Algunos Aspectos de las Ecuaciones Autónomas.

José Rosales Ortega
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

30 de diciembre de 2006

Resumen

Se presentan teoremas básicos de ecuaciones diferenciales autónomas y algunos resultados interesantes sobre tales teoremas que permiten describir de manera efectiva ciertas propiedades de las órbitas de tales sistemas.

Palabras Clave: Ecuación diferencial, autónoma, órbita, sistemas dinámicos, trayectorias, grupo.

Revista Digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr), volumen 7, número 2.

1. Introducción

Sea Φ un abierto de $I\!R^n$ y $f : \Phi \longrightarrow I\!R^n$ una función. La ecuación diferencial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} \;=\; f(\vec{x}), \tag{1}$$

se llamará **autónoma** si el lado derecho de (1) no depende de la variable independiente t. Otro concepto importante en este artículo será la noción de punto crítico o punto de equilibrio. Se dice que el punto $a \in I\!R^n$ es un punto de equilibrio de la ecuación (1) si $f(a) = 0$. La importancia de los puntos de equilibrio es que dan origen a soluciones constantes del sistema, es decir que si a es un punto de equilibrio del sistema (1), entonces $\vec{x}(t) = a$ es una solución de (1).

Si $\vec{x}(t)$ es una solución de (1) diremos que la trayectoria de tal solución es el conjunto $\{(t, \vec{x}(t)) : t \;\text{ es un número real}\}$, por otra parte el cojunto $\{\vec{x}(t) : t \;\text{ es un número real}\}$ se llamará la **órbita** de la solución.

La teoría que trataremos es llamada cualitativa porque nos ofrecerá información sobre las órbitas de las soluciones del sistema sin necesidad de encontrar explícitamente tales soluciones, es decir no se necesitará resolver un sistema para obtener información sobre sus órbitas.

El primer teorema que estableceremos es de particular importancia en el estudio de los sistemas autónomos. Indica que las soluciones de un sistema autónomo se pueden en cierto sentido "trasladar".

Teorema 1 *Si $\vec{x} :]\tau_1, \tau_2[\longrightarrow I\!R^n$ es una solución de la ecuación (1), entonces para todo $c \in I\!R$*

$$\vec{x}^* :]\tau_1 - c, \tau_2 - c[\longrightarrow I\!R^n,$$

definida por $\vec{x}^*(t) = \vec{x}(t+c)$, es también una solución maximal de la misma ecuación.

En efecto, para todo $t \in]\tau_1, \tau_2[$

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = f(\vec{x}(t)).$$

Ahora para todo $t \in]\tau_1 - c, \tau_2 - c[$

$$\frac{d\vec{x}(t+c)}{dt} = f(\vec{x}(t+c)) = f(\vec{x}^*(t)).$$

Además,

$$\frac{d\vec{x}(t+c)}{dt} = \frac{d\vec{x}(t+c)}{dt}\frac{d(t+c)}{dt} = \frac{d\vec{x}^*(t)}{dt},$$

de donde se concluye que

$$\frac{d\vec{x}^*(t)}{dt} = f(\vec{x}^*(t)).$$

La interpretación del teorema anterior es bastante simple. Si $\vec{x} = \phi(t)$ es una solución de (1) y si sustituimos t por $t + c$, entonces obtenemos una nueva función $\vec{x}^*(t) = \phi(t + c)$ la cual también es solución de (1). Si por ejemplo, $x = \tan t$ y $y = \sec^2 t$ son soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2xy \end{cases}$$

Entonces, $x = \tan(t + c)$ y $y = \sec^2(t + c)$ también son soluciones.

Como una observación importante se podría señalar que el teorema anterior no es válido si la función f del lado derecho de (1) depende explícitamente de la variable t.

Enunciamos a continuación un teorema de existencia y unicidad para sistemas autónomos. La demostración se puede consultar en [5].

Teorema 2 *Sean $f : \Phi \longrightarrow I\!R^n$ y la ecuación diferencial*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}).$$

Dadas las hipótesis del teorema global de existencia y unicidad, entonces por todo punto de Φ pasa una y solamente una órbita maximal

Un teorema de particular interés en sistemas dinámicos es el siguiente.

Teorema 3 *Sea $\vec{x} = \phi(t)$ una solución de la ecuación* (1). *Si $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0)$, para algunos t_0 y $T > 0$ entonces $\phi(t + T)$ es idénticamente igual a $\phi(t)$.*

Lo que establece este teorema es que si una solución $\vec{x}(t)$ de la ecuación (1) regresa a su valor inicial después de algún tiempo $T > 0$, entonces tal solución debe ser periódica con periodo T. La demostración de este resultado es simple. Sea $\vec{x} = \phi(t)$ una solución de (1) y supóngase que $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0)$, para algunos t_0 y $T > 0$. Entonces la función $\psi(t) = \phi(t + T)$ es también solución (1) que coincide con $\phi(t)$ en el tiempo $t = t_0$. Por el teorema de existencia y unicidad se concluye el resultado.

La propiedad anterior es muy útil sobre todo en el caso en que $n = 2$. Por ejemplo sea $x = x(t)$ y $y = y(t)$ una solución periódica del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Si $x(t + T) = x(t)$ y $y(t + T) = y(t)$, entonces la órbita de la solución es una curva cerrada C en el plano xy, ya que en cualquier tiempo $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, la solución se mueve a lo largo de C. Recíprocamente, supongamos que la órbita de la solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ de la ecuación anterior es una curva cerrada que no contiene puntos críticos de (2). Entonces la solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ es periódica. En efecto, observemos que que tal solución se mueve a lo largo de su órbita con velocidad $[x^2(t) + y^2(t)]^{1/2}$. Si su órbita no contiene puntos críticos de (2), entonces la función $[x^2(t) + y^2(t)]^{1/2}$ posee un mínimo positivo para (x, y) en C. Por lo tanto, la órbita de $x = x(t)$, $y = y(t)$ debe regresar a su punto inicial $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ en algún tiempo finito T, pero esto implica que $x(t+T) = x(t)$ y que $y(t+T) = y(t)$, para toda t. Como un ejemplo interesante a esto, consideremos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z + z^3 = 0.$$

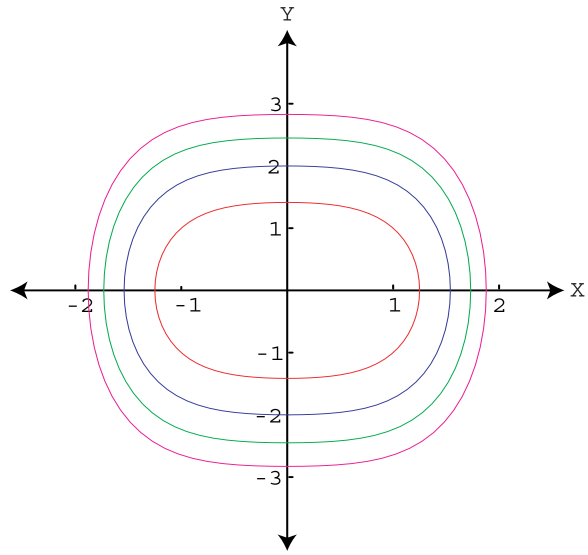
Mostremos que cualquier solución de esta ecuación es periódica. Lo primero que se hace es pasar la ecuación a un sistema de ecuaciones equivalentes, es decir que si hacemos $x = z$ y $y = dz/dt$, entonces obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - x^3. \end{aligned} \right.$$

Las órbitas del sistema anterior son las curvas solución de

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4} = c^2$$

de la ecuación $dy/dx = -(x+x^3)/y$. El único punto crítico del sistema es $(0,0)$, por consiguiente toda solución $x = z(t)$, $y = z'(t)$ es una función periódica en el tiempo. Sin embargo, no es posible calcular el período de ninguna solución particular.



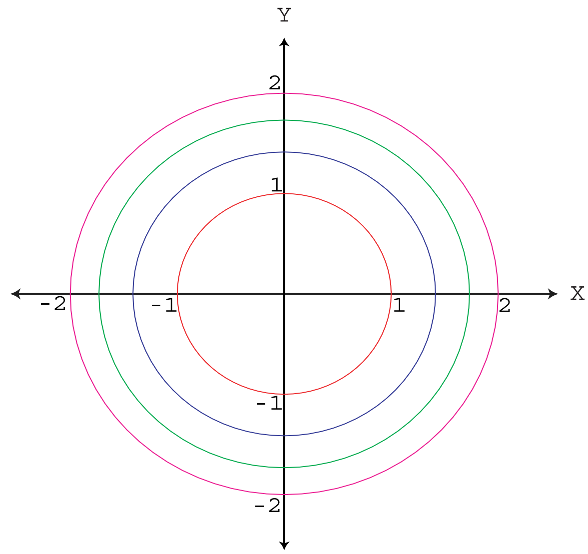
Otro ejemplo interesante es el siguiente. Demostrar que toda solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ye^{1+x^2+y^2} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -xe^{1+x^2+y^2} \end{cases}$$

es periódica. En primer lugar observemos que las órbitas de la ecuación anterior son las curvas solución $x^2 + y^2 = c^2$ de la ecuación de primer orden $dy/dx = -x/y$. Es más, $x = 0$ y $y = 0$ es el único punto crítico del sistema. Por lo tanto, toda solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ del sistema anterior es una función periódica del tiempo.

Por último, se enunciarán y demostrarán resultados sobre el conjunto de los períodos de la función $x^*(t) = x(t+c)$. Básicamente se mostrará que sólo existen tres tipos de trayectorias: curvas cerradas, un único punto y las trayectorias sin puntos dobles.

Teorema 4 *El conjunto de todos los períodos de la función definida por $\vec{x}^*(t) = \vec{x}(t+c)$, es un subgrupo cerrado del grupo de los números reales.*



Sean T_1 y T_2 dos períodos de $x^*(t)$, entonces se sigue que

$$x^*(t \pm T_1 + T_2) \;=\; x^*(t + T_1) \;=\; x^*(t),$$

de donde se deduce que $T_1 \pm T_2$ es también un período. Esto demuestra que el conjunto de los períodos es un subgrupo. Falta demostrar que tal subgrupo es cerrado. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de períodos tales que $T_n \longrightarrow T$. Del hecho de que $x^*(t)$ es continua se sigue que

$$x^*(t+T) \;=\; \lim_{n\longrightarrow\infty} x^*(t+T_n) \;=\; \lim_{n\longrightarrow\infty} x^*(t) \;=\; x^*(t).$$

Esto demuestra que el conjunto de períodos es un conjunto cerrado.
Otro resultado fundamental es el siguiente.

Teorema 5 *Todo subgrupo cerrado G de $I\!R$ es alguna de las siguientes posibilidades:*

- $I\!R$.
- $\{0\}$.
- $\{kT_0 : k$ *un número entero*$\}$, *para algún* T_0.

Supongamos que $G \neq \{0\}$, entonces existe al menos un elemento positivo. Esto se sigue del hecho de que si $t < 0$, entonces su inverso $-t > 0$ y pertenece a G. Sea $T_0 = Inf\ \{t : t \in G,\ \ t > 0\}$. Es fácil mostrar que $0 \leq T_0 < \infty$. Si $T_0 > 0$, se sigue que $T_0 \in G$, ya que G es un subgrupo, y además que todos los elementos de la forma kT_0 también pertenecen a G. Mostremos que cualquier elemento q ue no sea de esta forma no puede estar en G. En efecto, los elementos de forma kT_0 dividen a $I\!R$ en intervalos abiertos de la forma $]kT_0, (k+1)T_0[$. Supongamos que un elemento t de estos intervalos también está en G, entonces tendríamos que $t - kT_0 > 0$ y que $t - kT_0 \in G$. Como $t < (k+1)T_0$, se sigue que

$$t \,-\, kT_0 \;<\; (k+1)T_0 \,-\, kT_0,$$

de donde resulta que $t - kT_0 < T_0$, lo que contradice la suposición de que T_0 es el ínfimo de los elementos positivos de G. Por lo tanto, el caso $T_0 > 0$ no se puede dar.

Si $T_0 = 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe en G un elemento t tal que, $0 < t < \epsilon$, y esto significa que los elementos del tipo kt pertenecen a G y dividen a $I\!R$ en intervalos de longitud menor que ϵ. De la arbitrariedad de ϵ se puede concluir que en cualquier vecindad de un elemento de $I\!R$ siempre existen elementos de G, y como G es cerrado, se sigue que $G = I\!R$. Esto demuestra el teorema.

De los teoremas anteriores podemos deducir que el conjunto de todos los períodos de $x^*(t)$ es o todo $I\!R$ o todos los múltiplos enteros del menor período T_0. Esto significa que si una órbita se corta a sí misma existen dos posibilidades:

- La solución es constante y la órbita se reduce a un único punto, el cual se denomina punto de reposo.
- La solución es periódica con período T_0 y la órbita es una curva cerrada, la cual se denomina ciclo.

Se puede concluir que solamente existen tres tipos de órbitas , las dos anteriores y las órbitas sin puntos dobles, es decir, que no se autointersecan. De los tres tipos, el estudio del primero resulta de gran importancia desde elpunto de vista de las aplicaciones prácticas. En particular resulta muy útil determinar el comportamiento de un sistema físico, en una vecindad del punto de reposo.

Referencias

[1] J. Hale and H.Koçąk.(1991) *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York.

[2] Morris Hirsch and Stephen Smale.(1983) *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Universidad Textos, España.

[3] Jacob Palis e Welington de Melo.(1978) *Introducao aos sistemas dinamicos*, Projeto Euclides, Brasil.

[4] Lawrence Perko.(1991) *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.

[5] N. Rouche et J. Mawhin.(1973) *Équations Diffèrentilles Ordinaires*, Masson Éditeurs, Francia.