Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, N^o 2. Marzo 2010

Análisis de las Estrategias Empleadas en el Uso de Programas Dinámicos de Geometría y Tipos de Actividades para la Enseñanza de la Geometría.

Ronny Gamboa A.
rgamboa@una.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad Nacional Costa Rica

Yuri Morales L.
ymorales@una.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad Nacional Costa Rica

Resumen

El objetivo de este trabajo es indagar sobre las principales estrategias que se emplean en el manejo de distintos tipos de programas dinámicos de geometría. Para esto, se analiza una serie de actividades que han sido realizadas con el uso de un programa dinámico de geometría tipo exploratorio-constructivo y constructivo-deductivo, y se ofrecen algunas alternativas a las mismas, con el fin de explorar ciertas propiedades geométricas y, consecuentemente, valorar las fortalezas de las mismas.

Palabras claves: Geometría, programa, enseñanza, construcción, deducción, exploración.

Abstract

The aim of this paper is to investigate the main strategies that are used in handling different types of dynamic geometry software. For this, we analyze activities that have been carried out using dynamic exploratory-constructive software and constructive-deductive software and offer some alternatives to explore certain geometric properties and, consequently, assess "the strengths" of these activities.

KeyWords: Geometry, software, teaching, construction, conjecture, exploration.

1.1 Introducción.

La tecnología juega hoy un papel relevante en casi todos los sectores de la sociedad. El sector educación, por ejemplo, recibe una influencia cada vez mayor de ésta, debido a que debe responder y asegurar que los individuos se incorporen "satisfactoriamente" a nuestra sociedad.
El individuo no sólo debe ser integral con su comunidad y con su ambiente, sino que además, debe tener, en la medida de lo posible, las mejores herramientas para incorporarse al sector productivo y poder solventar sus necesidades. Por esta razón, éste debe conocer su realidad y su

entorno para modificarlo en beneficio de todos. En este sentido, las Matemáticas son una gran herramienta que permite no sólo adquirir una forma de razonamiento, sino que ofrece una visión del mundo circundante.

Desde esta perspectiva, la geometría juega un papel primordial en la comprensión del entorno de un individuo. Sensibilizar al estudiante sobre el rol de esta disciplina implica comprender que el nacimiento de ésta surgió como una necesidad de la humanidad para explicar algunas situaciones de su medio. Siendo consecuente, una forma de aprender geometría es observar, explorar y construir; es aquí donde la tecnología puede ser una gran herramienta.

Este trabajo se inscribe dentro de las posibles utilidades que pueden tener las herramientas tecnológicas. En específico, se explora un tipo de programa llamado Programa dinámico de geometría (PDG), el cual, como se ejemplifica en este trabajo, puede tener beneficios en la mediación del proceso de aprendizaje de la geometría.

Para este fin, se tomó como punto de partida, el trabajo hecho por Alfaro, Gamboa y Morales (2008), quienes realizaron una clasificación para los programas dinámicos de geometría el: "software exploratorio constructivo (tipo 1), orientado a la exploración y formación de conjeturas, y software constructivo deductivo (tipo 2) donde, además de la exploración y construcción, el software proporciona la relación algebraica del concepto geométrico."(*Ibid., p. 11*)

Dado que los enfoques (o modelos) anteriores son excepcionalmente distintos (tanto en sus alcances y objetivos, como en la posible mediación) y que el segundo modelo se orienta al **perfeccionamiento** del primero, en este trabajo se pretenden mostrar los factores que podrían estar involucrados en una propuesta metodológica basada en el uso de un PDG tipo *constructivo-deductivo* o tipo 2.

Para esto inicialmente se realizó una revisión literaria sobre el componente tecnológico en la Educación Matemática (específicamente sobre el uso de programas dinámicos de geometría), su posible impacto en el desarrollo de destrezas y habilidades cognitivas, y se investigaron algunos casos documentados que respaldan su posible beneficio en la enseñanza aprendizaje de la misma. Luego, se analizaron propuestas específicas sobre el uso de estas herramientas y se construyeron otras bajo el segundo modelo. Al final del documento se realiza un análisis de las debilidades y las fortalezas de cada una de las actividades.

1.2 Aportes teóricos

1.2.1 Programa dinámico de geometría

Cuando se estudian los posibles impactos de la tecnología como herramienta en la educación, es necesario discernir entre los distintos fines para los cuales ha sido creada. Estos posibles impactos han generado grandes controversias respecto al valor pedagógico que pueden tener ciertos paquetes computacionales, en particular en el área de las Matemáticas.

En este sentido, Morales y Poveda (2008) son enfáticos al afirmar que,

> La tecnología, como instrumento, simplemente está definida por los objetivos propios del proceso educativo. Posiblemente los alcances dependan más del tipo de instrucción que se espera, que de las potencialidades metodológicas que pueda contener, por ejemplo, un software. (*Ibid., p. 15, p. 5*)

Por otro lado, si se analiza desde una perspectiva técnica, los programas pueden ser creados con fines específicos; por ejemplo, existen herramientas orientadas para el trabajo colaborativo, para la modelización de fenómenos y orientadas hacia áreas específicas. Respecto a los programas dinámicos de geometría, estos son dirigidos a la exploración y visualización de propiedades, tanto en el plano como en el espacio; entre los más conocidos se tienen el *Cabri Geómètre, Geometer Sketchpad, Compass and Ruler, GeoGebra*, entre otros.

Arcavi y Hadas (2000) señalan que los entornos dinámicos computarizados constituyen laboratorios virtuales en los cuales los estudiantes pueden jugar, investigar y aprender matemáticas. Estos autores señalan algunas características por las cuales dichos laboratorios tienen el potencial para educar (siempre y cuando se acompañen de materiales curriculares y prácticas de clases adecuadas), las cuales se mencionan a continuación.

> *Visualización.* Referida ésta como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual (Hershkowitz, 1989, citado en Arcavi y Hadas, 2000). Los entornos dinámicos facilitan al usuario, además de construir figuras con ciertas propiedades y luego visualizarlas, transformar esas construcciones. Esto permite reforzar el hábito de transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una circunstancia particular con el fin de observar variaciones, sugerir invariantes y proporcionar bases para realizar justificaciones de conjeturas y proposiciones.
>
> *Experimentación.* Un entorno dinámico permite la disposición de muchos objetos y el análisis de muchos ejemplos en diferentes circunstancias. Los estudiantes pueden medir, comparar, cambiar la figura y elaborar otras construcciones que sirvan para apoyar sus observaciones, generalizaciones o conjeturas.
>
> *Sorpresa.* Las actividades que se le presenten al estudiante para trabajarlas en un ambiente dinámico, deben ser cuidadosamente seleccionadas para garantizar verdaderas experiencias de aprendizaje. Éstas deben ir orientadas para que los estudiantes realicen predicciones explícitas y razonables sobre ciertos resultados o acciones del fenómeno o situación que ellos están trabajando. Hacer dichas predicciones, anima a los estudiantes a clarificar la forma en que perciben el fenómeno que están trabajando; los lleva a la posición de "tener su propia predicción", y así ellos serán más cuidadosos en la forma que piensan sobre el fenómeno y, en consecuencia, más comprometidos con éste y su estudio; además de crear más expectación y motivación para trabajar sobre el fenómeno.
>
> *Retroalimentación.* Las sorpresas que el estudiante experimenta se derivan de la discrepancia entre las predicciones y los resultados observados. El entorno mismo facilita esta retroalimentación, al confrontar las conclusiones del alumno con sus "expectativas". Este proceso es más efectivo que el facilitado por un profesor, porque posibilita verificar, revisar la predicción y crea la necesidad de una prueba que apoye la observación realizada.
>
> *Necesidad de probar y prueba.* Seguido de una sorpresa, muchos estudiantes pueden demandar una prueba, quizás no explícita, pero pueden requerirla de otros o de él mismo al contestar el por qué o por qué no. El círculo de experimentación, retroalimentación, reflexión, debe proveer la base para la elaboración de argumentos que ayuden a explicar y probar una aseveración.

En el plano educativo, algunos trabajos realizados sobre estas herramientas proporcionan buenas señales respecto a la utilidad pedagógica, tanto para estudiantes como para profesores en formación; por ejemplo, Giraldo, Belfort y Carvalho (2004) plantean un caso de estudio donde el estudiante descubre (con ayuda de los programas dinámicos de geometría) la necesidad de utilizar argumentos lógicos para justificar el concepto de área que posee (entrar en un conflicto con lo que "sabe" y lo que visualiza en el computador).

Otro aporte lo realiza Pandiscio (2002), quien explora la concepción de los profesores en formación sobre la necesidad de la prueba clásica en geometría, frente al uso de los programas dinámicos de geometría. Él concluye que los profesores en formación consideran que muchos ejemplos no constituyen una prueba, pero, el conocimiento que se adquiere al usar este tipo de herramienta es tal que el paso a la demostración clásica es más sencillo. En esta misma línea, Belfort y Guimarães (2004) opinan que los materiales basados en programas dinámicos de geometría ayudan a los profesores a ser más concisos en algunos temas críticos de la Educación Matemática.

Aunado a lo anterior, Zhonghong (2002) estudia los comportamientos y habilidades de los profesores en formación respecto a Geometría y el uso de ambientes enriquecidos con un PDG y opina que el profesor en formación (esto en la Universidad Internacional de Florida), no se encuentra preparado para la geometría del colegio y, en consecuencia, no conoce como enseñarla. Por otro lado, Schumann y Green (1999) también realizan un aporte al comparar y encontrar mayores beneficios al solucionar un problema en entornos dinámicos de geometría que en otros.

A manera de resumen, los aportes que ofrece el uso de un PDG o entornos enriquecidos con ellos parecen ser alentadores. En la Figura 1.1 se muestran algunas de las destrezas y habilidades que pueden ser estimuladas con el uso de este tipo de programas dinámicos.

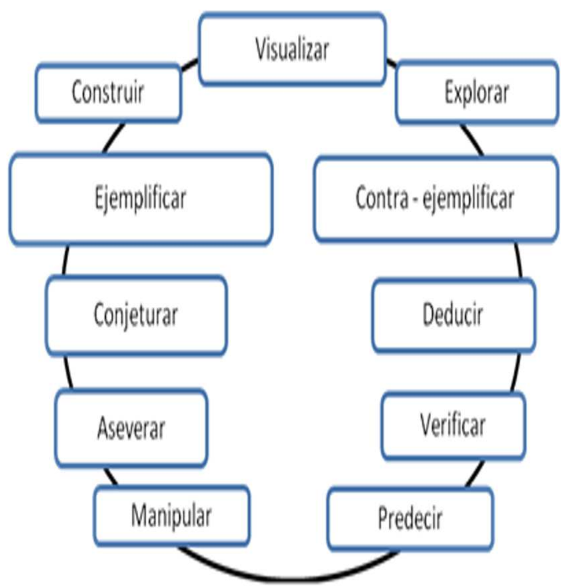


Figura 1.1 Habilidades cognitivas y destrezas que pueden ser estimuladas con el uso de programas dinámicos de geometría

En los siguientes apartados se profundiza en algunas de las habilidades y destrezas mencionadas.

1.2.2 La importancia de visualización y el uso de distintas representaciones a través de programas dinámicos de geometría

El desarrollo de herramientas tecnológicas está influyendo en la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas, lo que ha generado algunas preguntas que se han convertido en guías para investigación: ¿cuándo un artefacto tecnológico llega a transformarse en una herramienta para resolver problemas? ¿Qué procesos de apropiación de la herramienta exhiben los estudiantes en sus experiencias de resolución de problemas? ¿Qué tipo de recursos y estrategias necesitan los estudiantes para transformar un artefacto en una herramienta de resolución de problemas? ¿Qué tipo de representaciones se destacan con el empleo de la tecnología? (Santos, 2003). El mismo autor señala que estas interrogantes ayudan a comprender el uso que los estudiantes hacen de las herramientas tecnológicas, así como las conjeturas que plantean, las construcciones que realizan y las distintas representaciones que utilizan para la búsqueda de relaciones y la comunicación de los resultados.

Santos (2001) señala que el PDG funciona como una herramienta útil para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y proponer argumentos que las soporten. El potencial o alcance de la geometría dinámica va más allá de realizar construcciones, pues se requiere problematizar la visualización para que surja la necesidad de explorar, conjeturar, predecir y verificar (Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004).

Al respecto, Santos (2001), indica que la facilidad de mover puntos, segmentos, de generar lugares geométricos y la posibilidad de calcular las longitudes de lados, hallar áreas, perímetros, entre otros, permite que el uso de un programa dinámico se convierta en una poderosa herramienta para el estudio de las Matemáticas, en particular la Geometría.

Laborde (1993), citado en Balacheff y Kaput (1996), señala que los dibujos producidos en la pantalla de la computadora en un ambiente de geometría dinámica, pueden ser manipulados "tomando" y "arrastrando" cualquier punto con libertad; así, las propiedades geométricas y las relaciones entre los elementos de las figuras resultantes, ayudan a la descripción de un fenómeno accesible a la observación. "Los programas de geometría dinámica representan objetos geométricos e introducen un nuevo elemento: ellos representan acción" (Santillán y Moreno, 2001, p. 1006).

Castiblanco y otros (2004) señalan que las características fundamentales de un PDG son:

- la capacidad de arrastre de las figuras permite reconocer las propiedades invariantes de una figura que ya no se concibe como estática, sino móvil;
- el uso del lugar geométrico o la huella que deja un objeto cuando se arrastra permite visualizar y descubrir propiedades geométricas;
- la posibilidad de animación permite observar el proceso de construcción de una propiedad geométrica.

Un entorno de aprendizaje enriquecido con un PDG, por ejemplo, aporta elementos relevantes para la exploración de los problemas: manipulación directa de sus objetos mediado por la computadora; en particular, la búsqueda de propiedades invariantes a través de la interacción mecánico-visual que lleva a cabo el usuario en la pantalla por medio de la manipulación de teclas y el *mouse* (Santos y Díaz, 1999).

Para ejemplificar las posibilidades del arrastre, visualización y el uso de las distintas representaciones que ofrece un PDG, se presenta la siguiente situación, en la cual se utiliza el *Cabri Geómètre*.[1]

Con ayuda del programa, la construcción de una figura, por ejemplo, un triángulo rectángulo, le implica al estudiante no solamente conocer la definición, sino tener presente las propiedades que éste tiene para realizar su construcción.
Así, aunque con la ayuda del programa se puede construir un triángulo rectángulo "a mano alzada" y "creer" que es un triángulo rectángulo, la posibilidad de mover un vértice permite con-

[1] Visite `www.cabri.com` para una versión de prueba o mayor información.

statar si las propiedades de la figura se mantienen y si “deja de ser triángulo rectángulo”.

En la Figura 1.2 se muestra un triángulo rectángulo realizado solamente mediante una percepción visual.

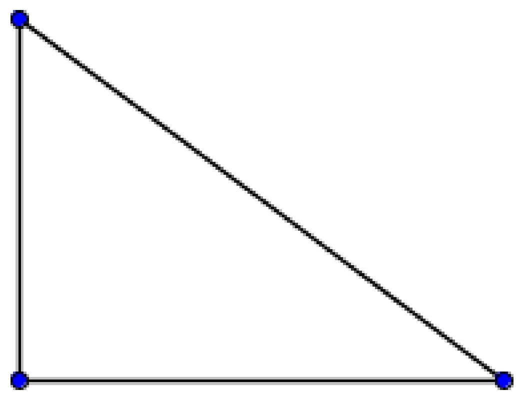


Figura 1.2 Triángulo rectángulo realizado mediante una percepción visual

Si bien, visualmente la figura parece ser un triángulo rectángulo, al mover uno de sus vértices puede comprobarse que la figura se altera respecto a su propiedad supuesta (Figura 1.3). En un ambiente de aula, esta situación puede ser aprovechada por el profesor para enriquecer el proceso de aprendizaje, pues para la adecuada construcción de un triángulo rectángulo es necesario comprender las definiciones correspondientes y las propiedades de éste.

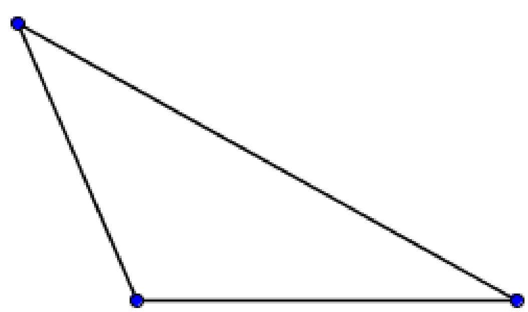


Figura 1.3 “Triángulo rectángulo” alterado respecto a su propiedad supuesta.

Al construir el triángulo rectángulo, tomando en cuenta las propiedades que éste posee, la figura no debe alterarse al mover cualquiera de los vértices, pues estas propiedades deben permanecer invariantes. El triángulo rectángulo construido se nombrará ΔABC, donde $\overline{AC}$ es la hipotenusa (Figura 1.4).

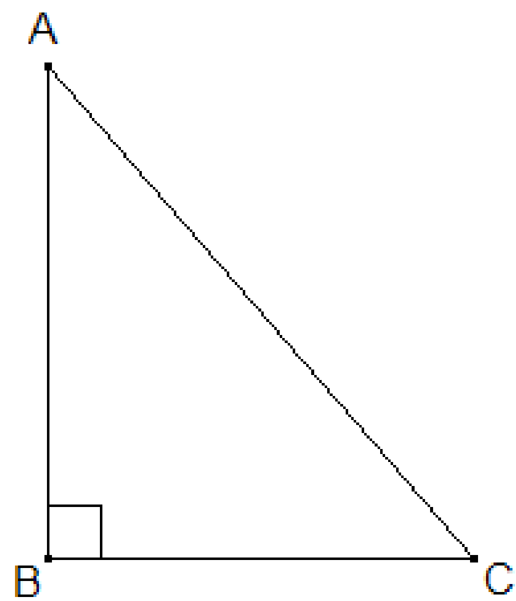


Figura 1.4 Construcción de un triángulo rectángulo a partir de sus propiedades.

Sobre el segmento $\overline{AC}$ se construye un punto D. Además, se construyen los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ tal que $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ en el punto E y $\overline{DF} \perp \overline{BC}$ en el punto F, formando el $\square DEBF$, el cual es un rectángulo (Figura 1.5).

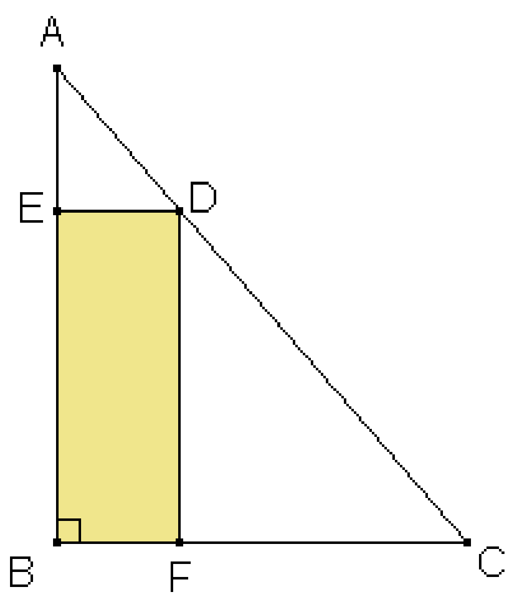


Figura 1.5 Triángulo rectángulo con vértices A, B, C.

Dada la construcción anterior, se puede investigar, respecto a la variación del área del $\square DEBF$, cuándo ésta será máxima. Es decir, de toda la familia de rectángulos construidos, cuáles son las características que posee el rectángulo de área máxima. Dentro de las posibilidades que permite el programa está el cálculo de dicha área, de donde se puede observar su comportamiento para "distintos rectángulos". Sin embargo, lo interesante sería, una vez que se hizo una determinada conjetura, poder realizar, mediante el programa,un proceso de "comprobación" (Figura1.6).

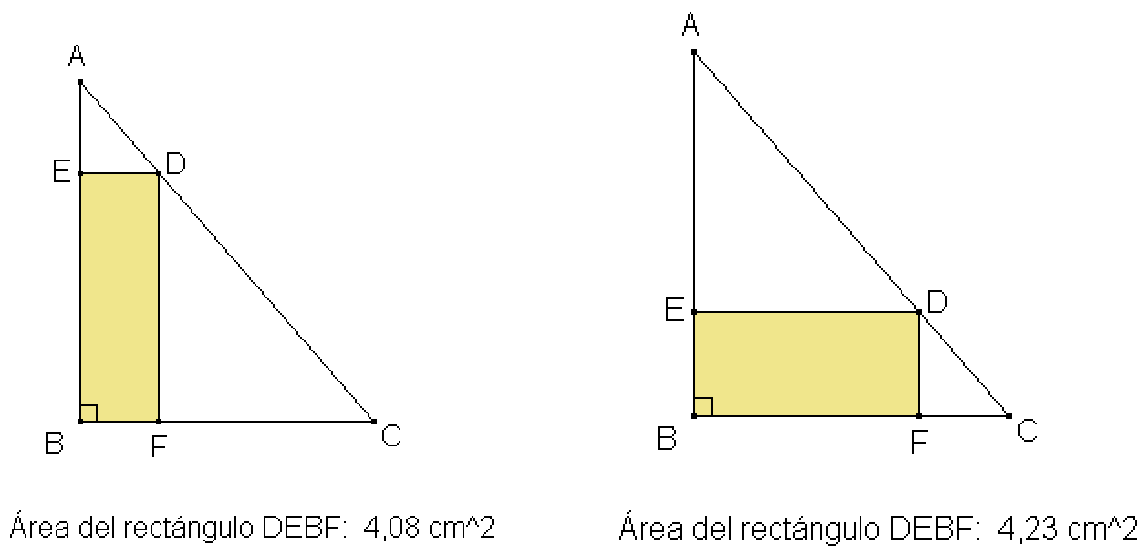


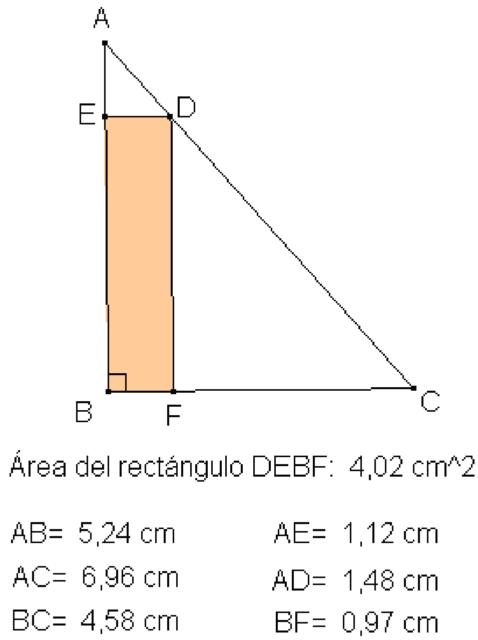
Figura 1.6 Cálculo del área del $\square DEBF$

Si se desplaza el punto Dsobre el segmento $\overline{AC}$ es posible observar que es completamente válido preguntarse por un área máxima, dado la variación que ésta presenta.

¿Cómo se podría determinar cuál es la "posición" del punto Ddonde se presenta el área máxima?

Con la ayuda del programa,es posible obtener las medidas de los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Además, se puede construir una tabla para tratar de deducir, para qué medida de $\overline{AD}$, se presenta el área máxima.

De esta primera aproximación, es posible observar que el área máxima es aproximadamente $5,99cm^2$ y se presenta para medidas de $\overline{AD}$ iguales a $3,41cm$ y $3,55cm$, aproximadamente la mitad de $\overline{AC}$. Esta situación presenta una oportunidad para recalcar el hecho que si bien el programa representa una ayuda para obtener una conjetura, su aproximación obliga a apoyarse en otras representaciones.

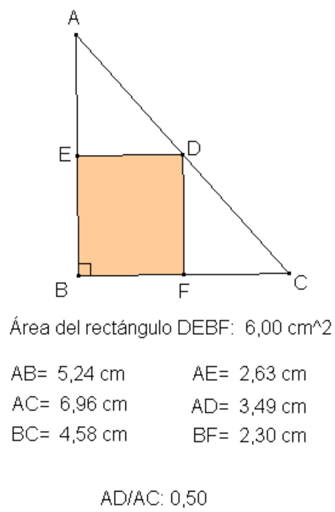


	AD=	Área del rectángulo DEBF:
1	0,53	1,68
2	0,71	2,20
3	0,85	2,58
4	0,99	2,94
5	1,14	3,28
6	1,28	3,60
7	1,42	3,90
8	1,56	4,17
9	1,70	4,43
10	1,85	4,67
11	1,99	4,89
12	2,13	5,09
13	2,27	5,27
14	2,41	5,43
15	2,56	5,57
16	2,70	5,69
17	2,84	5,79
18	2,98	5,87
19	3,12	5,93
20	3,27	5,97
21	3,41	5,99
22	3,55	5,99
23	3,69	5,97
24	3,83	5,93
25	3,98	5,87
26	4,12	5,79
27	4,26	5,69
28	4,40	5,57
29	4,54	5,43
30	4,69	5,27
31	4,83	5,09

Figura 1.7 Construcción de una tabla para hallar el área máxima de $\square DEBF$.

Dado que la representación de la tabla es una aproximación, estos datos no son suficientes para brindar una respuesta a la pregunta planteada. Se hace necesario, entonces, recurrir a otras herramientas del programa dinámico de geometría con el propósito de validar las conjeturas establecidas a partir de esta primera aproximación.

Si se traslada el valor de $d\,(A, D)$ sobre el *eje* x y el valor del área sobre el *eje* y y se grafica el lugar geométrico que describe el punto P con coordenadas $(d\,(A, D)\,, Area)$ se puede observar que éste representa una parábola cóncava hacia abajo. El valor máximo del área se obtendrá cuando el punto P "se ubique" en el "punto más alto" de la parábola, el cual es representado por el vértice. Si se mueve el punto D hasta que P alcance la posición indicada, se puede observar que el área del $\square DEBF$ es máxima cuando $\frac{d(A,D)}{d(A,C)} = \frac{1}{2}$, es decir, cuando D es punto medio de $\overline{AC}$. (Figura 1.8).



	AD=	Área del rectángulo DEBF:
1	0,53	1,68
2	0,71	2,20
3	0,85	2,58
4	0,99	2,94
5	1,14	3,28
6	1,28	3,60
7	1,42	3,90
8	1,56	4,17
9	1,70	4,43
10	1,85	4,67
11	1,99	4,89
12	2,13	5,09
13	2,27	5,27
14	2,41	5,43
15	2,56	5,57
16	2,70	5,69
17	2,84	5,79
18	2,98	5,87
19	3,12	5,93
20	3,27	5,97
21	3,41	5,99
22	3,55	5,99
23	3,69	5,97
24	3,83	5,93
25	3,98	5,87
26	4,12	5,79
27	4,26	5,69
28	4,40	5,57
29	4,54	5,43
30	4,69	5,27
31	4,83	5,09

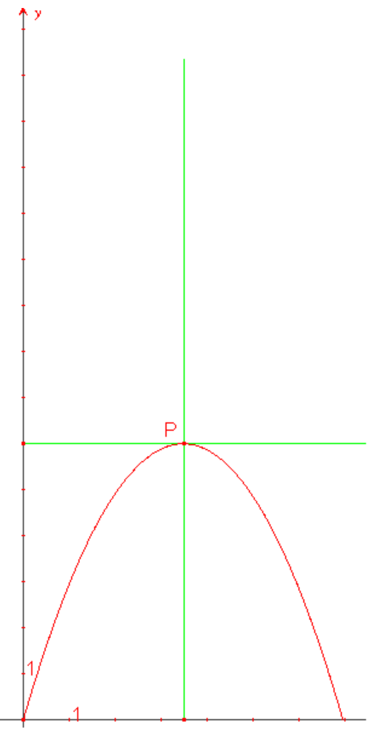


Figura 1.8 Área máxima del $\square DEBF$.

La posibilidad que ofrece el programa de utilizar distintas representaciones permite resolver un problema realizando varias aproximaciones, todas ellas con el propósito de "confirmar" o "descartar" una conjetura.

La resolución algebraica de la situación anterior se convierte en otra aproximación para resolver el problema. La ventaja de la utilización del programa es que le permite al estudiante constatar que realmente existe un valor máximo del área, y no resolver algebraicamente un problema "a ciegas", sin una clara comprensión de la situación que se presenta.

Un estudio similar se puede realizar respecto al perímetro del $\square DEBF$, utilizando las mismas representaciones y un acercamiento similar.

1.2.3 Potencial y precauciones del uso de los programas dinámicos de geometría tipo constructivo—deductivo en situaciones específicas.

En concordancia con lo anterior, en este apartado se muestran varios trabajos en los que se han realizado propuestas sobre el uso de los programas dinámicos de geometría en situaciones específicas, y se construye otra propuesta basada en un modelo de programa tipo constructivo—deductivo mediante el *Geometry Expressions*.[2]
En el 2002, Santos y Espinoza, propusieron una construcción mediante un PDG para el siguiente teorema: Sea S una circunferencia con centro en M y diámetro $\overline{BD}$, A, C y E puntos distintos tales que, $D - C - E - A$. Si $S \cap \overline{AC} = \{E\}$, entonces $\overline{BE}$ es la altura de ΔABC *sobre* $\overline{AC}$ (Figura 1.9).

[2] Visite `http://www.geometryexpressions.com` para una versión de prueba o mayor información.

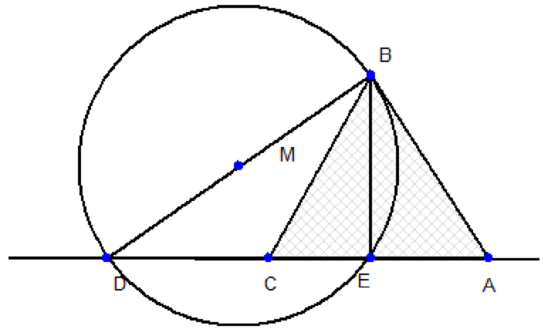


Figura 1.9 Basado en Santos y Espinoza (2002, p.40)

La propuesta y construcción dinámica ofrecida por Santos y Espinoza (2002) se basa en que al cambiar la posición de D (inclusive al observar el trazo que realiza M) es evidente que $\overline{BD}$ es el diámetro de la circunferencia S y $m\sphericalangle DEB = 90^o$, por lo que $\overline{BE}$ es la altura del ΔABC respecto a $\overline{AC}$.

Una forma de llegar a esta conclusión, evadiendo la propuesta de Santos y Espinoza (2002), es a partir de relaciones algebraicas que describen propiedades geométricas.

Primero, llámese mediante el programa, la medida de $\overline{DE}$como a, la medida de $\overline{BD}$ como b; luego se le solicita que relacione la medida de $\overline{BE}$ con las otras. Como se observa en la *Figura 10*, el programa proporciona $z_0 = \sqrt{-a^2+b^2}$ (en realidad la notación utilizada por el programa es $z_0 \Rightarrow \sqrt{-a^2+b^2}$, donde el símbolo de implica significa que se asigna el valor $\sqrt{-a^2+b^2}$ a la variable z_0) lo cual, por el recíproco del teorema de Pitágoras, garantiza que el triángulo es rectángulo y, en particular, $m\sphericalangle DEB = 90^o$, por lo que $\overline{BE}$ es la altura del ΔABC respecto a $\overline{AC}$.

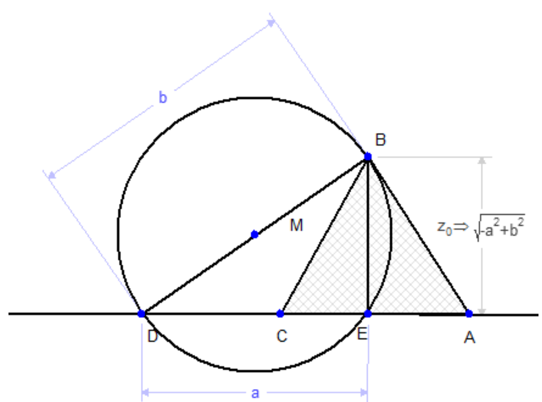


Figura 1.10 Otra propuesta basado en el recíproco del teorema de Pitágoras.

En otro tipo de actividad, Connor, Moss y Grover (2007) plantearon, entre otras, las siguientes proposiciones para ser "exploradas" por los estudiantes.

1. Si □ABCD es un cuadrilátero cíclico, entonces $m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle BDC = 180$. (*Ibid, p. 58*).

2. Si un cuadrilátero cíclico es un paralelogramo, entonces este es un rectángulo. (*Ibid, p. 58*).

Cuando se aplicó el estudio, según los autores, todos los estudiantes comprendieron la primera propuesta (hipótesis – tesis); la forma en que justificaron la propiedad con ayuda de un PDG fue construyendo el cuadrilátero cíclico, solicitando al programa las medidas de los ángulos en cuestión, y luego, sumándolos. Además, se observó que los estudiantes manipularon la posición y forma de la construcción para volver a computar la suma. En este caso, es evidente que el estudiante usa la herramienta para explorar una gran cantidad de ejemplos (posiblemente buscando un contraejemplo).

Aquí, el tipo de programa en mención puede usar una variable algebraica (por ejemplo θ), por lo cual, el problema termina al solicitar el valor del ángulo opuesto, como una expresión algebraica $z_0 = 180^o - \theta$, y realizar $\theta + (180^o - \theta) = 180^o$ como se observa en la Figura 1.11.

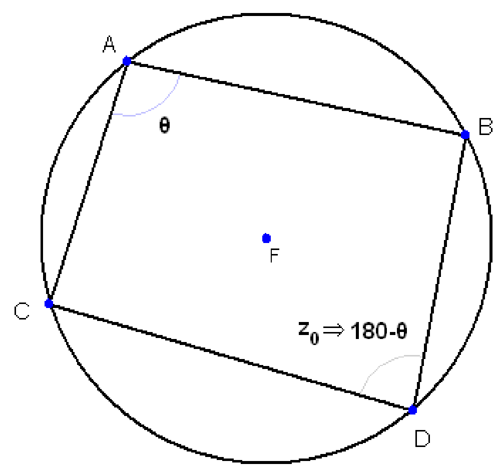


Figura 1.11 Suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico.

El segundo argumento de Connor, Moss y Grover (2007) es un poco más difícil de demostrar, aunque, según los autores, esto provocó que el PDG fuera mucho más usado. El error que la mayoría de los estudiantes cometió fue que comenzaron la construcción dándose un rectángulo como cuadrilátero inicial. Además, tanto en este argumento, como en el anterior, los estudiantes no usaron un razonamiento prototípico.

La propuesta bajo el modelo *tipo 2* se basa en la construcción de una circunferencia y sobre ésta cuatro puntos cualesquiera. Luego, se forma el cuadrilátero cuyos vértices corresponden a los puntos mencionados. Posteriormente, con ayuda del programa, se puede asignar la propiedad del paralelismo a los lados opuestos del cuadrilátero.

Si se le asigna a un lado la medida a y a su consecutivo la medida b, el programa proporciona los valores de los lados opuestos, donde $z_4 = b$ y $z_5 = a$. Además, señala que los ángulos internos z_0, z_1, z_2, z_3 miden aproximadamente 90^o, como se muestra en la figura 1.12.

El programa utiliza el símbolo $\Rightarrow\sim$ para indicar que se asigna un valor aproximado a la variable. Por ejemplo, en la *Figura 12* se señala que $z_0 \Rightarrow\sim 90^o$, es decir, que z_0 mide aproximadamente 90^o. Esta notación está dada por el programa.

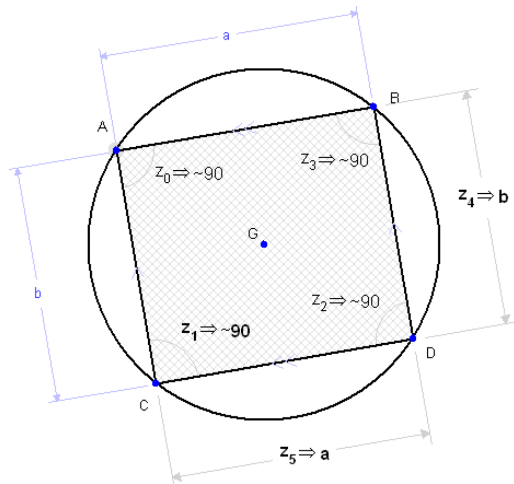


Figura 1.12 Si un cuadrilátero cíclico es un paralelogramo, entonces este es un rectángulo

.

Dados estos ejemplos se puede señalar que este tipo de herramienta no solamente está en función de las relaciones algebraicas para los teoremas geométricos, sino que, es posible hacer suposiciones con base en otros teoremas. Es decir, a diferencia de los ejemplos anteriores, las construcciones que se realicen con el programa también pueden convertirse en punto de partida para determinar cuáles son los conceptos relacionados con la demostración y no, necesariamente, utilizarlo como comprobación de lo propuesto en el teorema. Para ejemplificar esta situación, en la Figura 1.13 se muestra el teorema que relaciona las distancias entre el baricentro, el ortocentro y el incentro.

Para efectos de las actividades que se realizan en el aula, este ejemplo pretende la visualización de la propiedad y, pertinentemente, el adiestramiento en el uso de la herramienta. En contraste con los ejemplos anteriores, no se proyecta la justificación junto a la construcción; no obstante ésta debe servir como un ejercicio para la comprobación de los conceptos que el estudiante ha construido hasta ese momento, como podrían ser las alturas, las medianas y las bisectrices.

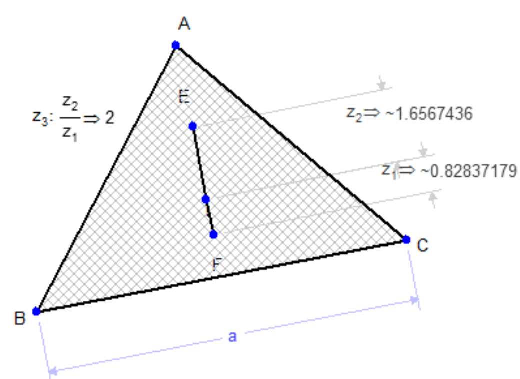


Figura 1.13 Relación entre las distancias del baricentro, el ortocentro y el incentro.

Tomando con mayor detenimiento este último argumento, se puede afirmar que, en el entendido que los objetivos de esta actividad son distintos a los que se pudieran plantear en las actividades anteriores, ésta tiene ciertas fortalezas respecto a la visualización y construcción que se pretenden del estudiante.

Para ejemplificar este argumento, en la figura 1.14 se muestra lo que, a criterio de los autores de este artículo, podrían ser las fortalezas de cada una de las actividades mostradas. El propósito de éste es realizar una comparación de las habilidades que se pretender desarrollar con cada una de ellas.

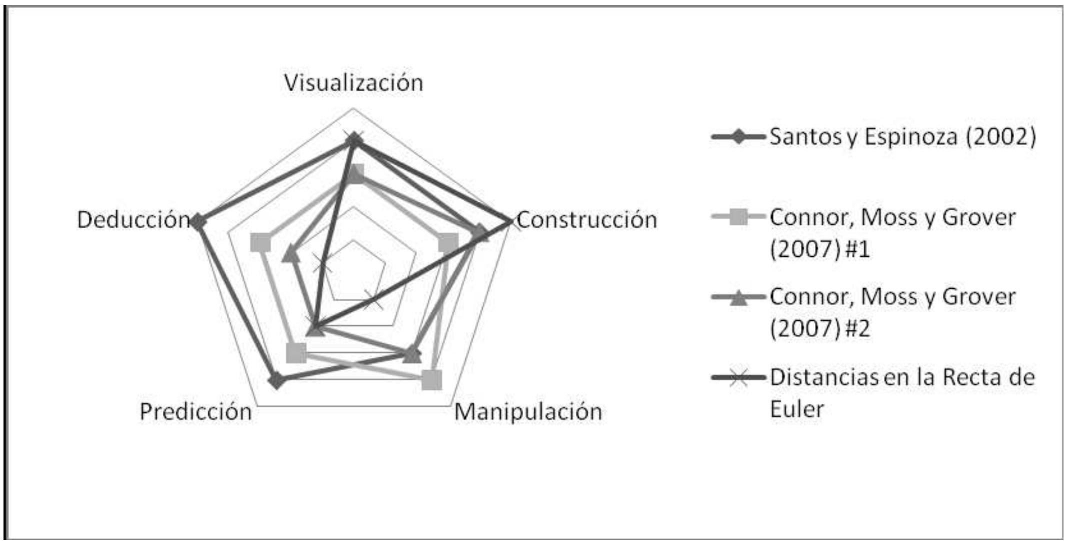


Figura 1.14 Análisis comparativo entre las fortalezas de las actividades presentadas basadas en el criterio de los autores

Aunque este análisis posee cierto nivel de subjetividad y una clara dependencia con los fines del ejercicio, el docente también conserva un valioso criterio profesional, el cual debe ser justificante de una u otra decisión. En otras palabras, en la medida que se establezcan las intenciones didácticas por parte del profesor, podría otorgársele, a una determinada actividad, un mayor énfasis en la visualización, la construcción, la deducción u otros. Es el docentes quien decide, de acuerdo con las habilidades que desea desarrollar, el tipo de actividad y programa que debe utilizar.

Finalmente, dadas las construcciones y actividades mostradas, se puede concluir que los principales factores que giran alrededor de las formas de trabajo con este tipo de actividad y programa son generados a partir del análisis de los objetivos que se pretenden alcanzar, las potencialidades de las actividades y los recursos técnicos que posea un programa específico.

1.3 Discusión y conclusiones.

A manera de resumen, se discuten los principales factores identificados en cada una de las construcciones y propuestas realizadas.
Respecto a la propuesta de Santos y Espinoza (2002), es necesario notar que la construcción geométrica en el PDG es un excelente ejercicio para el estudiante. Además, la posibilidad de arrastrar y manipular objetos puede ayudar a descubrir relaciones.

En este sentido, se considera que la construcción en cualquier modelo de un PDG es una buena herramienta, pero, puesto que la justificación de la última conclusión es una hipótesis de lo que los autores consideran que el estudiante observaría, se podrían utilizar los programas del segundo modelo para ofrecer la oportunidad al estudiante de justificar esto mediante otra propiedad que sea, para él, más representativa (por ejemplo, en la *Figura 10* se expuso otra justificación basada en el recíproco del teorema de Pitágoras).

Acerca de las propuestas de Connor, Moss y Grover (2007), si se analiza cuál es el objetivo de la primera propuesta, se puede especular que al no exigirse una demostración formal sobre la propiedad, el programa sirvió, únicamente, como una forma de hacer muchos casos en poco tiempo. Nótese en la *Figura 11* que los programas de tipo 2 permiten que el estudiante descubra la propiedad sin tener que hacer muchos casos. Inclusive, la construcción en el PDG es muy sencilla y se podría reformular la pregunta para explotar algunas otras propiedades. Paradójicamente, el estudiante puede argumentar que la visualización, como única actividad, no fue más provechosa que la clase magistral (problematizar la visualización).

El tercer caso es, en cierta medida, el más difícil de analizar, pues al poseer una construcción poco sencilla, se puede sospechar que un estudiante que logre la construcción en el PDG está un paso más cerca de comprender la propiedad y el camino a la demostración le será más natural que aquel que no logre la construcción. El peligro radica en que el alumno que logre la construcción efectiva en un PDG de tipo 2 tiene la posibilidad de solicitar al programa que construya las relaciones faltantes a una cierta cantidad de variables, como se construyó en la *Figura 12*. Si esto ocurre, indiscutiblemente, el estudiante podría encontrar en los programas una caja negra que "*demuestra teoremas*".

El principal resultado del análisis del último caso fue, esencialmente, evidenciar que no es posible, al menos por el momento, construir una actividad que posea fortalezas en la estimulación de todas las destrezas y habilidades comprendidas en el complejo proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, sino que cada una posee una serie de características que le otorgan cierto valor, dependiendo claro está, del criterio definido para su utilización.
Por último, se debe mencionar que con el uso de los programas tipo 1, los estudiantes pueden hacer conjeturas y parte de su trabajo es encontrar las propiedades algebraicas que describen las relaciones geométricas, en cambio, con el uso de los programas tipo 2, estos pueden ser utilizados para obtener directamente las relaciones algebraicas y que el estudiante ofrezca los argumentos geométricos que justifican el cumplimiento de dichas propiedades. Por esta razón, nuestro objetivo no es dar argumentos a favor de la utilización de uno u otro, sino, mostrar los alcances que se pueden lograr con cada uno de ellos, para que sea el docente quien juzgue cuál utilizar, dependiendo de los objetivos que desea alcanzar con los estudiantes.

Bibliografía

[1] Alfaro, C., Gamboa, R. & Morales, Y. (2008). "Actividades para la enseñanza de la Geometría en secundaria". Memorias II Encuentro de Enseñanza de la Matemática, UNED

[2] Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). "Computer Mediated Learning: an Example of an Approach". International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, 25–45.

[3] Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). "Computer-based learning environments in mathematics". En A. Bishop, K. Clement, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Press. pp. 469-501.

[4] Belfort, E. & Guimarães, L. (2004). "Teacher's Practices and Dynamic Geometry". Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004. Vol 2 pp 503–510

[5] Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. & Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico Tecnologías Computacionales. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Enlace Editores Ltda. Bogotá, Colombia.

[6] Connor, J., Moss, L. & Grover, B. (2007). "Student evaluation of mathematical statements using dynamic geometry software'. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 38, No. 1, 15 January 2007, 55–63

[7] Giraldo, V., Belfort, E. & Carvalho, L. (2004). "Descriptions And Conflicts In Dynamic Geometry". Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2 pp 455–462

[8] Morales, Y. & Poveda, R. (2008). "Construcción de cuerpos sólidos y el principio de Cavalieri con apoyo de tecnología: Cabri 3D". Memorias I CICMA, UNA.

[9] Pandiscio, E. (2002). "Exploring the Link Between Preservice Teachers' Conception of Proof and the Use of Dynamic Geometry". School Science and Mathematics. Volume 102(5)

[10] Santillán, M. & Moreno, L. (2001). "Visualizing geometry with a calculator". Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2, pp. 1005-1012. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

[11] Santos Trigo, M. (2003). "Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol X, No2. pp. 195-212.

[12] Santos, M. & Espinoza, H. (2002). "Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software". International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 33, no. 1, 37-50

[13] Santos, M. & Díaz, E. (1999). "Validación y exploración de métodos de solución a problemas propuestos a través del uso de la tecnología". Educación matemática. Vol. 11, N^o 2, pp. 90-101.

[14] Santos, M. (2001). "Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas". Avance y perspectiva, Vol. 20, pp. 247-258.

[15] Schumann, H. & Green, D. (1999)."New Protocols for solving geometric calculation problems incorporating dynamic geometry and computer algebra software". International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol 31, No 3, 319 – 339

[16] Zhonghong, J (2002). "Developing Preservice Teachers' Mathematical Reasoning and proof abilities in the Geometer's Sketchpad Environment". Annual Meeting North American chapter for the Psychology of Mathematics Education. 24th. p 14.