferentes tipos de factorización. El ejemplo **(I)** nos permitió factorizar por factor común pero, será posible factorizar el polinomio de grado dos que se encuentra dentro de los paréntesis? La respuesta es sí.

1.3 Factorización por fórmulas notables o productos notables

Antes de seguir adelante recordemos unas fórmulas, que generalmente llamamos fórmulas notables o productos notables. Aplicando la distributividad puedes verificar los productos.

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

Continuemos la factorización por fórmulas notables o productos notables. Una primera factorización que se presenta en **(I)** es:

$$P(x) = 9x^3 - 24x^4 + 16x^5 = \left(9 - 24x + 16x^2\right)x^3$$

Vimos que corresponde a la **factorización por factor común**, sin embargo, no es una factorización completa. Dentro del paréntesis tenemos un trinomio de grado dos, al cual llamaremos $R(x) = 9 - 24x + 16x^2$.

Éste se parece a:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b)$$

pues

$$R(x) = 9 - 12x + 16x^2 = 3^2 - 2(3)(4x) + (4x)^2$$

por lo tanto se tiene que:

$$R(x) = (3-4x)(3-4x) = (3-4x)^2$$

Ahora podemos decir que $P(x) = 9x^3 - 24x^4 + 16x^5$ se factoriza completamente como:

$$P(x) = (3-4x)(3-4x)x^3$$

Factorizar utilizando fórmulas notables o productos notables es en realidad reconocer la forma de cada uno de los componentes de un trinomio de grado dos. Más adelante veremos que estos componentes no están completos por lo que se hace necesario recurrir a otros métodos de factorización.

Ejemplos:

a) $R(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 = (2x-1)(2x-1) = (2x-1)^2$

b) $Q(x) = x^2 - 22x + 121 = x^2 - 2(x)(11) + (11)^2$

1.4 Factorización por agrupación

Algunas veces tenemos polinomios que tienen cuatro términos, como por ejemplo:

$$Q(x) = 18x^3 + 12x^2 - 15x - 10$$

El polinomio no tiene factor común, sin embargo en algunos casos, se pueden hacer grupos, en este caso haremos dos grupos:

$$18x^3+12x^2 \quad \text{y} \quad -15x-10$$

entonces podemos realizar para cada una de las expresiones una factorización por factor común:

$$6x^2(3x+2) \quad \text{y} \quad -5(3x+2)$$

así:

$$Q(x)=6x^2(3x+2)-5(3x+2)=(3x+2)(6x^2-5)$$

$$Q(x)=6x^2\,\underbrace{(3x+2)}-5\,\underbrace{(3x+2)}$$

$$Q(x)=(3x+2)\,(6x^2-5)$$

Entonces como el nombre lo dice, factorización por agrupación significa hacer grupos, pero ten cuidado, no es cualquier tipo de grupos.

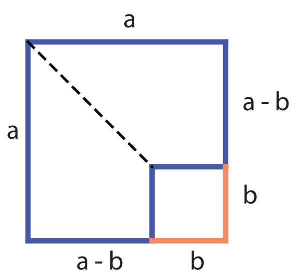
Bueno hasta aquí tenemos una factorización para $Q(x)$. Ahora, la pregunta es si es la factorización completa de $Q(x)$, la respuesta es no. El factor de segundo grado del polinomio es factorizable, sin embargo, antes de ver su factorización echemos una mirada a la propiedad siguiente:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

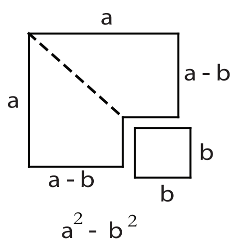
Ésta se conoce generalmente como otro de los productos notables o fórmulas notables. Una justificación para esta propiedad se muestra a continuación.

Considere las representaciones siguientes:

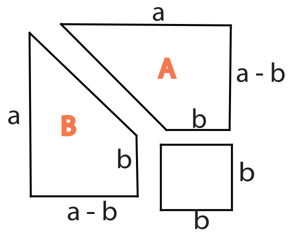
Dibujemos un cuadrado cuyo lado mide dentro de un cuadrado donde la medida del lado es a (como lo muestra la figura de la derecha) cuya área es a^2.



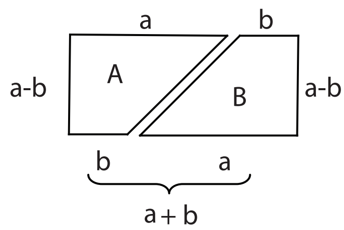
Ahora, si recortamos un cuadrado de lado b, el área de la figura restante será a^2-b^2. (8)



Así, al juntar las secciones A y B de tal forma que obtengamos ...



... un rectángulo cuyos lados tienen medidas $a+b$ y $a-b$ su área estará dada por $(a+b)\,(a-b)$. (9)



Por último si observas lo expuesto en las figuras (8) y (9) podemos concluir:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b) \qquad \textbf{(II)}$$

Otra manera desde el punto de vista algebraico, de visualizar esta propiedad es recurriendo a la distributividad, partiendo de la derecha de **(II)** :

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Ahora, volviendo al polinomio en (10), es decir, $Q(x) = (3x+2)(6x^2-5)$ tenemos que $6 = (\sqrt{6})^2$ y $5 = (\sqrt{5})^2$ entonces:

$$(6x^2-5) = (\sqrt{6}x)^2 - (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{6}x - \sqrt{5})(\sqrt{6}x + \sqrt{5})$$

A la última factorización se le suele llamar factorización por diferencia de cuadrados. Podemos ver entonces que la factorización completa de $Q(x)$ es:

$$Q(x) = (3x+2)(\sqrt{6}x - \sqrt{5})(\sqrt{6}x + \sqrt{5})$$

1.5 Factorización de un polinomio de segundo grado en una variable

Hay polinomios que tienen características particulares como los de grado dos, que pueden ser factorizados utilizando otras técnicas además de las que ya hemos visto. Veremos en esta sección dos maneras una por inspección y la otra llamada factorización por fórmula general.

1.6 Factorización por inspección

La factorización de un polinomio de segundo grado en una variable en el conjunto de los números reales puede realizarse, cuando es posible, utilizando la inspección, en $P(x) = x^2 + bx + c$ y $Q(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a,\ b,\ c$ representan números reales.

Así, sea $P(x) = x^2 + bx + c$, con $b,\ c\ \in\ \mathbb{R}$. Note que si desarrollamos el producto $P(x) = (x+A)(x+B) = x^2 + (A+B)x + A \cdot B$, nos lleva a la regla siguiente:

Si el polinomio $P(x)$ se factoriza entonces la suma de A y B es igual a b y el producto de A y B es igual a c.

Veamos como funciona,

a) Sea $P(x) = x^2 + 7x + 12$.

Observe que las constantes 7 y 12 son positivas, por lo que A y B, son ambos positivos. Las posibilidades de 7 y 12 son como se muestra en la tabla siguiente:

12	$A \cdot B$	$4 \cdot 3$	$2 \cdot 6$	$1 \cdot 12$
7	$A + B$	$4 + 3$	$1 + 6$	$1 + 6$

Esta es nuestra escogencia

Por lo tanto $P(x) = (x+4)(x+3)$

b) Sea $Q(x) = x^2 + 5x - 24$.

Observe que las constantes 5 y -24, una es positiva y otra negativa por lo que: A es positivo y mayor que B , el cual debe ser negativo. Hagamos una tabla:

-24	$A \cdot B$	$6 \cdot -4$	$8 \cdot -3$	$12 \cdot\ -2$
5	$A + B$	$6 + (-4)$	$8 + (-3)$	$12 + (-2)$

Esta es nuestra escogencia

Por lo tanto $P(x) = (x+8)(x-3)$

c) Sea $M(x) = x^2 - 3x - 10$.

Observe que las constantes -3 y -10 ambas negativas por lo que: A es positivo y menor que B ,en valor absoluto, el cual debe ser negativo. Hagamos una tabla:

-10	$A\cdot B$	$2\cdot -5$	$1\cdot -10$
-3	$A+B$	$\underbrace{2+(-5)}$	$1+(-10)$

$\boxed{\text{Esta es nuestra escogencia}}$

Por lo tanto $P(x) = (x+2)(x-5)$

d) Sea $M(x) = x^2 - 10x + 21$.

Observe que las constantes y una es negativa y otra positiva por lo que: es positivo y menor que , el cual debe ser negativo. Hagamos una tabla:

21	$A\cdot B$	$-7\cdot -3$	$-1\cdot -21$
-10	$A+B$	$\underbrace{-7+(-3)}$	$-1+(-21)$

$\boxed{\text{Esta es nuestra escogencia}}$

Por lo tanto $M(x) = (x-7)(x-3)$

En general, realizar la inspección en el caso , $P(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b,\ c\ \in\ \mathbb{R}$
no es práctico, pues consiste en realizar una serie de pruebas hasta encontrar los valores que corresponden. Este caso no se presenta aquí. Sin embargo, vamos a estudiar un procedimiento mucho menos complicado y que llamaremos factorización por fórmula general.

1.7 Factorización por fórmula general

Estudiar la fórmula general requiere conocer un aspecto importante que se relaciona con la factorización de polinomios. Éste es el Teorema del factor.

Teorema 1.1 (Teorema del Factor) *Sea $c \in \mathbb{R}$ y $P(x)$ un polinomio entonces $P(c) = 0$ si y solo sí $(x-c)$ es un factor de $P(x)$.*

Un polinomio de grado dos en forma general es: $P(x) = ax^2 + bx + c$, con $a,\ b,\ c\ \in\ \mathbb{R}$. Factorizarlo implica utilizar alguna de las fórmulas notables o productos notables que mencionamos anteriormente, así:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left[x^2+2(x)\left(\frac{b}{2a}\right)+\frac{c}{a}\right] && \boxed{\text{completando cuadrados}}\\
& && \text{Observe que}\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\right)^2\right] && \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+2(x)\left(\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\right)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&= a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}
$$

Observa que la factorización de $P(x)=ax^2+bx+c$ ya está hecha, por lo que sus ceros son:

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{III}$$

lo cual conocemos como la **fórmula general** para factorizar un polinomio de grado dos en el conjunto de los números reales. Formalizando lo anterior tenemos,

Teorema 1.2 *Sea $P(x)=ax^2+bx+c$, con $a,\ b,\ c\ \in\ \mathbb{R}$ y sea $\Delta=b^2-4ac$, llamado discriminante,*

a) *Si $\Delta\ >0$ entonces $P(x)=ax^2+bx+c$ posee dos ceros distintos: $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y por el teorema del factor se tiene que:*

$$P(x)=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

b) *Si $\Delta\ =0$ entonces $P(x)$ posee dos ceros iguales, $x=-\dfrac{b}{2a}$ y por el teorema del factor se tiene que:*

$$P(x)=a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)\left(x-\frac{-b}{2a}\right).$$

c) *Si $\Delta<0$ entonces $P(x)$ no posee ceros en el conjunto de los números reales, por lo que no sería posible factorizarlo en este conjunto.*

Algunos ejemplos:

Factoriza en el conjunto de los números reales los polinomios siguientes.

a. $P(x) = 3x^2 - 4x - 1$

Como $\Delta = (-4)^2 - 4(3)(-1) = 28$ entonces tiene dos ceros distintos, a saber:

$$x = \frac{-(-4)+\sqrt{28}}{2(3)} = \frac{4+\sqrt{7\cdot 4}}{2(3)} = \frac{4+2\sqrt{7}}{2(3)} = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \text{ y}$$
$$x = \frac{-(-4)+\sqrt{28}}{2(3)} = \frac{4-\sqrt{7\cdot 4}}{2(3)} = \frac{4-2\sqrt{7}}{2(3)} = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$$

Luego $P(x) = 3\left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$.

b. $Q(x) = 4x^2 + 4x + 1$

Como $\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$ entonces tiene dos ceros iguales, a saber: $x = \dfrac{-(4)}{2(4)} = \dfrac{-1}{2}$

Luego $Q(x) = 4\left(x - \frac{-1}{2}\right)\left(x - \frac{-1}{2}\right) = (2x+2)(2x+2)$.

c. $R(x) = -2x^2 + 2x - 6$

Como $\Delta = (2)^2 - 4(-2)(-6) = -44$ entonces no es posible factorizar a $R(x)$ en el conjunto de los números reales.

Bibliografía

[1] Swokowski,Earl. *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoaméricana. 2da edición. México. 1989.

[2] Spiegel, Murray. *Theory and Problems of College Algebra.* McGraw-Hill; 2da edition. 1997.