Matemática Educativa: un camino entre filiaciones y rupturas

Rosa María Farfán
Departamento de matemática educativa, Cinvestav – IPN. México
rfarfan@mail.cinvestav.mx

Resumen

Si bien es cierto que las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida en sociedad, el estudio sistemático para localizar los fenómenos que la caracterizan, tendrá apenas unas décadas de existencia. De entonces a la fecha se han formado varias generaciones de matemáticos educativos y, en ese proceso, la disciplina se ha ido constituyendo como un campo de investigación autónomo que ha ganado para sí la legitimidad de una problemática de estudio. En este escrito intentaremos señalar, a partir de diferentes momentos, las diversas filiaciones y rupturas, que a nuestro juicio se han dado y se dan, especialmente con la escuela empirista en el ánimo de aportar elementos al debate sobre la pertinencia e identidad de nuestras investigaciones.

Presentación

La matemática educativa nace como disciplina científica teniendo como presupuestos explícitos: la voluntad (y la afirmación de la posibilidad) de abordar razonablemente, sistemáticamente, científicamente y con especificidad los fenómenos de enseñanza de las matemáticas. Arriesgando una definición se podría decir que la matemática educativa es la ciencia que estudia, para un campo particular (las matemáticas), los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión de la "cultura" propia de una institución (la científica) y las condiciones de la adquisición de conocimientos del que aprende.

Asumimos como *problemática* de estudio para la *matemática educativa*, el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza. Dicha introducción del saber matemático al sistema didáctico, obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afectan también a las relaciones entre estudiantes y profesor. Este proceso de incorporación de conocimientos y prácticas altamente especializados al sistema didáctico, plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados a fin de entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas de los actores educativos.

En el devenir del desarrollo disciplinar, podemos establecer filiaciones y rupturas con el saber: matemático, psicológico, etnográfico y cultural que han dado como consecuencia diversas miradas, a saber: *una mirada sin alumnos, una mirada sin escuela, una mirada sin escenarios y una mirada sociocultural.* En lo que sigue abordaremos esta discusión, previamente estableceremos los pautas epistemológicas que seguimos.

En general para las ciencias humanas: la separación entre la opinión común y el discurso científico es mas impreciso que en otros casos (Bourdieu, 1973), puesto que la familiaridad con el universo educativo constituye el obstáculo epistemológico por excelencia para el matemático educativo porque produce continuamente concepciones o sistematizaciones ficticias, al mismo tiempo que sus condiciones de credibilidad. De modo que, como señala Bachelard: *el hecho se conquista contra la ilusión del saber inmediato... op cit*; asimismo debe recordarse reiteradamente en el curso de la investigación que: una investigación seria conduce a reunir lo que vulgarmente se separa o a distinguir lo que vulgarmente se confunde... op cit. Así una investigación científica inicia señalando explícitamente las rupturas que hubo de superar para plantear el estudio.

Por otro lado la noción de vigilancia teórica es consustancial a la investigación puesto que *lo que a menudo se observa no es pertinente ni significante, y lo que es pertinente y significante es frecuentemente difícil de observar en un laboratorio de física o en cualquier otra ciencia... op cit* y es justamente la teoría quién ofrece el balance. En términos operativos: *Una experiencia no es otra cosa que una pregunta dirigida a la naturaleza, y la medida la lectura de la respuesta. Pero antes de realizar la experiencia, se debe pensarla, es decir formular la pregunta que se quiere dirigir a la naturaleza, y antes de obtener una conclusión de la medida, se debe interpretarla, es decir, comprender la respuesta de la naturaleza...* Planck citado por Bordieu en *op cit*. Es decir, que los hechos que convalidan la teoría, valen lo que vale la teoría que validan.

La vigilancia epistemológica: Surge en un esfuerzo por captar la lógica del error para construir la lógica del descubrimiento de la verdad. En la práctica científica no se puede pretender construir problemáticas o teorías nuevas sino cuando se renuncia a la ambición imposible de decirlo todo, sobre todas las cosas y, además, ordenadamente.... *el hecho científico se conquista, construye, comprueba e implica rechazar al mismo tiempo el empirismo que reduce el acto científico a una comprobación ... op cit*

Matemática Educativa filial del: *Saber matemático* lo que produce *una mirada sin alumnos*

La problemática clásica en matemática educativa se ocupó de diseñar presentaciones del contenido matemático escolar que se consideraban mas accesibles para los alumnos y para los profesores que aquéllas otras presentaciones llamadas tradicionales. Se asumía que una presentación mejor adaptada a la escuela y a sus agentes podría ser construida sólo con la reflexión del profesional de la matemática. Siguiendo esta línea, se produjeron libros de texto y materiales educativos sin tomar en consideración sistemáticamente otros factores como aquellos de naturaleza cognitiva o afectiva o bien los relativos a las cuestiones socio culturales del conocimiento. Se buscaba producir aquello que la escuela habría de consumir, sin estudiar a profundidad la cultura escolar.

Por ejemplo en el primer número de la revista *Educational Studies in Mathematics* de 1968 se presentan recomendaciones sobre la coordinación de la enseñanza entre los cursos de física y matemáticas. Cabe señalar que no se ofrecen referencias bibliográficas ni referencias sobre un marco teórico a seguir. De entre dichas recomendaciones, destacamos las siguientes a manera de ejemplo:

Las matemáticas constituyen una muy característica actividad de la mente humana. Todos los niños deben ser educados en matemáticas.

Las matemáticas se desarrollan cada vez más hacia una ciencia de las estructuras generales. Estas cuentan con un destacable poder de aplicación, uniformación y unificación. Su conocimiento y el manejo adecuado y su utilización en la realidad son el objetivo real de la enseñanza de las matemáticas. Algunas de esas estructuras son de carácter elemental y deben ser usadas desde la niñez.... Otras, más sofisticadas debe ser adquiridas sólo hasta el fin de la secundaria.

La enseñanza de la física y las matemáticas debe estar bien coordinada.

El mundo físico deviene inteligible a través de conceptos y de su formulación matemática [...] es necesario desarrollar aptitudes en los estudiantes para identificar estructuras matemáticas presentes en situaciones físicas ... particularmente del cálculo algebraico... Para asegurarse de que esto es entendido, los maestros de ambas disciplinas deben explicar cómo esos lenguajes se conectan.

Otro ejemplo de este escenario se presenta en Kent y Hedger (1980). En donde los autores recomiendan que para ver que $3x = 12$ es equivalente a $x = 12/3$... en nuestra experiencia algunos alumnos pueden ver este método en términos de un "movimiento" de los símbolos al resolver la ecuación. Necesitamos "mover" el 3 de su punto de inicio para colocarlo debajo del 12 ofreciendo el diagrama de tal movimiento.

Estas aproximaciones didácticas sin alumnos, hicieron evidente la necesidad de atender aspectos, hasta entonces transparentes para los matemáticos educativos, como el papel que desempeñan las acciones del profesor en los actos de aprendizaje de sus alumnos, o la forma en que los diálogos intervienen en los procesos de desarrollo del pensamiento. En cierta medida la problemática había sido planteada, se le reconoció como un tema de interés; empero, no había sido completamente estudiada. Era necesario modificar y ampliar la problemática de estudio al incluir explícitamente al aprendizaje del alumno como factor central del diseño curricular y para el desarrollo de la instrucción en una clase habitual de matemáticas.

Matemática Educativa filial del: *Saber psicológico lo que produce una mirada sin escuela*

Hacia la década de los 80's se presentó en la International Conference of Mathematics Education (ICME – 4) un programa de acción en torno del cual se desarrolló paulatinamente nuestra disciplina. A partir de planteamientos como aquel del profesor Freudenthal al someter a consideración preguntas como la siguiente: ¿Cómo aprenden las personas? y ¿cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje? En nuestra opinión, ello dio pie a un nuevo paradigma de investigación que modificaba su objeto y su método de estudio, derivando en una aproximación cognitiva a la investigación que realiza observación y descripción sistemática de los logros de los estudiantes y de las diversas experiencias de aprendizaje. Por supuesto una de las pretensiones de esta aproximación fue que estos estudios cognitivos, en tanto dieran explicación de cómo se aprende matemáticas, pudiesen dar pautas (o al menos aproximaciones) para la articulación de los principios que subyacen a los futuros diseños curriculares.

Uno de los primeros e ilustrativos trabajos en esta aproximación es el de (Herscovics, 1980) publicado en la revista Recherches en didactique des Mathématiques con el titulo "Constructing meaning for linear equations: a problem of representation". El estudio señala como marco teórico un modelo de entendimiento que distingue entre contenido y forma matemática e identifica cuatro modos de entendimiento: instrumental, relacional, intuitivo y formal con base en los trabajos de Piaget, Bruner y Bauersfeld, entre otros. Asimismo se explicita como metodología lo que los autores llaman "Russian teaching experiment" basándose en Menchinskaya (1969) y Kantowski (1979) en esta aproximación y al contrario de las presentaciones escolares usuales se parte de las formas geométricas hacia las algebraicas.

La investigación supone implícitamente que para la construcción de significado de las nuevas formas y operaciones algebraicas, el aprendiz no tendría dificultad en usarlas. Empero la evidencia dice lo contrario:

Los estudiantes tienen dificultades al usar sus ecuaciones para generar pares ordenados a pesar de que éstos les permiten inicialmente derivar las ecuaciones. Conservan el concepto de pendiente y son concientes de su invarianza, pero no pueden recordar o derivar la fórmula para la pendiente. A pesar de que identifican una ecuación dada (y = 2x) con su gráfica, no pueden generar ninguna de las otras ecuaciones lineales. En el postest los 3 alumnos pudieron reconocer y verbalizar la restricción característica en las coordenadas de puntos en una línea horizontal, pero no podían escribir la ecuación.

En esta perspectiva y para el caso de las matemáticas escolares del nivel universitario, uno de los primeros y muy representativos estudios fue el contenido en (Tall y Vinner, 1981). En él se introducen y desarrollan términos como "imagen del concepto" y "definición del concepto". Se dice entonces que el estudiante para definir si un objeto matemático dado es un ejemplo ó un contra ejemplo de un concepto no decide necesariamente sobre la base de definiciones aprendidas, sino con relación a la imagen conceptual que ha sido forjada al filo de su experiencia y que representa *"la total estructura cognitiva asociada con el concepto que incluye todas las imágenes mentales, propiedades asociadas y procesos"*. Así los estudiantes pueden dar una definición conjuntista de la noción de función (definición del concepto) y negarse a reconocer como una función a una relación funcional definida por dos expresiones algebraicas diferentes sobre dos intervalos: "una función dada por dos fórmulas". De la misma forma, pueden negarse a considerar como iguales a funciones matemáticamente equivalentes pero definidas por procesos diferentes. Ello a causa de que su imagen conceptual de una función esta ligada a su representación algebraica única.

A la clásica pregunta: a) cómo es 0.9999.. respecto de 1 y b) Encuentre el valor de la suma 9/10 + 9/102 + ... La respuesta mayoritaria en el primer caso es: 0.999... 1 y se acompaña de diversas justificaciones producto de una visión de la escritura decimal ilimitada: "al escribir 0.999999 como no se detiene jamás, debe ser inferior a uno", Se dice: "es infinitamente próximo a 1, pero no es igual al 1", "justo antes, debe ser el último número antes de 1". En el segundo caso la respuesta mayoritaria: 1, se obtiene por activación del procedimiento de cálculo de la suma de una particular serie geométrica.

Este tipo de estudios proporcionaron una herramienta útil y eficaz para estudiar el comportamiento cognitivo de los estudiantes ante algún tipo de tareas matemáticas; empero, creemos que el desempeño de los alumnos no puede reducirse a la dimensión cognitiva. Pues las relaciones que ellos mantienen con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forjan más globalmente sobre los que es la actividad matemática, de sus ideas de lo que es el aprendizaje de las matemáticas, de su posición con relación de las matemáticas y más globalmente incluso, de su status como alumno. La forma en la que vive una situación de enseñanza y sus producciones matemáticas, en ese contexto, son condicionadas por las características de la costumbre didáctica. Su comportamiento cognitivo en el seno de la institución escolar puede ser entendida de una manera muy diferente a aquella que brinda su comportamiento cognitivo. La vida en las instituciones matiza los procesos del pensamiento. El término "institución", podemos tomarlo en un sentido amplio: la familia, la clase, la escuela, el sistema educativo, el ambiente social constituido también por otro tipo de organizaciones humanas. Por ejemplo, los estudiantes suelen creer que...

$2^0 = 0$; $2^0 = 2$; $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)=-8$; $2^{-1} = -2$; $\text{sen}x/x = \text{sen}$; $(10 + 2)/(5 + 2) = 10/5$

(Martínez, 2000) encontró que esas dificultades se presentan en la historia y se inducen desde la enseñanza a través de los textos. Por lo que el problema es más amplio que el de las estructuras cognitivas de los estudiantes.

Matemática Educativa filial del: *Saber etnográfico* lo que produce *una mirada sin escenarios*

Otra forma de abordar los problemas la constituyeron las aproximaciones sistémicas que han intentado analizar los fenómenos didácticos tomando en cuenta la complejidad del sistema en donde suelen considerarse distintos polos: el del saber, aquél de quién aprende y el de quién enseña en un medio determinado. Tratando de esclarecer sus relaciones mutuas a fin de "explicar" los diversos fenómenos didácticos que se suceden en el hecho educativo.

Un ejemplo, al que nos hemos referido en varias ocasiones, respecto del fenómeno de la propagación del calor y el surgimiento de la noción de convergencia documentado en (Farfán, 1997) reporta como resultado la obligatoriedad de desarrollar la intuición más allá de lo sensible, como una etapa previa, antes de significar el concepto matemático. El tipo de estudio epistemológico que realizamos nos proporcionó la explicación que niega, parcialmente, nuestra hipótesis de partida, a saber, si bien es cierto que el concepto surgió en el ámbito de la determinación del estado estacionario; éste no resulta propicio para recrearse en el aula pues resulta ser mas complejo que aquél que deseamos introducir. Esto último nos indujo al estudio socioepistemológico en las diversas formaciones profesionales de nuestro sistema de educación superior.

Matemática Educativa filial del: *Saber cultural* lo que produce *una mirada sociocultural*

En nuestra Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa tenemos varios ejemplos relacionados con el acercamiento socioepistemologico, citamos algunos resultados a fin de ejemplificar las intenciones del mismo:

Construcción social del concepto del cero entre los mayas antiguos

La formación del cero entre los mayas se caracteriza por la inexistencia de dicotomías, eso favoreció la constitución de la *noción de cero*. El Dios de la lluvia no es *apriori* bueno o malo, sino que lo es simultáneamente, de ahí que la noción de transición entre lo uno y lo otro sea tan importante como los estados mismos

Construcción social del binomio de NewtonEl binomio de Newton se escribe por vez primera como $P+PQ$ y no como $a+b$. (Cantoral, 2000) Ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología diferente de la que hoy enseñamos en clase, entre las características que se destacan podemos enunciar:

Un programa en el dominio de la ciencia que busca predecir la marcha de fenómenos mediante la metáfora del flujo de agua.

Esa noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente.

Discusión

Todo ejercicio de revisión, por modesto que sea, conlleva irremediablemente al establecimiento separaciones y filiaciones por lo que es conveniente señalar que reconocemos que cada una de las diversas aproximaciones que hemos discutido han aportado resultados y métodos para construir nuestra disciplina. Asimismo reiteramos que buscamos pertinencia, coherencia e identidad de nuestra investigación a fin de beneficiar a nuestros sistemas educativos. Por ello la importancia del ejercicio de reflexión, en nuestra comunidad, de nuestros acercamientos teóricos, métodos y resultados, sometidos a una continua y estricta vigilancia epistemológica sin, por supuesto, caer en exorcismos paralizantes.

Referencias bibliográficas

Bourdieu P. et al (1998). *El oficio de sociólogo* 20ª ed., México: Siglo XXI

Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Editorial Iberoamérica.

Herscovics, N. (1980). Constructing meaning for linear equations: a problem of representation. *Recherches en didactique des Mathématiques* 1(3), 351-385

Kent y Hedger (1980). Growing Tall. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 137-179

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Tall y Vinner (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

(1968) Final recommendations of the participants about the coordination of the teaching of mathematics and physics. *Educational Studies in Mathematics* (1) 243-2.