Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 11, Nº 1. Agosto − Diciembre 2010.

El método de Discretización en Varias Variables

José Rosales Ortega
rosalesortega@gmail.com
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Universidad de Costa Rica

Resumen.

El artículo presenta un método, de naturaleza indirecta, que puede ayudar a probar ciertos resultados que involucran sucesiones y funciones continuas que frecuentemente aparecen en la topología de R^n.

Palabras claves: sucesiones, continuidad uniforme, conjunto abierto, independencia lineal.

Abstract.

The article presents a method of indirect nature. This method can be used to prove certain results involving sequences and continuous functions in the topology of $\mathbb{R}^n$.

KeyWords: sequences, uniform continuity, open set, linear independency.

1.1 Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo el desarrollo de una estrategia didáctica la cual contribuya en el aprendizaje significativo por parte de los estudiantes de cursos de topología en $\mathbb{R}^n$.

He notado, al impartir cursos que tienen como requisito un conocimiento de la topología de $\mathbb{R}^n$, que una buena parte de los estudiantes, en tales cursos, presentan como deficiencia un mal uso del lenguaje matemático a nivel elemental. Con lo anterior quiero decir que algunos estudiantes de sexto y séptimo semestre no pueden negar, matemáticamente hablando, una proposición dada, y que en el caso en que logren negar correctamente una proposición matemática, son incapaces de lograr el objetivo que persigue el ejercicio, o problema al cual se enfrentan. Se supone que el mal uso se observa en conceptos que están en los contenidos de los cursos básicos de análisis.

Uno de tales conceptos es el de conjunto abierto. En términos generales, para definir un conjunto abierto primero se debe definir qué se entiende por bola abierta con centro en un punto y radio arbitrario. Una vez aclarado el concepto de bola abierta alrededor de un punto se procede a definir un conjunto abierto como aquel que, en cada uno de sus puntos posee una cierta bola abierta la cual está completamente contenida en el conjunto en cuestión.

En términos matemáticos, una bola abierta de centro $\vec{x}$ y radio $r > 0$ es el conjunto $B(\vec{x};r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{x},\vec{y}) < r\}$. Ahora bien, un conjunto A se dice ser abierto si para todo $x \in A$ existe un $r > 0$ tal que $B(\vec{x};r) \subset A$. Para ser más exlícito, $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si, y sólo si, $(\forall \vec{x} \in A)(\exists r > 0)(B(\vec{x};r) \subset A)$.

Muchas veces se le solicita al estudiante el probar que cierto conjunto es abierto pero usando el método de reducción al absurdo. Lo que se espera del estudiante es que el niegue los existenciales y los para todo que aparecen en la definición de abierto, es decir, que el para todo lo convierta en un existe, y que el existe lo convierta en un para todo, y luego negar la inclusión. Piense el lector, que se le pregunta a un niño que responda qué significa que un número natural no sea mayor que siete. Lo que uno espera es que el niño responda que el número debe ser menor o igual que siete. Este asunto de la negación del concepto de conjunto abierto ya ha sido señalado por matemáticos de prestigio,

> A linguist would be shocked to learn that if a set is not closed this does not mean that it is open, or again that "E is dense in E" does not mean the same thing as "E is dense in itself."
> - J. E. Littlewood

Siguiendo con lo que nos ocupa, el de probar que un conjunto no es abierto, una buena parte del estudiantado no puede hacer esto, y en otros casos el estudiante empieza con situaciones erróneas, por ejemplo algunos dicen que no ser abierto significa ser cerrado. Hay que aclarar que un conjunto es cerrado, si su complemento, en términos de teoría de conjuntos, es abierto.

En resumen, hemos visto que ante la pregunta: ¿Qué significa que un conjunto no es abierto? algunos estudiantes claramente fallan en responder adecuadamente. Por otro lado, en otros tipos de ejercicios donde simplemente se le pide al estudiante mostrar que se cumple cierta propiedad que involucra existenciales, y uno que otro concepto sobre sucesiones y funciones continuas, no hay necesidad de señalar que al pedírsele al estudiante que razone por contradicción se presentan los mismos problemas de no poder negar existenciales de manera correcta. Entonces, ¿qué se puede hacer para corregir esta deficiencia que se presenta en algunos estudiantes?

Para ayudar a resolver este problema que he identificado propongo la siguiente estrategia didáctica, la cual he denominado el método de discretización. Este método se utiliza en ejercicios donde haya que negar existenciales, y en compañía de otros conceptos como el de sucesiones y de funciones continuas encuentra su utilidad máxima.

1.2 El Método de Discretización.

Los orígenes del método de discretización se basan en un resultado bastante conocido. En un curso típico de cálculo en varias variables se prueba la siguiente caracterización para funciones continuas en términos de sucesiones:

Teorema 1.1 *La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ si, y sólo si, para toda sucesión $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x}_n \to \vec{a}$ se cumple que $f(\vec{x}_k) \to f(\vec{a})$.*

La forma clásica de probar la suficiencia del teorema anterior es proceder por el método de reducción al absurdo. Este método supone negar la conclusión. En nuestro caso, supongamos que f no es continua en un punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, esto significa que existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ con $||\vec{x} - \vec{a}|| < \delta$ pero $||f(\vec{x}) - f(\vec{a})|| \geq \epsilon$. Ahora bien, para tal $\epsilon > 0$ se sigue que si δ toma el valor 1, obtenemos un elemento $\vec{x}_1$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $0 < ||\vec{x}_1 - \vec{a}|| < 1$, pero $||f(\vec{x}_1) - f(\vec{a})|| \geq \epsilon$. De la misma forma, si le damos a δ el valor $1/2$, obtenemos un elemento $\vec{x}_2$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $0 < ||\vec{x}_2 - \vec{a}|| < 1/2$, pero $||f(\vec{x}_2) - f(\vec{a})|| \geq \epsilon$. En general, si le damos a δ el valor $1/k$, obtenemos un elemento $\vec{x}_k$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $0 < ||\vec{x}_k - \vec{a}|| < 1/k$, pero $||f(\vec{x}_k) - f(\vec{a})|| \geq \epsilon$. Esto contradice la hipótesis dada ya que hemos construido una sucesión $\vec{x}_k$ que converge al punto $\vec{a}$, pero cuya sucesión de imágenes $f(\vec{x}_k)$ no converge a $f(\vec{a})$. Por lo tanto, lo que asumimos originalmente debe ser falso, es decir que f sí es continua en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

En la prueba del teorema anterior hemos procedido a darle valores discretos a δ, tales valores son $1, 1/2, 1/3, \ldots$. Cada vez que nos encontremos en una tal situación en la que podemos darle valores discretos a cierta variable, como en el caso anterior, estaremos haciendo uso del llamado método de discretización. En lo que sigue expondremos varios ejemplos, de naturaleza distinta, donde el método de discretización puede ser utilizado con éxito.

EJEMPLO 1.1 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal inyectiva. Muestre que existe $c > 0$ tal que

$$||T(\vec{x})|| \geq c||\vec{x}||,$$

para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Vamos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos que para todo $c > 0$ existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $||T(\vec{x})|| < c||\vec{x}||$.

Dándole valores a c en el conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, \}$ obtenemos una sucesión de puntos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots,$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $||T(\vec{x}_k)|| < ||\vec{x}_k||/k$, para todo $k \geq 1$.

Reescribiendo lo anterior, se usa propiedades de la norma y el hecho de que T es transformación lineal, hemos obtenido una sucesión $\{\vec{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\left|\left|T\left(\frac{\vec{x}_k}{||\vec{x}_k||}\right)\right|\right| < \frac{1}{k}. \tag{1.1}$$

Observemos, en primer lugar, que ningún miembro de la sucesión obtenida en el párrafo anterior, $\{\vec{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, es el vector cero en $\mathbb{R}^n$, ya que si existiera algún $\vec{x}_l = \vec{0}$, entonces del hecho de que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, ya que T es transformación lineal, llegaríamos a que

$$0 = ||T(\vec{0})|| = ||\vec{0}|| < \frac{1}{l}||\vec{0}|| = 0,$$

lo cual es absurdo.

También se nota que ningún miembro de la sucesión, en $\mathbb{R}^m$, $\{T(\vec{x}_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es el vector cero, ya que de lo contrario si algún $T(\vec{x}_l) = \vec{0}$, entonces por la inyectividad de T, se sigue que $\vec{x}_l = \vec{0}$, lo cual es imposible por lo probado anteriormente.

De la ecuación (1.1) obtenemos que la sucesión $T\left(\frac{\vec{x}_k}{||\vec{x}_k||}\right)$ tiende a $\vec{0}$, y de esto se afirma que $\frac{\vec{x}_k}{||\vec{x}_k||} \to \vec{0}$. Como la sucesión $\{\frac{\vec{x}_k}{||\vec{x}_k||}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, de hecho la norma de cada uno de sus elementos es igual a uno, se tiene que ella, o alguna subsucesión de ella debe ser convergente, digamos, para fijar ideas, que la misma sucesión converge a un punto, el cual llamaremos $\vec{y}$. Usando la continuidad de T, ya que es lineal, se sigue que $T\left(\frac{\vec{x}_k}{||\vec{x}_k||}\right)$ tiende a $T(\vec{0}) = \vec{0}$. Por la unicidad del límite se concluye que $T(\vec{y}) = \vec{0}$, y por la inyectividad que $\vec{y} = \vec{0}$. Esto es imposible ya que la sucesión tiene a todos sus miembros de norma igual a uno. Por lo tanto, la desigualdad inicial debe cumplirse, es decir debe existir $c > 0$ tal que $||T(\vec{x})|| \geq c||\vec{x}||$.

EJEMPLO 1.2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere el siguiente conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) > y\}$. Muestre que A es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$.

Igual que en el ejemplo anterior vamos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^2$ no es un conjunto abierto, esto significa que existe $\vec{x} \in A$ tal que para todo $r > 0$ la bola $B(\vec{x}; r) \subset A$. Al igual que en el ejemplo anterior tenemos la oportunidad de discretizar, es decir, darle valores a r en el conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$.

Si $r = 1$, entonces podemos hallar un elemento $\vec{x}_1 \in B(\vec{x}; 1) \setminus A$. Si $r = 1/2$, entonces podemos hallar $\vec{x}_2 \in B(\vec{x}; 1/2) \setminus A$, y en general para $r = 1/n$, debe existir un $\vec{x}_n \in B(\vec{x}; 1/n) \setminus A$. Así, hemos obtenido una sucesión $\vec{x}_n$, fuera de A, tal que converge a un punto $\vec{x} \in A$.

Como $\vec{x} \in A$, entonces necesariamente debe tenerse que $\vec{x}$ es de la forma (a, b) con la propiedad de que $f(a) > b$.

La sucesión $\vec{x}_n$ debe tener la forma (y_n, z_n), y además y_n tiende a a, y z_n tiende a b. Como $\vec{x}_n$ no pertenece a A, se debe cumplir que $f(y_n) \leq z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Usando el hecho de que f es continua, se tiene que $f(y_n)$ debe ser convergente al valor $f(a)$, y de esto se debe seguir que $f(a) \leq b$, lo cual diría que (a, b) no vive en A, y esto claramente es un absurdo. Por lo tanto, podemos concluir que A es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 1.3 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función uniformemente continua. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado, entonces $f(\Omega)$ es acotado en $\mathbb{R}^m$.

Procedamos por reducción al absurdo una vez más. Supongamos que $f(\Omega)$ no es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^m$. Esto significa que dado cualquier $M > 0$ existe $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ para el cual se cumple que $||\vec{y}|| > M$. De lo anterior se sigue que podemos construir una sucesión $\{\vec{y}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset f(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$ tal que $||\vec{y}_k|| > k + 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Le dejamos al lector que haga esta tarea, no sin antes recordarle que debe darle valores a M en el conjunto $\{2, 3, 4, \ldots\}$.

Por definición, debe existir $\vec{x}_k \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{x}_k) = \vec{y}_k$. Como Ω es acotado se sigue que la sucesión es acotada, y por el teorema de Bolzano-Weiertrass debe existir una subsucesión $\{\vec{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}_1}$ tal que $\vec{x}_k$ converge a algún punto, el cual para fijar ideas denotaremos por $\vec{x}$. Si consideramos la subsucesión $\{\vec{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}_1}$, tendríamos que por la continuidad de f tal sucesión converge a $f(\vec{x})$.
Es claro que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f(\vec{x})|| \leq k_0$, ya que de lo contrario $\mathbb{N}$ sería un conjunto acotado. Si tomamos $\epsilon = k_0 + 1 - ||f(\vec{x})||$, debe existir $\delta > 0$ tal que para $0 < ||\vec{x} - \vec{y}|| < \delta$ implica que $||f(\vec{x}) - f(\vec{y})|| < \epsilon$. Como para tal $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||\vec{x}_k - \vec{x}|| < \delta$, para todo

$k \geq N$, entonces $||f(\vec{x}_k) - f(\vec{x})|| < \epsilon$, y teniendo en cuenta lo anteriormente dicho se sigue que $||\vec{y}_k - f(\vec{x})|| < \epsilon$, y de esto que $||\vec{y}_k|| < \epsilon + ||f(\vec{x})||$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, $||\vec{y}_k|| < k_0 + 1$ para todo $k \geq N$. De esto se arriba a una contradicción, y por lo tanto se concluye que $f(\Omega)$ debe ser acotado.

El último ejemplo que presentaremos es más ambicioso que los expuestos anteriormente, pero lo presentaremos para que el lector comprenda lo importante, e inesperado, que puede ser el método de discretización.

EJEMPLO 1.4 Sea $\{x_1, \ldots, x_l\}$ un conjunto linealmente independiente en un espacio normado X de dimensión infinita. Existe $c > 0$ tal que para cualquier elección de escalares $\beta_1, \ldots, \beta_l$ tales que $\beta_1 + \ldots + \beta_l = 1$ se cumple que

$$||\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_l x_l|| \; \geq \; c.$$

Al igual que los tres ejemplos anteriores usaremos el método de reducción al absurdo.
Empezamos negando la conclusión del resultado, es decir, para todo $c > 0$ existen escalares $\beta_1, \ldots, \beta_l$ tales que $\beta_1 + \ldots + \beta_l = 1$ y

$$||\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_l x_l|| \; < \; c.$$

Aplicando el método de discretización a la variable c, para cada valor de c en el conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ obtenemos lo siguiente:

- Si $c = 1$, existen $\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_l^{(1)}$ tales que $\beta_1^{(1)} + \ldots + \beta_l^{(1)} = 1$ y
$$||\beta_1^{(1)} x_1 + \ldots + \beta_l^{(1)} x_l|| \; < \; 1.$$
- Si $c = 1/2$, existen $\beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_l^{(2)}$ tales que $\beta_1^{(2)} + \ldots + \beta_l^{(2)} = 1$ y
$$||\beta_1^{(2)} x_1 + \ldots + \beta_l^{(2)} x_l|| \; < \; \frac{1}{2}.$$
- Si $c = 1/n$, existen $\beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_l^{(n)}$ tales que $\beta_1^{(n)} + \ldots + \beta_l^{(n)} = 1$ y
$$||\beta_1^{(n)} x_1 + \ldots + \beta_l^{(n)} x_l|| \; < \; \frac{1}{n},$$
para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos la sucesión $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ dada por

$$y_m \; = \; \beta_1^{(m)} x_1 + \ldots + \beta_l^{(m)} x_l \qquad \text{donde} \qquad \sum_{i=1}^{l} \beta_i^{(m)} = 1 \tag{1.2}$$

Obsérvese que por lo dicho anteriormente es claro que $||y_m|| \to 0$ siempre que $m \to +\infty$. Además, para cada $i = 1, \ldots, l$ y todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $|\beta_i^{(m)}| \leq 1$, esto se sigue de la condición que cumplen los betas en la ecuación (1.2).
De lo anterior se deduce que las l sucesiones $\{\beta_1^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}, \ldots, \{\beta_l^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ son sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$.
Aplicando el teorema de Bolzano-Weiertrass a la sucesión acotada $\{\beta_1^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$, obtenemos una subsucesión $\{\beta_1^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}_1}$ la cual converge, digamos al punto β_1. Ahora, consideremos la subsucesión $\{y_{1,m}\}_{m \in \mathbb{N}_1}$ de $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Por el mismo argumento anterior, considerando la subsucesión

$\{\beta_2^{(2)}\}_{m\in\mathbb{N}_1}$, la cual es acotada, y obtenemos una subsucesión $\{\beta_2^{(2)}\}_{m\in\mathbb{N}_2}$ la cual converge a β_2. Ahora, consideremos la subsucesión $\{y_{2,m}\}_{m\in\mathbb{N}_2}$ de $\{y_{1,m}\}_{m\in\mathbb{N}_1}$. En general. después de l etapas, llegaremos a la subsucesión $\{y_{l,m}\}_{m\in\mathbb{N}_l}$ con términos

$$y_{l,m} = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j^{(m)} x_j \qquad \text{y tal que} \qquad \sum_{j=1}^{l} \gamma_j^{(m)} = 1.$$

Además, es claro que la sucesión de escalares $\gamma_j^{(m)}$ converge a β_j cuando $m \to +\infty$.
Por contrucción se deduce que

$$y_{l,m} \to \sum_{j=1}^{l} \beta_j x_j \qquad \text{con} \qquad \sum_{j=1}^{l} \beta_j = 1.$$

De lo anterior se deduce que no todos los β_j pueden ser cero, ya que su suma es uno. Si $y = \sum_{j=1}^{l} \beta_j x_j$, entonces $y \neq 0$, ya que de lo contrario, al usar la independencia lineal de los x_j, llegaríamos a que los β_j son todos iguales a cero, y esto claramente no puede darse por lo recién argumentado.

Por otra parte, $y_{l,m} \to y$ y la continuidad de la norma implicaría que $||y_{l,m}|| \to ||y||$ siempre que $m \to +\infty$. Como $||y_m|| \to 0$, es claro que $||y_{l,m}|| \to 0$, y por lo tanto $||y|| = 0$, y entonces $y = 0$, lo cual es una contradicción.

En vista del absurdo al que hemos arribado se deduce que la suposición inicial es falsa, y con esto el resultado del ejercicio se sigue.

Bibliografía

[1] Avner Friedman: *Advanced Calculus*. First Edition, DOVER, 2007.

[2] Wendell Fleming: *Functions of Several Variables*. Second Edition. Springer-Verlag, 1987.

[3] C.B. Morrey and M.H. Protter: *A First Course in Real Analysis* . Second Edititon. Springer-Verlag, 1991.

[4] Michael Spivak : *Calculus on Manifolds*. First Edition. Benjamin, New York, 1974.