Modelo didáctico alternativo para la ecuación de la recta

Carlos H. Saavedra y Patricio Rosen R
CCH.UNAM. México
cahesa@hispavista.com

Resumen

El presente trabajo introduce el Principio de Cavalieri en el tratamiento de un tema de matemáticas a nivel bachillerato. Aunque el trabajo de Cavalieri se publicó en 1635, el conocimiento de su principio, es un buen pretexto para introducir el tema que aquí se aborda, tratando de servir como una estrategia de aprendizaje novedosa, en el salón de clases. Lejos de querernos rebelar contra la apreciación tradicional sobre el trabajo de Cavalieri, hacemos la presente propuesta didáctica que pretende simplificar el tratamiento del tema *Ecuación cartesiana de la recta*, que de otra manera parece tedioso o más complicado en su tratamiento tradicional en el salón de clase, con alumnos del nivel medio superior. La forma tradicional de abordar el tema de *Ecuación cartesiana de la recta*, en el nivel medio superior, es a través del tratamiento del concepto de *pendiente de una recta.* No obstante, en el presente trabajo se enfrenta su abordaje con el único auxilio de la fórmula para calcular el área de un triángulo cuando se conocen de él las coordenadas de sus tres vértices y la aplicación del *Principio de Cavalieri*, visualizando este último, a través de la movilidad que nos proporciona el software *GEOMETER.*

Introducción

La investigación sobre los procesos cognitivos a partir de los años setentas, indujo, de manera significativa, a forjar el marco conceptual. El cual está sustentado en las teorías de la información, la inteligencia artificial, la psicolingüística, etc. Este soporte ha inferido nuevas conceptualizaciones acerca de la representación y naturaleza del conocimiento y la adquisición de habilidades por los estudiantes, así como de otros fenómenos como la memoria el aprendizaje significativo, la resolución de problemas, el significado y la comprensión y producción del lenguaje matemático (Aguilar, 1982; Hernández, 1991).

Una de estas líneas de investigación, dentro de la corriente cognitiva, ha sido la del aprendizaje del discurso escrito, que al mismo tiempo ha derivado en el diseño de procedimientos tendientes a modificar el aprendizaje significativo de los contenidos conceptuales, así como mejorar su comprensión y recuerdo. Se pueden identificar, fácilmente, dos líneas fundamentales de trabajo, a partir de la década de los setentas:

La aproximación impuesta, consiste en realizar modificaciones o arreglos en el contenido o estructura del material de aprendizaje, y

La aproximación inducida, que se aboca a entrenar a los alumnos en el manejo directo y por sí mismos de aquellos procedimientos que le permitan aprender con éxito de manera autónoma (Levin, 1971; Shuell, 1988).

En el caso de la aproximación impuesta, las "ayudas" que se proporcionan a los alumnos pretenden facilitar intencionalmente un procesamiento más profundo de la nueva información, y son planeadas por el docente, el planificador, el diseñador de materiales o incluso el programador de software educativo o por aquellos grupos de profesores que construyen estrategias de enseñanza.. De esta manera, se podría definir *estrategia de enseñanza* como los procedimientos o recursos utilizados por el agente de enseñanza o mediador para promover aprendizajes significativos (Mayer, 1984; Shuell, 1988; West, Farmer y Wolf 1991).

Por otra parte la aproximación inducida, comprenden una serie de "ayudas" internalizadas en el lector, éste decide cuándo y por qué aplicarlas, y constituyen estrategias de aprendizaje que el individuo posee y emplea para aprender, recordar y usar la información.

Estos dos tipos de estrategias de enseñanza y aprendizaje, se encargan de promover aprendizajes significativos a partir de los contenidos escolares. En el primer caso el énfasis se pone en el diseño, programación, elaboración y adecuación de los contenidos a aprender por vía oral o escrita, la cual es tarea del diseñador o del docente; y en el segundo caso la responsabilidad recae en el aprendiz.

Estrategias de aprendizaje

En alguna de las clasificaciones existen las *estrategias para activar (o generar) conocimientos previos y para establecer expectativas adecuadas en los alumnos.* Son aquellas estrategias dirigidas a activar los conocimientos previos de los alumnos o incluso a generarlos cuando no existan. En este grupo podemos incluir también a aquellas otras que se concentran en el esclarecimiento de las intenciones educativas que el profesor pretende lograr al término del ciclo o situación educativa. La activación del conocimiento puede servir al profesor en un doble sentido: para conocer lo que saben los alumnos y para utilizar tal conocimiento como base para promover nuevos aprendizajes.

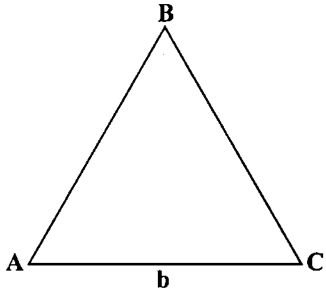
También existen las *estrategias para promover el enlace entre los conocimientos previos y la nueva información que se ha de aprender.* Son aquellas estrategias cuyo propósito fundamental es crear o potenciar enlaces adecuados entre los conocimientos previos y la información nueva que ha de aprenderse, asegurando con ello el logro de un aprendizaje significativo. De acuerdo con Mayer (op. cit.) a este proceso de integración entre lo "previo" y lo "nuevo" se lo denomina: construcción de "conexiones externas".

El desarrollo del pensamiento en la clase

Otra forma de promover o fomentar el pensamiento de nuestros estudiantes es alentar el análisis, la resolución de problemas y el razonamiento en los cursos regulares del currículo. David Perkins y otros (Perkins et. al. , 1993) afirman que es posible hacerlo si los maestros crean en sus aulas una *cultura del pensamiento.* Esto significa que haya un espíritu de curiosidad y pensamiento crítico un respeto por el razonamiento y la creatividad y la expectativa de que los estudiantes aprenderán y comprenderán. En un aula así, la educación se ve como aculturación, un proceso amplio y complejo de adquisición y comprensión de los conocimientos. Todos aprendimos el lenguaje por ser miembros de un grupo cultural; también aprendimos formas de relacionarnos, normas de conducta y muchas otras reglas y procedimientos complicados por vivir en una cultura que favorece ciertos conocimientos y valores. Así como nuestra cultura familiar nos enseña lecciones sobre el uso del lenguaje; la del aula puede enseñar lecciones sobre el pensamiento al proporcionar *modelos* del bien hacer, ofrecer *instrucción directa* en procesos de pensamiento y animar su *práctica* mediante las *interacciones* con los demás.

Veamos de que manera ocurriría en un aula:

ACTIVIDAD 1



Considérese el siguiente triángulo ΔABC que se muestra en la figura.

Sin modificar la base AC = b.

¿Cómo podrías incrementar el área del triángulo?

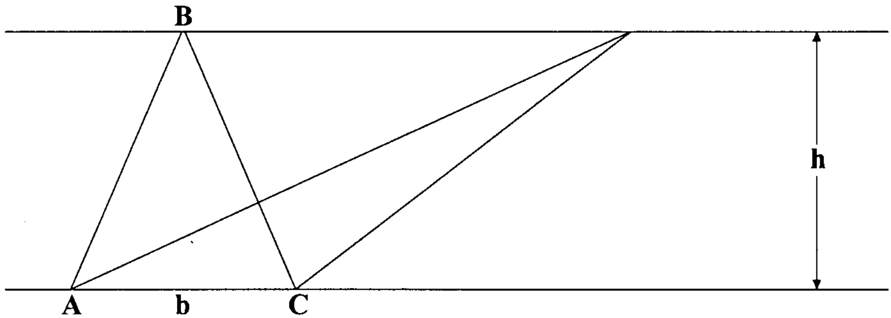
Después de cierto tiempo, debemos esperar que el alumno ofrezca la respuesta que: *incrementando los lados* AB *y* BC

Y la justificación es que el área de un triángulo depende de la base y la altura, si la base no se modifica, entonces para incrementar el área (dejando fija la base), bastará con aumentar la altura. Y esto último se logra incrementando la longitud de los otros dos lados (AB y BC)...? Entonces...

¿Podríamos afirmar que:

> *Si en un triángulo cualquiera, no se modifica la longitud del lado que se considera como base, al incrementar la longitud de los otros dos lados, se verá incrementada el área del triángulo original.* **?** Y esto debido, tal vez, al hecho que el perímetro si se ve aumentado, al aumentar la longitud de dos de sus lados, manteniendo el tercer lado constante.

Para aclarar esta cuestión, considérese la siguiente figura:



Se observa claramente que existen dos triángulos: ΔΔABC y ΔAB'C

- Ambos con la misma base: b = AC
- Los dos lados que no son la base fija, fueron incrementados: AB' > AB y B'C > BC
- El perímetro del ΔABC es mayor que el perímetro del ΔAB´C

Sin embargo...

- Los dos triángulos tienen la misma área.

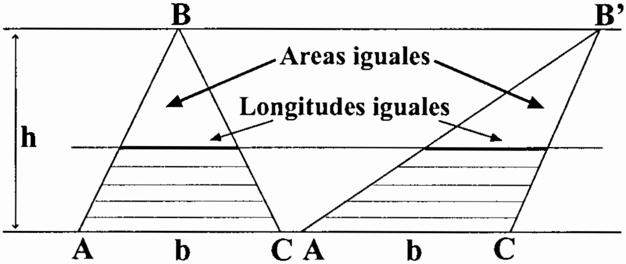
Entonces ¿qué pasó?

En el siglo XVII **Bonaventura Cavalieri** enunció su...

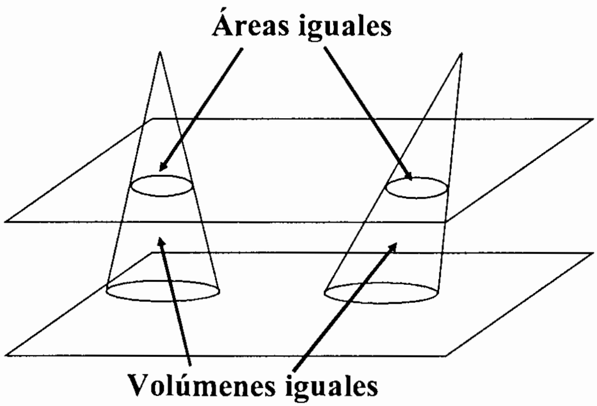
Principio:

"Si dos figuras planas están contenidas entre dos rectas paralelas y poseen la propiedad que las secciones de ellas, cortadas por cualquier recta paralela a las anteriores, siempre son de la misma longitud, entonces las áreas son iguales"

La siguiente figura ilustra lo anterior



De manera análoga, el principio de Cavalieri se puede generalizar para sólidos



El cual se puede expresar como...

"Si dos sólidos están contenidos entre dos planos paralelos y poseen la propiedad que las secciones de ellos, cortados por cualquier plano paralelo a los anteriores, siempre son de la misma área, entonces los volúmenes son iguales"

ACTIVIDAD 2

Considere el triángulo ABC, cuyos vértices están dados por las siguientes tres parejas de coordenadas cartesianas A (0, 0); B (3, 0) y C (2, 4). Para determinar su área lo podemos realizar de al menos, dos formas:

Primera (Por Geometría Plana): A = (1/2)b·h = (1/2)(3)·(4) = 6 u^2

Segunda (Por Geometría Analítica):

$$A=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{Vmatrix}=$$

$A=6u^2$

ACTIVIDAD 3

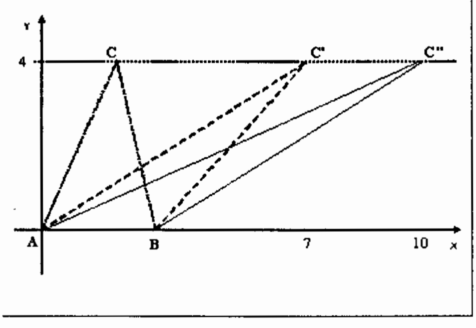
Si ahora modificamos el tercer vértice a C'(7, 4), dejando fijos los otros dos, obtendremos:

$$A=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{Vmatrix}= A=6u^2$$

Si posteriormente modificamos nuevamente el tercer vértice a C''(10,4) obtendremos

$$A=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \end{Vmatrix}=$$

$A=6u^2$

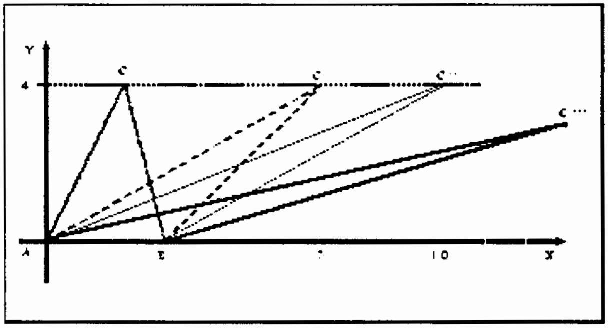


Esto significa que no importa que tan retirado de la base esté ubicado el tercer vértice con tal de que se encuentre sobre una recta paralela a ella, se conserva el área. De hecho para disminuir el área, sin modificar la base, bastará con ubicar al tercer vértice sobre una recta paralela a la base, pero más cercana a ella.

Por ejemplo moviendo al vértice C'''(12, 3), se obtendrá como área:

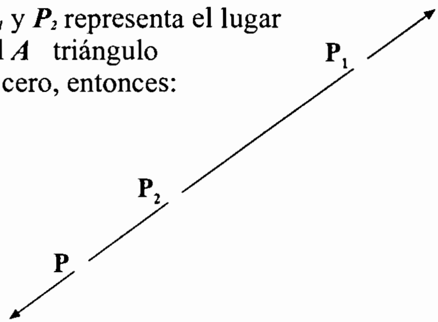
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 12 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

A=4.5 u^2



Ahora, considérense dos puntos en el plano cartesiano, cuyas coordenadas son dadas, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_1(x_2, y_2)$. Posteriormente considérese un tercer punto ***P(x, y)*** cualquiera, con la única condición que se encuentre ubicado en la misma recta a la que pertenecen los dos puntos dados. Entonces el área del triángulo formado por estos tres puntos es igual a cero. Dado que se trata de un triángulo degenerado, debido a que los tres puntos son colineales y por ende, su área es igual a cero.

Entonces la línea recta ***L*** que pasa por los puntos P_1 y P_2 representa el lugar geométrico de los puntos ***P(x, y),*** tales que el área del *A* triángulo degenerado, formado por los puntos ***P1, P2*** y ***P,*** vale cero, entonces:



$$L = \{P(x, y) / A = 0\}$$

$$\text{Y como A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esto significa que

$$x1\,(y_2 - y) - y_1\,(x_2 - x) + 1(x_2\,y - x\,y_2) = 0$$

$$x_1\,y_2 - x_1\,y - y_1\,x2 - y_1\,x + x_2\,y - x\,y_2 = 0$$

$$y(x_2 - x_1) - x_2\,y_1 = x(y_2 - y_1) - x_1\,y_2$$

Sumando en ambos miembros el término $x_1\,y_1$, y reagrupando tenemos

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)}$$

La ecuación cartesiana de la recta.

Conclusión

La enseñanza de habilidades y procesos como el razonamiento, la metacognición, estrategias de aprendizaje, la resolución de problemas y la creatividad, dicta cambios en el salón de clase, en donde se incluye la estructura física, el rol del profesor, el rol de los alumnos y su interacción. La clase tradicional con sus pupitres en hileras fijas viendo el "show"del profesor como único emisor de conocimiento, con los alumnos mirando pasivamente cómo el profesor se desempeña al frente del grupo y único acaparador del pizarrón, pensando que todos sus alumnos lo siguen en el aprendizaje con el mismo ritmo de enseñanza que marca su dominio de información que vierte con el gis en la pizarra; no ayuda a desarrollar el pensamiento de sus alumnos.

La escuela del siglo XXI debe incluir muebles móviles que permitan la actividad en grupos pequeños. En este ambiente el profesor es el mediador entre el conocimiento y los alumnos y es el facilitador de las actividades que fomentan la comunicación entre alumnos y profesor y entre alumnos y alumnos. El profesor hace preguntas que inducen pensamientos y que fuerzan a los alumnos a reflexionar y responder con afirmaciones, pensamientos y preguntas de ellos mismos. También permite hacer aclaraciones usando la pizarra, motivado por las inquietudes y preguntas de los alumnos, sin apoderarse de ella por mucho tiempo.

La mayoría de los profesores no tenemos demasiada experiencia en este tipo de actividades, por lo que deben recibir ayuda con programas instruccionales; deben aprender a utilizar las respuestas de los alumnos para extender sus procesos de razonamiento.

Referencias bibliográficas

Aguilar, F (1982) Una experiencia de aprendizaje por investigación directa del medio. *Revista de Educación.*

Hernández, R (1991) *El conocimiento compartido.* Barcelona

Levin, E (1971). Causal atributions in mathematics and reading. *Journal of Experimental Education,* 58 (3), 197-213.

Mayer, R (1984). Task motivation and mathematics achievement in actual task situations. *Learning and instruction*, 3, 133-150.

Perkins, P et al (1993) *Reasoning and problem solving*. Boston; Allyn & Bancon.

Shuell, W (1988) Variables affecting students intrinsic motivation for school mathematics. *Learning and instruction,* 3, 281-298.

West, Farmer & Wolf (1991) *Learning human skil.* London, Heinemann.