Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, N^o 2. Marzo 2010

Números Trascendentes: Desarrollo Histórico

Antonio Rosales G.
anrogo58@yahoo.es
Departamento de Matemáticas, IES
Bahía de Almería

Resumen

Sabemos que los números trascendentes son aquellos que no son raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes racionales. Su origen, el origen de la trascendencia, se remonta a los griegos con la aparición de problemas como la duplicación del cubo, trisección del ángulo y cuadratura del círculo irresolubles con regla y compás. Entre 1844 fecha en la que nace el primer número trascendente y 1900 fecha en la que Hilbert plantea el llamado séptimo problema de Hilbert cuya solución, obtenida en 1934 por Gelfand y Scheider, a partir de los trabajos de Polya en 1914 y Siegel en 1929, abren las puertas de una nueva era para esta teoría. En este intervalo de tiempo se produjeron numerosos eventos importantes que vamos a tratar de desarrollar.

En este artículo vamos a tratar de describir la evolución de los números trascendentes en los siglos XIX y XX a través de las ideas aportadas por matemáticos de la talla de Cantor, Hermite, Liouville, etc.

Palabras claves: Historia de las matemáticas, análisis, números trascendentes

Abstract

We know that the transcendent numbers are those that are not roots of algebraic equations with rational coefficients. His origin, the origin of the transcendency, goes back to the Greeks with the appearance of problems as the duplication of the bucket, trisección of the angle and squaring of the circle with rule and compass.

Between 1844 dates in that when the first transcendent number was born and 1900 dates in that Hilbert raises the Hilbert's seventh so called problem which solution, obtained in 1934 by Gelfand and Scheider, from Polya's works in 1914 and Siegel in 1929, opens the doors of a new age for this theory. In this interval of time there took place numerous important events that we are going to try to develop.

In this article we are going to try to describe the evolution of the transcendent numbers in the XIX and XX century across the ideas contributed by mathematicians of the height of Cantor, Hermite, Liouville, etc.

KeyWords: History of the mathematics, analysis, transcendent numbers

1.1 Antecedentes hasta 1844

En el siglo V a.c. llegó a Grecia, proveniente de Jonia, Anaxágoras con una forma de pensar revolucionaria para la época. Era, más que un matemático, un filosofo natural con una mente inquisidora (estuvo en prisión por impiedad al afirmar que el Sol no era una deidad sino un piedra incandescente) que le llevo a interesarse por los problemas matemáticos.

En su libro "*Sobre el exilio*", Plutarco cuenta que Anaxágoras, mientras estaba en la cárcel, intentó cuadrar el círculo. Esta es la primera mención de un problema que ha fascinado a los matemáticos de todos los tiempos.

El problema de construir un cuadrado, de área igual a la de un círculo, se remonta al escriba Ahmes quien en el papiro Rhind da una regla para construir un cuadrado de área "*casi*" igual a la del círculo.

La cuadratura del círculo puede atacarse de tres maneras diferentes: usando regla y compás solamente, mediante curvas planas superiores o por series infinitas, que aproximan el problema.

Hipócrates de Quios fue el primero en usar una construcción plana para encontrar un cuadrado con área igual a la de una figura con lados circulares, aunque era consciente de que sus métodos fallaban para cuadrar el círculo.

Algunos sofistas contemporáneos de Hipócrates, como Antifones y Brison (450 a. c.), enfocaron el problema desde otra perspectiva que, aunque infructuosa entonces, resultó fértil posteriormente. Nos referimos a inscribir y circunscribir polígonos en círculos afirmando, con razón, que el área del círculo está entre la de los polígonos inscritos y circunscritos. Este método fue aprovechado posteriormente por Arquímedes obteniendo límites superiores e inferiores para el área.

La primera motivación en las investigaciones sobre números trascendentes en el siglo XIX es el problema de la cuadratura del círculo. Como sabemos, la trascendencia es hija de la irracionalidad cuyo descubrimiento por los matemáticos griegos ha hecho correr mucha tinta. Los métodos trascendentes permiten resolver problemas diofánticos, especialmente ecuaciones en números enteros.

El concepto de número trascendente o de función trascendente se ha formado poco a poco a medida que ha ido progresando el álgebra. La palabra "*Trascendente*" fue utilizada por Leibniz en 1704.

La primera demostración de irracionalidad de un número la da Euler en 1737 para los números e y e^2 mediante desarrollos en funciones continuas[1].

El enunciado, de lo que se convertirá en 1900 en el séptimo problema de Hilbert, sobre la trascendencia de $\dfrac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2}$ con α_1, α_2 números algebraicos multiplicativamente independientes, se encuentra en su esencia en "Introductio in Analysin Infinitorum" de Euler[2].

[1] De fractionibus continuis dissertatio (1737) pag 98-137
Commentationes Analyticae pag 187-215

[2] Introductio in Analysin Infinitorum,T I cap VI, 105

En 1775 Euler opina que el número π debe ser trascendente[3].

La obra de Lambert[4] "*Memoria sobre algunas propiedades notables de cantidades trascendentes circulares y logarítmicas*" publicada en 1768, supuso un avance importante tanto por los resultados como por las reflexiones que contiene. En ella relaciona la trascendencia de π y la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

Lambert empieza haciendo notar que la suma de la serie $\dfrac{2}{1.3}+\dfrac{2}{3.5}+\dfrac{2}{5.7}+\dfrac{2}{7.9}+...$ es 1 y que si se quita un término de cada dos: $\dfrac{2}{1.3}+\dfrac{2}{5.7}+\dfrac{2}{9.11}+\dfrac{2}{13.15}+...$ se encuentra $\dfrac{\pi}{4}$:

> "*Si fuese una cantidad racional, se concluiría de manera natural que será o un número entero o una fracción muy simple... pero como, tras la fracción $\frac{11}{14}$ encontrada por Arquímedes, que no da mas que una aproximación, se pasa a la de Matius $\frac{355}{452}$ que no es mucho mas exacta y cuyos números son considerablemente más grandes, nos vemos forzados a concluir que la suma de esta serie, lejos de ser una fracción simple, es una cantidad irracional"(Ibidem)*

Tras reconocer que este razonamiento no era suficiente para convencer a los geómetras que se dedicaban a resolver la cuadratura del círculo, emprende una demostración rigurosa de la irracionalidad de π , después de $\tan\alpha$ y de e^{α} para α racional no nulo. Al igual que Euler, aunque no lo cita, la base es el desarrollo en fracción continua, por ejemplo: $\dfrac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}+1}=\left[1,\dfrac{2}{\alpha}.\dfrac{6}{\alpha},\dfrac{10}{\alpha},...\right]$

Lambert termina conjeturando que los números a los que trata de demostrar su irracionalidad son trascendentes, y concluye:[5] "*en este caso. La longitud del arco será una cantidad trascendente, lo que quiere decir irreducible a cualquier cantidad racional o radical, y por ello no admite ninguna construcción geométrica*".

Esta afirmación de Lambert será demostrada de manera rigurosa por P. Wantzel en 1837 en sus "Recherches sur les moyens de reconnaitre si un problème de geometrie Pert se resoudre avec la regle et le compas" (T. Math Pures et Appl,.1837).

La memoria de Lambert fue completada en 1794 por A.M.Legendre[6]. En efecto, tras exponer la irracionalidad de π^2 y de $\tan\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{Q}\ ,\ \alpha\neq 0)$, Legendre demuestra la irracionalidad de π^2 , y conjetura la trascendencia de π : "*Es probable que el número π no esté comprendido en los irracionales algebraicos, es decir, que puede que no sea la raíz de una ecuación algebraica de un número finito de términos cuyos coeficientes son racionales, pero parece muy difícil demostrar rigurosamente esta afirmación*"

Otra demostración de la irracionalidad de π^2 , mencionada en la memoria de Lindemann, es debida a Hermite en 1873[7].

La demostración, ya clásica, de la irracionalidad de e a partir de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ se debe a Fourier (1815) y fue extendida por Liouville en 1840 para redemostrar el resultado de Euler: e y e^2 no son racionales ni cuadráticos.[8].

Liouville(1809-1882)

[3] De relatione inter. ternas pluresve quatitates instituenda, Opuscula Analytica,2 91-101
[4] Memoires de l'Academie des sciences de Berlin,17 pag 265-322
[5] ibidem 89 a 91
[6] Elements de Geometrie,note IV p.289-296,1823
[7] Borchardt Journal, 76, 1873, p.342
[8] Sur l' irrationalité du nombre e, J. Math Pure et Appl.,1840, pag192

La primera demostración de trascendencia fue publicada por Liouville en Les Comptes Rendus de l'Academie des Sciences (1844) en la sesión del trece de mayo de 1844, simplificada la semana siguiente y desarrollada siete años más tarde en su famosa memoria *"Sur des classes très etendues de quantités dont la valour n'est ni algebraique ni meme reductible a des irrationnelles algebraiques"* [9](1851).

El primer ejemplo de número trascendente obtenido fue construido con ayuda de las fracciones continuas. En su primera nota, pone el ejemplo del número $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ell^{-n!}$ con ℓ entero positivo. En su memoria de 1851, extiende este estudio al caso en el que ℓ es un entero de Gauss (es decir, $\ell \in \mathbb{Z}[i]$) no nulo. Por otra parte, para el resultado que obtiene sobre la trascendencia de números de la forma $\sum\limits_{n\geqslant 1} k_n 10^{n!}, 0 \leqslant k_n \leqslant 9$, escribe:[10] *"Creo recordar que encontré un teorema de este género en una carta de Goldbach a Euler; pero no conozco que la demostración se haya dado"*. La base de la construcción de Liouville es que si α es un número algebraico de polinomio minimal $P(x) = a_0 \prod\limits_{j=1}^{d} (x - \alpha_j)$ (coeficientes enteros), con $\alpha_1 = \alpha$, y si $\frac{p}{q}$ es un número racional, $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ distinto de α ,entonces $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$.

Luego $q^d P\left(\frac{p}{q}\right)$ es un entero racional no nulo y $q^d \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant 1$. Pero,

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \prod_{j=2}^{d} \left(\frac{p}{q} - \alpha_j\right) \quad \text{si} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant 1,$$

se tiene para $2 \leqslant j \leqslant d$: $\left|\frac{p}{q} - \alpha_j\right| \leqslant 1 + |\alpha - \alpha_j|$ y se encuentra :

$$q^d |a_0| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{j=2}^{d} (1 + |\alpha - \alpha_j|) \geqslant 1$$

esta desigualdad es también verdadera si $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$. Se define entonces un número $c(\alpha) > 0$, dependiente sólo de α , por:

$$\frac{1}{c(\alpha)} = |a_0| \prod_{j=2}^{d} (1 + |\alpha - \alpha_j|),$$

para obtener la desigualdad de Liouville:

"Si α es un número algebraico de grado d, existe un número real positivo $c(\alpha)$ tal que para todo número racional $\frac{p}{q}$ con $q > 0$ y $\frac{p}{q} \neq \alpha$, se tiene $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant c(\alpha) q^{-d}$ "

Esta desigualdad la utiliza introduciendo para un entero $\ell \geqslant 2$, el número $\chi = \sum\limits_{n\geqslant 1} \ell^{-n^2}$

Se obtiene una buena aproximación de χ con las sumas parciales. Sea m un entero positivo (suficientemente grande respecto a α y a ℓ) y hagamos:

[9] , J. Math Pure et Appl. (1), 16, 1851
[10] Ibidem

$$\left\{ \begin{array}{l} q = l^{m^2} \\ p = \sum\limits_{n=1}^{m} l^{m^2-n^2} \end{array} \right\}$$

se tiene entonces:

$0 < \chi - \dfrac{p}{q} = \sum\limits_{n>m} \ell^{-n^2} < \dfrac{2}{\ell^{2m+1}q}$, lo cuál nos da la contradicción pues si χ es racional, por una parte $\chi - \dfrac{p}{q} \geqslant \dfrac{c(\alpha)}{q}$ y por otra parte $\chi - \dfrac{p}{q} < \dfrac{2}{\ell^{2m+1}q}$, por tanto χ es irracional.

Este criterio, muy utilizado para demostrar la irracionalidad de un número, tiene su éxito y de ahí deriva su potencia, en el hecho de que su reciproco es cierto. En concreto, si χ es un número real, las tres condiciones siguientes son equivalentes:

i) χ es irracional

ii) existe una sucesión $\frac{p_n}{q_n}$ de números racionales, distintos dos a dos, tal que $q_n \left|\chi - \frac{p_n}{q_n}\right| \to 0$ *para* $n \to \infty$

iii) $\forall H \in \mathbb{R}, H > 1, \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, 1 \leqslant q < H$ con $0 < |q\chi - p| \leqslant \dfrac{1}{H}$

Prueba:

iii) $\Rightarrow$ ii) es trivial.

ii) $\Rightarrow$ i) se deduce de la desigualdad de Liouville con $d = 1$ y rehaciendo la demostración con $\chi = \dfrac{a}{b}$ racional pues $\left|\dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{1}{bq}$

i) $\Rightarrow$ iii) es un teorema de Dirichet de 1842, donde expone la existencia, para θ irracional real, de una infinidad de $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $q\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < 1$.

La demostración de esta última implicación se basa en el principio de los cajones (también conocido como Principio del palomar) que tuvo un papel trascendente a principios del siglo XX en los trabajos deThue y Siegel y que fue utilizado(en el XIX) por Minkowski en sus trabajos sobre la geometría de los números y las aproximaciones diofánticas[11].

Se llama *número de Liouville* a todo número real t para el cuál existe una sucesión $\dfrac{p_n}{q_n}$ de números racionales verificando $0 < \left|t - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < q_n^{-n} \quad \forall n > 1$.

Estos números son trascendentes gracias a la desigualdad de Liouville, además forman un conjunto con la potencia del continuo ya que contienen $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n 2^{-n!}$ donde (ε_n) es una sucesión de

[11] Sur les propietes des nombres entiers qui sont derivees de l'intuition de l'espace,Annales de Math,15 1896

ceros y unos con una infinidad de unos. También forman un conjunto denso por tanto la suma de un número de Liouville y un número racional es un número de Liouville.

Como quiera que los números de Liouville son de medida de Lebesque cero y sabemos que la medida de Lebesque de los reales es infinita, hemos de deducir que la desigualdad de Liouville, que da un buen criterio para establecer la irracionalidad de un número, no tiene la misma eficacia para establecer la trascendencia de un número: la "probabilidad" para que un número trascendente sea de Liouville es nula, es decir, existen números trascendentes que no son de Liouville, como por ejemplo, $e,\ \pi,\ \log 2$

No deja de ser curioso que más de un siglo después los números considerados por Liouville, $\sum_{n\geqslant 1} \ell^{-n^2}, \ell \geqslant 2,\ natural$; no siempre se sepan si son trascendentes aunque la solución parece que apunta a las funciones theta.

Utilizando la ecuación funcional $f(z) = 1 + zf\left(\dfrac{z}{4}\right)$ verificada por la función $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\ e^{-n(n-1)}$, se puede demostrar que el número $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2}$ no es de Liouville.

Generalizando la desigualdad de Liouville, se pueden extender la clase de los números que se construyen de esta manera, como hace Borel[12] en 1899 para dos polinomios con coeficientes enteros o, en general, corrigiendo la demostración de Liouville se puede minorar una expresión de la forma $|P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)|$, cuando $P \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ es un polinomio en n variables con coeficientes enteros y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ números algebraicos tales que $P(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq 0$.

El método de Liouville conduce a las llamadas a menudo desigualdades triviales, son desigualdades explicitas que juegan un papel fundamental en todas las demostraciones de trascendencia.

Cantor(1845-1918)

El estudio de conjuntos de números trascendentes desde el punto de vista métrico fue iniciado por Cantor en 1873.

En primer lugar, Cantor demuestra que los números algebraicos forman un conjunto numerable, para lo cuál se aprovecha de la demostración dada por Dedekind, deducido del hecho que $\mathbb{Z}[X]$ es numerable, de ahí basta con numerar las raíces de cada polinomio irreducible.

Si denotamos por $\overline{\mathbb{Q}}$ el conjunto de los números algebraicos complejos, se pueden numerar los elementos de $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} : \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$

Cantor demuestra que en cada intervalo]a,b[de $\mathbb{R}$ existe al menos un número trascendente, es decir, los números trascendentes son densos en $\mathbb{R}$. Este resultado es atribuido por Cantor a Liouville.

Cantor procede de la siguiente forma. Como $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$, que es denso en $\mathbb{R}$, hay elementos de la sucesión $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ en]a,b[. Se consideran los dos primeros índices n_1, n_2 con $n_2 > n_1 \geqslant 1$ tal que $\alpha_{n_1}\ y\ \alpha_{n_2}$ pertenecen a ese intervalo .Sean a_1 el menor y b_1 el mayor de los dos números: $a < a_1 < b_1 < b$ (observemos que $\alpha_1 \notin]a_1, b_1[)$.

[12] Sur la nature arithmetique du nombre e, C.R Acad.Sci.Paris,128,1899 pag596

Sean a $_2$,b $_2$ (a $_2$ $<$ b $_2$) los dos primeros elementos de la sucesión $\{\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n\}$ en]a $_1$,b $_1$ [, con $\alpha_2 \notin]a_2, b_2]$. Se obtiene así una sucesión creciente $a_1 < a_2 < ...$ de números reales mayorados y una sucesión decreciente $b_1 > b_2 > ...$ de números reales minorados. Además $\alpha_n \notin]a_n, b_n]$. Cada sucesión tiene un límite denotado por a_∞ y b_∞ respectivamente. Se tiene entonces:

$$a < a_1 < a_2 < ... < a_\infty < b_\infty < ... < b_2 < b_1 < b$$

Elegimos $\chi \in [a_\infty, b_\infty]$, como, $\forall n, \chi \in [a_n, b_n] \quad (\chi \neq \alpha_n)$ entonces χ es trascendente pues no pertenece a la sucesión $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ .Como $[a_\infty, b_\infty] \cap \overline{\mathbb{Q}} = \phi$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, se tiene $a_\infty = b_\infty$ .Así, una vez elegida una numeración $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ de $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$, el procedimiento asocia a cada intervalo real]a ,b[con a $<$ b un número trascendente $\chi \ \ (\chi = a_\infty = b_\infty)$ .Esta construcción es efectiva en el sentido que se puede calcular χ con una precisión tan grande como se quiera.

Es fácil ver que si se parte a priori de un número trascendente $\chi \in \mathbb{R}$ y de un intervalo]a, b[que lo contiene, se puede numerar los números algebraicos reales de tal manera que la construcción precedente conduce justamente a χ . Así, el procedimiento de Cantor permite construir todos los números trascendentes. De la misma forma, se verifica también que el proceso diagonal, escribiendo en base 2 los números reales de]0, 1[, permite construir todos los números trascendentes de este intervalo.

Hermite (1822-1901)

La memoria de Charles Hermite, "Sobre la función exponencial", publicado en 1873 en forma de cuatro notas en Comptes Rendus (Vol 77), es el texto más importante sobre los números trascendentes hasta la publicación en 1929 de la memoria de Siegel. Su interés principal es la demostración de la trascendencia de e. Todas las demostraciones de trascendencia que aparecerán en los próximos 30 años, se basarán en la fórmula de Hermite. Los complementos aportados por Lindemann, Weierstrass y Hilbert entre otros, desarrollan el método existente de Hermite.

Hemos visto un enunciado de Dirichlet sobre la aproximación racional de un número real e incluso, Dirichlet, por el mismo método, da un enunciado más general sobre la aproximación simultánea de varios números reales:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_l$ números reales y Q entero mayor que 1, entonces existen enteros $q, p_1, p_2, ... p_l$ con $1 \leqslant q < Q^l$ y $|\alpha_i q - p_i| < Q^{-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant l)$

En particular, si uno al menos de los α_i es irracional, entonces existen una infinidad de l-uplas $\left(\frac{p_1}{q}, ..., \frac{p_l}{q}\right) \in \mathbb{Q}^l$ con $q > 0$ y $m.c.d\,(p_1, p_2, ..., p_l, q) = 1$ $\quad y \quad$ $\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q_i}\right| < q^{-1-\frac{1}{l}} \ \ (1 \leqslant i \leqslant l)$

Hermite propone establecer un enunciado análogo para funciones: sustituye los números $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ por funciones $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l$ y los números racionales $\frac{p_i}{q}$ por fracciones racionales $\frac{P_i}{Q}$ en lugar de exigir que $\alpha_i q - p_i$ tengan un valor absoluto pequeño, se exige que la función $\varphi_i Q - P_i$ tenga un cero.

Escribimos $\varphi_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n} z^n$ con $a_{j_n} \in \mathbb{C}$, se busca un polinomio $Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ tal que $\varphi_j(z) Q(z) = P_j(z) + \sum_{j \geqslant M+1} c_j z^j$ donde P $_j$ es un polinomio de grado menor o igual que $M - \mu_j$ dado.

En el desarrollo de $\varphi_j Q$ en el origen se anulan todos los términos $z^{M-\mu_j+1}, ..., z^{M-1}, z^M$, se tendrían $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_l$ ecuaciones lineales a resolver y se disponen de m+1 números, los coeficientes de Q. Si $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_l \leqslant m$, entonces existe una solución no trivial $Q \in \mathbb{C}[z]$ de grado menor o igual que m.

De esta forma Hermite presenta su método en el que se basan las demostraciones modernas de trascendencia, en las que a menudo, en contraste con lo que hace Hermite, no se da una solución explicita contentándose con la que da el principio del palomar. Hermite da fórmulas explicitas en el caso particular en el que las φ_i sean exponenciales. $\varphi_j(z) = \exp(a_j z)\ con\ a_j \in \mathbb{C}$.

Siguiendo a Hermite, se demuestra la irracionalidad de e ^{a} con a racional no nulo. Sea n un entero y $F(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ entonces:

$e^z - F(z) = z^{n+1} \sum_{k \geqslant 0} \frac{z^k}{(k+n+1)!} \Rightarrow \frac{1}{z^{n+1}} (e^z - F(z)) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{z^k}{(k+n+1)!}$ derivando n veces cada miembro, empezando por la izquierda:

$\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{e^z}{z^{n+1}} \right) = \frac{B_n(z)}{z^{2n+1}} e^z$ donde B $_n$ (z) es un polinomio de grado menor o igual que n con coeficientes enteros.

$\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{F(z)}{z^{n+1}} \right) = \frac{A_n(z)}{z^{2n+1}}^z$ con A $_n$ (z) polinomio con coeficientes enteros.

La derivada del miembro de la derecha es $\frac{1}{n!} R_n(z)$ con $R_n(z) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{n!\,(k+n)!}{(k+2n+1)!} \frac{z^k}{k!}$. Como $\frac{n!\,(k+1)!}{(k+2n+1)!} \leqslant 1$, así $|R_n(z)| \leqslant e^{|z|}$, reagrupando tendremos:

$B_n(z) e^z - A_n z = \frac{1}{n!} z^{2n+1} R_n(z)$. Para demostrar que e^α es irracional cuando α es natural, basta con sustituir z por α en la expresión anterior, $\frac{\alpha^{2n+1}}{n!}$ tiende a cero y $R_n(\alpha) \neq 0$. La irracionalidad la dará el criterio de Liouville.

La irracionalidad de e^α con α racional no nulo, consiste en aproximar la función e ^{z} por una fracción racional $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$

El problema de la trascendencia es un poco más delicado. Hermite lo resuelve mediante la aproximación simultánea de las funciones e ^{kz} por fracciones racionales, un caso particular de las llamadas aproximaciones de Padé

Lindemann (1852-1939)

El artículo principal de Lindemann "Uber die zahl π " apareció en la revista Mathematishe Analenn en el número de Abril, Junio de 1882.

El 22 de Junio de 1882, Weierstrass presentó a la Academia de Berlin la trascendencia de pi. El 10 de Julio de 1882 se publicó en Comptes Rendus[13] un extracto de una carta de Lindemann a Hermite, la última frase era:"*los logaritmos neperianos de todos los números racionales, exceptuando la*

[13] C.R.Acad.Sci. París,95,1882,72-74

unidad, y de todos los irracionales algebraicos, son números trascendentes". Es lo que hoy conocemos como teorema de Hermite-Lindemann y que se enuncia de manera equivalente:

Si α *es un número algebraico no nulo entonces* e^{α} *es un número trascendente.*
La trascendencia de π resulta de la fórmula de Euler $e^{i\pi}+1=0$

El texto principal de Lindemann contiene una demostración bastante detallada de la trascendencia de pi, y más generalmente de $\log\alpha$ para α racional no nulo. También demuestra que para α algebraico no nulo, el número e^{α} es irracional. El enunciado más general que presenta, conocido hoy como teorema de Lindemann-Weierstrass dice:

Si $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ *son números algebraicos distintos dos a dos, y* $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ *números algebraicos no todos nulos, entonces* $\beta_1 e^{\alpha_1}+\beta_2 e^{\alpha_2}+...+\beta_2 e^{\alpha_n}\neq 0$

Haciendo $\alpha_1=0, n=2, \beta_n=-1$ tenemos $e^{\alpha_2}\neq\beta_1$, es el teorema de Hermite-Lindemann

Al final del texto Lindemann dice: "me reservo publicar posteriormente una exposición detallada de las demostraciones que han sido esbozadas aquí". Lamentablemente cambió de objetivos y se dedicó, sin demasiado éxito, al último teorema de Fermat.

Weierstrass (1815 – 1897)

En su memoria *Zu Lindemann's Abhandlung:"Über die Ludolph'sche Zahl*" presentada a la Academia de Ciencias de Berlin el 3 de Diciembre de 1885, dice en la introducción que su intención es dar una prueba lo mas elemental posible, basándose solo en los resultados bien conocidos del teorema de Lindemann. Añade: "*Quiero hacer notar que la publicación de este artículo, elaborado en el verano de 1882 y expuesto, en lo esencial, el 26 de Octubre del mismo año a la Academia, ha sido realizado con el beneplácito del señor Lindemann y que mi único interés es simplificar o completar las demostraciones de sus teoremas por el dadas o sugeridas, sin modificaciones esenciales de la idea directriz. La simplificación proviene sobre todo del hecho de que yo no supongo, contrariamente al señor Lindemann, que el lector conoce la celebre memoria de Hermite "Sobre la función exponencial"*.

El texto de Weierstrass contiene la primera demostración completa y detallada del teorema de Lindemann – Weierstrass.

Un aspecto destacado del teorema, y que sin embargo ni Lindemann ni Weierstrass mencionan explícitamente, es que conduce a un enunciado de independencia algebraica. En efecto, un enunciado equivalente del teorema es "*Si* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ *son números algebraicos linealmente independientes sobre* $\mathbb{Q}$ *, entonces los números* $e^{\alpha_1},e^{\alpha_2},...,e^{\alpha_n}$ *son algebraicamente independientes*" , es decir, $\forall P\in\mathbb{Z}[x_1,...,x_n]: P\neq 0\Rightarrow P(e^{\alpha_1},...,e^{\alpha_n})\neq 0$.

Un siglo después no hay muchos otros resultados generales de independencia algebraica. Dejando a un lado los números de Liouville, se tiene el método de Siegel – Shidlovskii para las e-funciones hipergeométricas, de Bessel.., el de Mahler para funciones que satisfacen ciertas ecuaciones funcionales y el de Gelfand, desarrollado por Choodnovski, Wüstholz y Philippon para funciones exponenciales paramétricas de un grupo algebraico.

En 1886, Weierstrass vuelve al estudio de los números trascendentes pero con otro punto de vista. El teorema de Hermite-Lindemann concierne a una función trascendente, la función exponencial, y afirma que toma valores trascendentes en todo punto algebraico α , con una sola excepción $\alpha=0$. Se pregunta si, siendo f una función trascendente, su valor en un punto algebraico α es "en general" trascendente.

Weierstrass da un ejemplo de una función f trascendente que en todo punto racional toma un valor racional, y afirma la existencia de una función entera trascendente que en todo punto algebraico toma un valor algebraico (Hilbert, en el enunciado del séptimo problema, afirma que eso es algo conocido).

Esta afirmación fue demostrada por Stäckel en 1895 usando una única propiedad de los números algebraicos: forman un conjunto denso numerable.

No hay pues una conjetura general sobre la trascendencia de valores de funciones enteras, es necesario restringirse a clases de funciones con propiedades específicas. Las ecuaciones diferenciales o funcionales deben intervenir en las demostraciones. Aun restringiéndose a la función exponencial, queda mucho por hacer. Uno de los principios abiertos es la conjetura de Schanuel: "Si $x_1, x_2, ..., x_n$ son números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces entre los $x_1, x_2, ..., x_n, e^{x_1}, e^{x_2}, ..., e^{x_n}$ hay al menos n algebraicamente independientes. El teorema de Lindemann $-$ Weierstrass responde al caso particular de $x_1, x_2, ..., x_n$ algebraicos.

1.2 Los números trascendentes en el siglo XX

A finales del siglo XIX las demostraciones de trascendencia se refinan, se simplifican y se vuelven alrededor de la exponencial pero no parece emerger progreso alguno.

En el Congreso Internacional de matemáticas de Paris, en 1900, D. Hilbert propone 23 problemas. En el séptimo de su lista, conjetura lo siguiente:

La expresión α^β para una base α algebraica y un exponente β irracional algebraico, por ejemplo los números $e^{\sqrt{2}} o e^\pi = i^{-2i}$, son siempre un número trascendente o al menos un número irracional.

Hilbert confía de buen gusto a quien le quiera escuchar que este problema no se solucionará en mucho tiempo, la hipótesis de Riemann sobre los ceros de la función ζ o el gran teorema de Fermat le parecen más accesibles. Estaba equivocado.

En 1909 A. Thue mejora de manera significativa el teorema de Liouville:

Para todo número algebraico α de grado s > 1 $c(\alpha) \leqslant \dfrac{s}{2} + 1$.

En 1921, Siegel da $c(\alpha) \leqslant 2\sqrt{s}$, en 1947 Gelfond y Dyson independientemente llegan a $c(\alpha) \leqslant \sqrt{2s}$. En 1955 Roth establece $c(\alpha) = 2$, es decir,

Para todo número algebraico α y todo $\varepsilon > 0$, la desigualdad $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < q^{-(2+\varepsilon)}$ no tiene mas que un número finito de soluciones enteras p y q > 0.

En 1929 Gelfand da un primer avance de la resolución del séptimo problema de Hilbert al demostrar que: *Una determinación cualquiera de α^β es trascendente para todo número algebraico α distinto de cero y uno y todo número cuadrático imaginario irracional β .*

En 1930 Kuzmin extiende el resultado de Gelfand a los β cuadráticos irracionales reales. Para resolver el caso general hay que esperar hasta 1934 en que, de manera independiente, Gelfand y Schneider resuelven el séptimo problema con lo que se conoce como teorema de Gelfand-Schneider:

Sean α_1, α_2 *dos números algebraicos no nulos y* $\log \alpha_1, \log \alpha_2$ *determinaciones cualesquiera de sus logaritmos. Si* $\log \alpha_1, \log \alpha_2$ *son linealmente independientes sobre* $\mathbb{Q}$ *, entonces son linealmente independientes sobre* $\overline{\mathbb{Q}}$

En 1966 A. Baker (medalla Field) generaliza a un número cualquiera de logaritmos el resultado de Gelfand-Schneider, obteniendo como aplicación:"*si* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, .., \beta_n$ *son algebraicos con* α_j *distinto de cero y uno para todo* j *y* $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ *linealmente independientes sobre* $\mathbb{Q}$ *, entonces* $\alpha_1^{\beta_1}, \alpha_2^{\beta_2}, ..., \alpha_n^{\beta_n}$ *es trascendente".*

En 1970 W,Schmidt, basándose en los trabajos de Roth, resuelve la cuestión concerniente a la aproximación simultanea de números algebraicos por racionales.

En la actualidad siguen abiertas una serie de conjeturas, como por ejemplo la de las cuatro exponenciales:

Sean x_1, x_2 *dos números complejos* $\mathbb{Q}$ *libres e* y_1, y_2 *igualmente dos números complejos* $\mathbb{Q}$ *libres, entonces uno de los cuatro números* $e^{x_i y_j}$ *es trascendente (* $1 \leqslant i, j \leqslant 2$)

La conjetura de S.Schanuel , de 1966, hasta ahora se muestra totalmente inaccesible:

Si $x_1, x_2, ..., x_n$ *son números complejos* $\mathbb{Q}$ *libres, entonces entre los 2n números* $x_1, x_2, ..., x_n, e^{x_1}, e^{x_2}, ..., e^{x_n}$ *al menos n son linealmente independientes.*

Se piensa que esta conjetura incluye todos los resultados de todas las conjeturas razonadas sobre los valores de la exponencial.

Bibliografía

[1] Apostol, T. M.*Análisis matemático,* Editorial reverté, Barcelona. 1994

[2] Baker, A. *Transcendental number theory.* Cambridge, 1990.

[3] Boyer C.B. *Historia de la matemática* , Madrid: Alianza Editorial,

[4] Bourbaki, N. *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid

[5] Collete,J.L.*Historia de las matemáticas*, siglo XXI, Madrid

[6] Euler, L. "De fractionibus continuis dissertatio". Comm. Acad. Sci. Petropol. 9 (1744);

[7] Euler, L. "Opera Omnia Ser". I, vol 14, commentationes Analyticae

[8] Euler, L. *Introductio in Analysin Infinitorum.* Lausanne Universite.

[9] Euler,L."De relatione inter ternas pluresve quantitates instituend", Petersburger Academie Notiz. Exhib., August 14, 1775;

[10] Hua, L.K.*Introduction to number theory.* Springer. 1982.

[11] Heath, Th. *History of Greek Mathematics.* Oxford,Clarendon. 1921.

[12] Jones, J.P. & Toporowski, S. "Irrational numbers." Amer. Math. Month. 80 423-424.

[13] Kline ,M. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II),AU/724, Madrid

[14] Kline ,M. *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI de España editores

[15] J.H. Lambert, J.H. ,*Memoria sobre algunas propiedades notables de cantidades trascendentes circulares y logarítmicas*, Memoires de l'Academie des sciences de Berlin,17 Math Werke T II

[16] O'Connor J. J. y E.F. Robertson. "The Number e.The MacTutor History of Mathematics Archive". `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html`

[17] Rey Pastor, J., y Babini, J. *Historia de la Matemática*, 2 Vols., 2da.edición, Gedisa, Barcelona,.

[18] Ríbnikov, K. *Historia de las Matemáticas*, Editorial Mir, Moscú,.

[19] Spivak, M. *Calculus*, Editorial Reverté, Barcelona

[20] Taton, R. *Historía general de la ciencia*,(VIII),Orbis, Barcelona

[21] van der Waerden, B. L.. *Science Awakening.* New York.Oxford University Press

[22] Weisstein, E. "Irrational Number". MathWorld−A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/IrrationalNumber.html`.