Un asistente matemático en la enseñanza de la resolución de ecuaciones no lineales por el Método de Punto Fijo

Y.Montero, M. Astiz, P.Medina, S.Vilanova, M. Rocerau, M.Vecino

Universidad Nacional de Mar del Plata – Argentina

ymontero@mdp.edu.ar   mastiz@mdp.edu.ar

Resumen

Este trabajo describe una experiencia realizada en un curso de Análisis Numérico dictado en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Mar del Plata (Argentina). La posibilidad de dictar clases en un laboratorio que cuenta con un número de computadoras que es apenas superado por la cantidad de alumnos permite promover un ambiente interactivo, de reflexión y experiencias que dan lugar a un verdadero aprendizaje significativo. En particular el programa Derive, conforma un importante recurso para mejorar las estrategias didácticas que sin dudas posibilitan lograr los objetivos propuestos.

Introducción

"La computación de alta velocidad ha revolucionado al análisis numérico como un arte y ha dado enormes ímpetus a su desarrollo como una ciencia."

Anthony Ralston

Este trabajo relata la experiencia en un curso de Análisis Numérico dictado en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Mar del Plata.

La posibilidad de desarrollar actividades en un laboratorio que cuenta con veinte computadoras y con una cantidad de alumnos que apenas supera ese número permite desarrollar clases en un marco interactivo en el cual participan el docente, el alumno y la computadora.

La introducción de los medios tecnológicos puede y debe tener repercusiones no sólo en cuanto a la manera de enseñar matemática, sino también en cuanto a la propia selección de los contenidos por las posibilidades que ellos brindan. Utilizando de forma apropiada las computadoras pueden introducirse sin mayores dificultades en las propuestas curriculares, problemas que requieran grandes cantidades de cálculo y se vinculen con la vida real, como así también, con respecto a algoritmos iterativos y representaciones gráficas.

"Gracias a las posibilidades que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel), en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. Estas experiencias matemáticas son fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los diseñadores de currículo y los profesores en el diseño e implantación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico." (Gomez, 1997)

Los alumnos tienen dificultad para llegar a comprender la esencia del Análisis Numérico, pues es una asignatura que tiene características propias que la diferencian de otras materias que se dictan en la carrera de Matemáticas; en efecto, en él no existen siempre "verdades" aplicables a todos las situaciones y la pertinencia o no de utilizar distintas herramientas para resolver un problema depende fuertemente del contexto en el cual se va a utilizar. Esto implica que deben desarrollarse otras habilidades para resolver problemas; heurísticas diferentes a la que el alumno está acostumbrado.

Es en esto que la computadora, y principalmente un programa como Derive, proporcionan un importante recurso para observar gráficamente el comportamiento de los métodos, con sus correspondientes interpretaciones geométricas y analíticas, y la ventaja de poder realizar distintas experiencias en un tiempo relativamente corto abarcando la mayor cantidad de casos posibles (según el tema tratado). De esta manera se produce un ambiente de estudio, análisis teórico de las situaciones y experimentación numérica, donde el intercambio de opiniones entre los docentes y los alumnos es fluido y sumamente provechoso.

Sin embargo, resulta evidente que los resultados, desde el punto de vista del aprendizaje del sujeto, dependen no solamente del funcionamiento del programa, sino también del cuidado con que el profesor seleccione y diseñe las situaciones y los problemas que el sujeto debe resolver con la ayuda de los programas (Gómez, P., Fernández, F., 1997).

Objetivos

Los objetivos que se plantearon en el desarrollo de esta experiencia fueron: usando como recurso las posibilidades numéricas y gráficas de la computadora, y a través de la interacción del docente, el alumno y la computadora, preparar al alumno para que se capaz desde lo general de:

- o Realizar el análisis de problemas de situaciones concretas de dificultad media.
- o Llevar la situación a un modelo matemático
- o Elegir un método adecuado para su resolución

  y desde lo particular de:
- o Incorporar técnicas iterativas que conducen a la solución de la ecuación $f(x)=0$ trabajando con su ecuación equivalente $g(x)=x$
- o Analizar la convergencia y divergencia de cada transformación o despeje y efectuar comparaciones con sentido crítico
- o Analizar las condiciones de convergencia
- o Discernir sobre las ventajas y desventajas de la aplicación del método

Entorno de trabajo

El tema: El tema seleccionado es el método de Iteración de Punto Fijo para la resolución de ecuaciones no lineales. El resolver una ecuación no lineal es una situación que al alumno se le presenta con relativa frecuencia, por lo tanto comprende con claridad la necesidad de encontrar un algoritmo para su resolución. Es un tema que no necesita mayores conocimientos previos y permite integrar conceptos de Cálculo Numérico, Análisis Matemático elemental y Geometría Analítica. Involucra importantes conceptos:

- o Generación de sucesiones mediante un proceso iterativo
- o Convergencia o Divergencia de dichos procesos
- o Análisis del error en la evaluación de la función

o Estrategias para la terminación de un proceso iterativo

El programa: Derive es un programa de los llamados "friendly" (amistoso, simpático), en el argot informático. Su propósito es la resolución de cálculos matemáticos de carácter general y la graficación de funciones, pero sin la potencia de otros programas matemáticos específicos. Su ventaja es estar basado en menús tipo árbol, por lo que en poco tiempo el usuario es capaz de manejarlo (Paulogorrán, 1994).

El Derive ofrece un entorno en el cual es posible crear imágenes visuales (muchas veces agobiante para los alumnos sin herramientas computacionales) que permite interpretar y conjeturar sobre los resultados obtenidos (Berry, 1993). Satisface algunos requerimientos de tipo general para la experiencia a desarrollar: graficación sencilla, aplicación de zoom, cursor gráfico, visor de coordenadas, superposición de gráficos, resolución de cálculos algebraicos.

Los alumnos: La experiencia se desarrolló en un curso de segundo año de las carreras de Prof. y Lic. en Matemática que contaba con 30 alumnos. Para éstos es una novedad que la clase se dicte íntegramente en el Laboratorio de Informática, utilizando los instrumentos clásicos (tiza, pizarrón, etc.) únicamente para algunas directivas generales.

El aula: La Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata contaba, al momento de la experiencia, con un Laboratorio de Informática con 20 PC tipo Pentium en Red 32 Mega de Memoria y con Multimedia, 5 impresoras chorro de tinta color y 2 scanner de mano. El laboratorio permanece abierto 8 horas diarias, este tiempo se reparte entre el dictado de asignaturas asistidas por computadoras y horas donde los alumnos pueden acceder a las máquinas para trabajar independientemente con la asistencia técnica de un encargado.

Los docentes: El cuerpo docente a cargo de la experiencia estuvo compuesto por dos docentes, el profesor de la asignatura quien diseñó la propuesta metodológica y un auxiliar que trabajó junto al profesor durante las clases frente a los alumnos. Es importante destacar que este mismo cuerpo docente está trabajando en la asignatura hace al menos 10 años y por lo menos tres (3) con esta metodología.

Metodología de trabajo en el aula

Durante el desarrollo del curso de Análisis Numérico, se promueve que los alumnos puedan:

- Formular hipótesis, dar soluciones y corregir las propias respuestas;
- Hacer uso consciente de estrategias para la resolución de problemas;
- Respetar y hacer respetar las diversas estrategias de razonamiento;
- Desarrollar y verificar su propias ideas, a través de formas apropiadas de acción, comprobando el efecto de su pensamiento en la computadora;
- Reconocer el error como parte de la construcción del conocimiento;
- Vivenciar la rigurosidad del pensamiento lógico;
- Valorar la eficacia de la tarea sistemática y ordenada, así como de un buen grado de concentración y perseverancia.

Se intenta instalar en el laboratorio una dinámica de trabajo a partir de la resolución de problemas y con una modalidad de discusión e intercambio, promoviendo en los alumnos, el aprendizaje por descubrimiento, dado por la búsqueda del camino para solucionar determinados problemas, a partir de necesidades e intereses. Los alumnos se enfrentan a situaciones en forma individual o a lo sumo de a pares, en un ambiente donde el intercambio y la interacción, que sin duda favorece la socialización de la inteligencia individual, permite la coordinación de distintos puntos de vista.

El método de Iteración de Punto Fijo se presenta (promoviendo la intuición a través de la visualización gráfica en computadora), se describe y analiza desde el punto de vista teórico (propiedades de convergencia) y desde el punto de vista práctico (eficiencia computacional). Los alumnos utilizan distintos procedimientos para encontrar la solución del problema, ya que el camino de resolución no se fija previamente. Después se discute lo obtenido por cada alumno o grupo, se confronta y comparan los resultados.

El docente es el encargado de organizar el trabajo de la clase, favorecer el análisis, la confrontación y la vinculación con los conceptos teóricos. Además debe alentar los proyectos realmente posibles en cada momento, evitando la frustración ante propuestas demasiado ambiciosas.

Desarrollo de la clase: Para comenzar a tratar el tema, se hace observar a los alumnos que la resolución de una ecuación del tipo f(x)=0 (1) es equivalente a resolver la ecuación x=g(x) despejando x de la ecuación (1).

A continuación se les presenta el método de iteración de punto fijo explicando el algoritmo y bajo qué condiciones este método permite hallar la raíz de una función f(x).

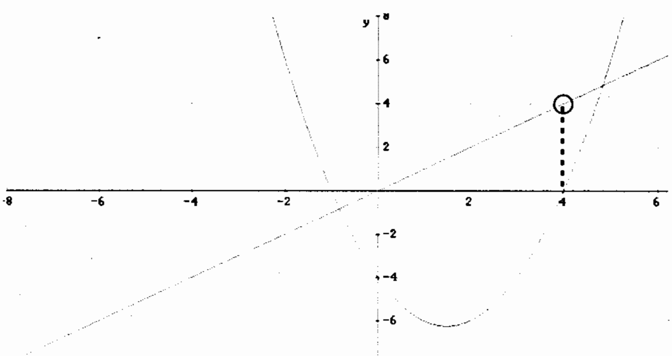
Si bien, determinada la función g(x), no tienen problema para utilizar el algoritmo (lo hacen mecánicamente), sí tienen dificultades en interpretar cómo la sucesión que van obteniendo se aproxima a la solución.

Para resolver esta cuestión, se propone entonces una forma de trabajo que sin la ayuda de la computadora sería sumamente tedioso o casi imposible de llevar adelante.

A modo de ejemplo, se presenta un caso sencillo para su tratamiento: la ecuación $f(x)=x^2-3x-4=0$

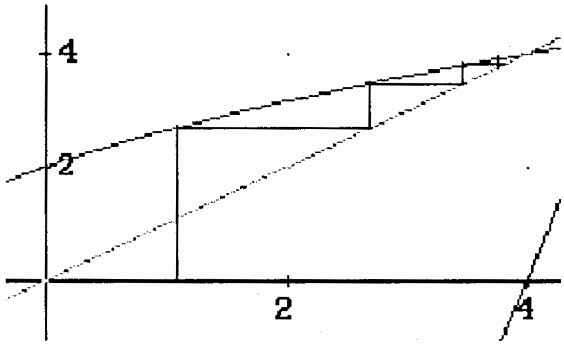
y se propone el siguiente despeje: $x = \sqrt{3x + 4}$ y que realicen la gráfica de las tres funciones involucradas, obteniendo:

Inmediatamente por observación, advierten que la raíz de la función f(x) coincide con el valor de x intersección entre la recta y=x y la función g(x).



A partir de aquí se trata de ver cómo se genera la sucesión aproximante y qué significa gráficamente. En el primer ejemplo calculan los términos uno a uno (posteriormente utilizan las función ITERATES del DERIVE), observando el gráfico seleccionan un valor inicial próximo a la raíz.

Una vez que obtienen una sucesión de valores, observan en el gráfico, con la orientación del docente, qué significa cada término que se obtiene como $x_1=g(x_0)$, $x_i=g(x_{i-1})$



A continuación se solicita a los alumnos que propongan otros despejes para la misma ecuación dada y obtengan la aproximación de la solución. Surgen entre ellos alternativas como: $x=4/(x-3)$, $x=(x^2-4)/3$, disparadoras del análisis de la convergencia del método.

Queda claro para ellos que no todas las alternativas de despeje conducen a que el método sea convergente y que en uno de los casos la sucesión aunque converge es oscilante. Aparece entonces la necesidad de analizar cuáles son las condiciones que deben darse para obtener una solución.

Se demuestra en forma teórica que si $|g'(x)|<1$ en un intervalo (a,b), g(x) está definida en dicho intervalo y la raíz de f(x) pertenece al mismo, tomando cualquier valor inicial x_0 en (a,b), la sucesión definida por $x_i=g(x_{i-1})$ (i=1,2...), converge a la solución buscada.

Conociendo ahora la condición de convergencia, analizan esto gráficamente sobre el ejemplo inicial con cada una de las funciones g(x) despejadas, observando el comportamiento de la función derivada de g(x) alrededor de la raíz de f(x) para determinar en forma más sencilla si el despeje realizado es o no adecuado para hallar la solución.

Por último se presenta a los alumnos una serie de funciones de diversa complejidad para que hallen sus raíces utilizando el método de punto fijo, analizando gráfica y analíticamente las variantes de ecuaciones equivalentes y sus diferentes comportamientos, la convergencia (monótona u oscilante) o divergencia de las sucesiones halladas según el despeje realizado

Consideraciones finales

Sin duda el método inductivo es una herramienta poderosa para la enseñanza de la matemática, en particular para la enseñanza del análisis numérico. Sin embargo, a pesar de que esta afirmación es ampliamente compartida, no siempre es llevada a la práctica. Tal vez la sobrecarga de tareas, el tiempo limitado de clases o principalmente la falta de un lugar equipado adecuadamente con computadoras sean algunas de las razones que provocan esta situación.

Después de esta experiencia queda claro que promover un ámbito de trabajo basado en la discusión, la reflexión y la visualización gráfica y potencialidad para el cálculo que ofrece la computadora, posibilita la obtención de logros muy difíciles de conseguir en clases tradicionales.

Es generalizado que en una asignatura como Análisis Numérico se presentan dificultades ya que los alumnos están acostumbrados a trabajar con "precisión" y se desconciertan cuando deben resolver situaciones donde existe cierto grado de incertidumbre. Cuando se trabaja con computadoras, estas dificultades quedan aún más expuestas. Por otra parte, sienten inseguridad cuando deben elegir el procedimiento o método más conveniente para la solución de un problema, para lo que deben poner en juego su intuición, su experiencia y sus conocimientos teóricos.

Con respecto al método de Punto Fijo no les resulta intuitivo a priori interpretar que el mismo se basa en la solución de una ecuación no lineal determinando la intersección de dos funciones y=x e y=g(x). Y más dificultad aún se evidencia cuando deben seleccionar convenientemente la función g(x) y determinar la convergencia de la sucesión que se genera para cada una. Esto requiere cierta habilidad, ingenio y un claro conocimiento conceptual del método y por sobre todo del comportamiento de las funciones.

Esta experiencia nos mostró que si bien en un principio son reacios a utilizar recursos gráficos para encontrar condiciones de partida para un problema determinado o análisis y verificación de condiciones de convergencia de una sucesión, porque su costumbre es trabajar desde lo analítico, a medida que logran analizar gráficamente cada una de las situaciones, les resulta mucho más sencillo interpretar el método conceptualmente y desarrollar análisis teóricos. Sin duda, esta situación posibilita al docente enfrentar a los alumnos con mayor cantidad de problemas a estudiar y de mayor calidad.

Referencias bibliográficas

Berry, J.& Graham, E. and Watkins, A. (1993). *Learning mathematics through DERIVE*. Ellis Horwood, Chichester.

Dahlquist, G. (1974). *Numerical Methods*. EEUU, Pretince-Hall, Inc.

Gerald, C. F. (1978). *Applied Numerical Analysis*. Canadá, Addison-Wesley Publishing Company.

Gómez, P. (1997). Tecnología y Educación Matemática. En Rev. *Informática Educativa. Uniandes-LIDIE*. Vol 10, Nro. 1, pp 93-11.

Gómez, P. y Fernández, F. (1997). Graphics calculators use in Precalculus and achievement in Calculus. En *PME Proceedings of the 21th PME Conference*. Lahti: University of Helsinki.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (515-556). N.Y., Macmillan

Kutzler, B. y Kokol-Voljc, V. *Introducción a DERIVE 5. OEG*. Austria.. Edición Española. DERISOFT, c.b. Valencia, España.

Paulogorrán, C. y Pérez C. (1994). *Cálculo Matemático con Derive para PC*. Madrid, Ra-Ma.

Plybon, B. (1996). *An Introduction to Applied Numerical Analysis*. EEUU, PWS-Kent

Ralston, A. (1970). *Introducción al Análisis Numérico*. México, Limusa-Wiley S.A.

Stoer, J. y Bulirsch, R.(1980). *Introduction to Numerical Analysis*, NY, Springer-Verlag.