

El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones

Carmen Valdivé Fernández y Martín Andonegui Zabala

Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y

Universidad Pedagógica, Barquisimeto Venezuela

florca17@hotmail.com y ioritz@hotmail.com

Resumen

El presente estudio tiene como propósito determinar el efecto de la estrategia constructiva diseñada y aplicada para aprender a resolver operaciones de adición y sustracción con fracciones. Surge como una secuencia del trabajo de Vargas (2000) quien implementó una estrategia de diversificación de contextos representacionales para la enseñanza del concepto de fracción al mismo grupo experimental, trabajando con los contextos parte todo continuo, expresión verbal, a/b , expresión decimal, porcentaje, parte todo discreto, y recta numérica. La estrategia constructiva aplicada para las operaciones consistió en 9 sesiones de clase, en las que se relacionaban los diversos contextos de una fracción. Los resultados de este estudio demuestran que hubo riqueza de transferencia de contexto, presente en el desempeño de los alumnos del grupo experimental. La más frecuente fue la fracción como a/b , seguida de la expresión decimal. Todo esto ratifica la propuesta teórica de Duval (1993), de que la coordinación entre los registros (espontaneidad en la actividad de conversión y potencia de las transferencias alcanzadas por este grupo en el trabajo de Vargas) produjo rapidez en las actividades de tratamiento.

Antecedentes

La estrategia metodológica constructiva diseñada y aplicada en este estudio se elaboró tomando en cuenta el contenido de varios autores, entre los que podemos destacar Resnick (1987), de quien se consideró el análisis sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos, análisis que estima relevantes los tipos de esquemas protocuantitativos de la parte y el todo, ya que permite a los niños entender estas relaciones -y por ende, la composición aditiva-, crear estrategias que los involucran en el conteo, y llevarlos a adquirir el concepto de adición y sustracción de una manera natural, por lo que estos esquemas pueden ser utilizados posteriormente en la enseñanza del concepto de fracción y de las operaciones con ellas. Igualmente se consideró el trabajo de Carpenter y Moser (1983) atinente a los niveles de estrategias para la adición y sustracción -tal como lo hace Resnick (1983)-, a saber:

- a) Estrategias basadas en el uso de los dedos, de objetos físicos
- b) Estrategias basadas en el uso de secuencias de conteo
- c) Estrategias basadas en el recuerdo de resultados básicos

Por su parte, Mosquera (1995) cita una serie de investigadores que han centrado su atención en el estudio de los procesos de conteo y sus implicaciones en el desarrollo de los conceptos de adición y sustracción tal como lo hizo Resnick (1983), a saber: Houliham y Ginsburg en 1981, Moser y Carpenter en 1982, Secada, Fuson y Hall en 1983, Ibarra y Lindval en 1982, Behr y Wheeler en 1981. Estos autores destacan el proceso evolutivo del conteo de

los niños así como la habilidad que poseen éstos para resolver problemas de adición y sustracción antes de cualquier estudio formal.

En el campo de las fracciones no existen parámetros tan claros como los descritos anteriormente para el concepto de número y las operaciones de adición y sustracción; existe una marcada complejidad en la construcción conceptual del concepto de fracción y por ende el de las operaciones con ellas. Los niños necesitan de experiencias que construyan sobre su conocimiento informal de las fracciones, antes de ser instruidos en los símbolos o representaciones del concepto de fracción.

Sin embargo, Sánchez y Llinares (1988) encuentran que la interpretación más natural para los conceptos de suma y resta con fracciones (similar a la asimilación natural de las operaciones de adición y sustracción con números naturales), es el aspecto medida caracterizado a través de la relación parte todo, sugiriendo utilizar el modelo de la recta numérica para vincular las interpretaciones parte todo, medida, y fracción como símbolo (número). Teniendo en cuenta la familiaridad entre algunas interpretaciones y algunas operaciones es conveniente secuenciar el uso de las fracciones unitarias y el contar, a través de situaciones problemáticas.

Así mismo, siendo una fracción un número, se han de considerar las sugerencias de Greenes, Schulman y Spungin (1993) sobre las habilidades relativas al sentido del número que deben desarrollarse en el niño (sus usos, su adecuación, sus relaciones, la estimación) ya que ellas se pueden trasladar a la enseñanza del concepto de fracción, utilizando la estrategia propuesta por Sánchez y Llinares (1988) y ampliada por Vargas (2000), quien -en concordancia con Duval (1993)- aplica actividades cognitivas ligadas a la semiosis como lo es la actividad de conversión, que permite transformaciones entre diversos registros, bajo el supuesto de la necesidad de coordinar diversas representaciones semióticas (al menos dos) que debe manifestarse en:

- a) La rapidez en las actividades de tratamiento
- b) Espontaneidad en la actividad de conversión
- c) La potencia de las transferencias

Vargas (Andonegui y Vargas, 2002; Vargas, 2000) condujo un estudio sobre la aplicación de una estrategia denominada “Diversificación de los contextos representacionales de una fracción” a estudiantes de 6° grado con edades comprendidas entre 11 y 13 años. Esta estrategia contemplaba los siguientes contextos representacionales:

- a) Parte todo continuo (PTC)-Expresión Verbal (EV)- Expresión simbólica (a/b)
- b) Expresión decimal
- c) Porcentaje (%)
- d) Parte todo discreto (PTD)
- e) Recta Numérica

El autor enfatizó el trabajo con objetos concretos y prestó atención particular a la traslación entre las diferentes representaciones, tomando en un primer momento como eje los modelos concretos y luego, en una segunda fase, los diagramas. Inició la secuencia de instrucción con el contexto parte todo continuo, expresión verbal escrita y expresión simbólica. Realizó divisiones de un todo (hojas de papel) en partes iguales según el siguiente orden de fracciones:

- a) La familia de medios, cuartos y octavos
- b) Luego haciendo dobleces, construye la familia de los tercios, sextos y novenos
- c) Finalmente, la familia de quintos y décimos.

Vargas también hizo énfasis, en la primera parte, en las traslaciones concreto-forma oral. Utilizó luego los diagramas con el mismo esquema de la familia de los medios, tercios y quintos, construyendo estas series con ejemplos que rebasaran la unidad, utilizando el conteo. Igualmente realizó actividades de reconstrucción de la unidad y de modificación de citas perceptuales que permitieran afianzar en el niño el dominio de la relación parte todo continuo. Para introducir el contexto expresión decimal, utilizó la relación parte todo y las características de nuestro sistema de numeración decimal. Para el porcentaje, recordó el cálculo de porcentaje y la representación de porcentajes en forma gráfica como parte de un total, haciendo posteriormente las transferencias a otros contextos ya estudiados.

Para el contexto parte todo discreto, utilizó las mismas estrategias que implementó en el contexto parte todo continuo, empleando los niños del salón de clase como conjunto unidad. Finalmente, para la fracción como punto en la recta numérica, se apoyó en el recurso de la recta numérica (regla graduada) y en la idea de medida. Se tomaron rectas numeradas y cada segmento unidad se dividió en partes iguales (tres, cuatro y cinco).

Una vez aplicada esta estrategia al grupo experimental, éste logró superar al grupo al que se aplicó la estrategia tradicional, aún en los ítems relativos a los contextos parte todo continuo y símbolo, que eran comunes a ambas estrategias (tradicional y diversificación de contextos), corroborando con esto lo planteado por Duval (1993), pues se logró la conceptualización de la fracción debido al uso de los registros de representación, y a la realización de actividades de tratamiento y conversión. Sin embargo, la estrategia tradicional no desarrolló las habilidades necesarias para abordar los ítems donde había que aplicar el concepto de fracción.

La investigación

El presente estudio (Valdivé, 2000) surge como una extensión del trabajo de Vargas (2000), utilizándose la misma población (29 alumnos de sexto grado de una escuela básica de Cabudare, Venezuela, con edades comprendidas entre 11 y 13 años) para el desarrollo de la estrategia constructiva diseñada para enseñar a sumar y restar fracciones.

La secuencia de instrucción se desarrolló siguiendo las teorías de la Estrategia Didáctica Mediadora, pues toma las propuestas teóricas de la teoría cognoscitiva de procesamiento de información, el constructivismo, la psicología humanista y la neurociencia (Ruiz, 1988).

Así mismo se tomó como elemento directriz una estrategia instruccional propuesta por Szcurek (1978), en la cual se plantea como útil una secuencia en espiral ya que los objetivos a alcanzar están de tal forma entrelazados que es difícil profundizar en cualquiera sin referencia a los otros; es decir, es importante tener un despliegue de contextos representacionales del concepto de fracción para comprender más aún las operaciones con ellas.

También se tomaron en cuenta los aportes de Flores (1994) quien menciona algunas condiciones necesarias para potenciar la enseñanza constructiva y, finalmente, un análisis didáctico efectuado en relación al constructivismo (García y García, 1989; Neale, Smith y Johnson, 1990; Stanbridge, 1990) con el fin de articular una alternativa metodológica para

la enseñanza.

La Estrategia Metodológica Constructiva utilizada en este estudio para resolver problemas de adición y sustracción con fracciones aplicando transferencia de contextos se operacionalizó en dos fases: la primera se desarrolló en mes y medio antes de aplicar el tratamiento y cubrió una sesión de clase de 2 horas para aplicar el pretest y 5 semanas para reconstruir la estrategia. En estas semanas se consultó al profesor titular del grado acerca de la secuencia de los objetivos de las otras asignaturas que se iban a desarrollar paralelamente al tratamiento y las demás actividades planificadas para el grado.

En la segunda fase (mes y medio después) se desarrolló la estrategia constructiva durante 9 sesiones de clases de 2 horas cada una. El objetivo de la primera sesión fue realizar transferencias entre los contextos representacionales de una fracción, utilizando material concreto y la secuencia del trabajo de Vargas (2000). Esta primera sesión permitió poner a los alumnos a trabajar con material concreto, a ser cooperadores, a plantearse hipótesis, a liberar sus actitudes frente a la matemática, a contrastar sus ideas y las opiniones que hicieron posible resolver el problema planteado en la clase. También sirvió de base para concretar el diseño de la estrategia constructiva por parte de la investigadora, ya que esta forma de trabajo permitió diagnosticar que el contexto como recta numérica generó conflictos, pues hubo dificultades cuando hicieron la transferencia (les costó escoger el segmento unidad y hacer las mediciones); y que el contexto como expresión decimal presentó dificultad al realizar la división del numerador por el denominador para hallar la expresión decimal de una fracción.

Las ocho sesiones de clase restantes consistieron en resolver situaciones problemáticas del campo experiencial del alumno (conocimientos previos) que plantearan adiciones y sustracciones con fracciones, de igual denominador primeramente y luego con diferentes denominadores, donde se relacionaran los diversos contextos de una fracción y que permitiesen la traslación de un contexto a otro. Las fracciones que se escogieron para los problemas fueron aquellas que tuvieran sentido para el alumno, es decir, que utilizaran en la vida diaria; además, fracciones donde los denominadores fueran primos entre sí, y otras donde uno fuese múltiplo del otro, excluyéndose el caso en el que los denominadores no son múltiplos ni primos entre sí.

Al término de la instrucción se aplicó una prueba final compuesta por diez ítems. Sirvan de muestra los siguientes:

Item 4. Andrés pintó la cuarta parte de una pared y José el 50% de la misma pared. ¿Qué porcentaje de pared pintaron entre los dos? Realiza un dibujo para representar tu respuesta.

Item 6. En el día de ayer le dediqué $\frac{3}{4}$ de hora a la lectura, a la matemática 0.5 horas, y a la escritura las dos terceras partes de una hora. ¿Cuánto tiempo invertí en las tres clases?

Resultados

Los resultados obtenidos por los 29 alumnos del grupo experimental se presentan en la siguiente tabla:

Item	C	%	I	%	O	%
1	20	68,9	6	20,6	3	10,3
2	24	82,7	3	10,3	2	6,9
3	18	62,1	11	37,9	0	0
4	28	96,5	1	3,4	0	0
5	22	75,8	5	17,2	2	6,9
6	21	72,4	6	20,6	2	6,9
7	26	89,6	0	0	3	10,3
8	17	58,6	9	31	3	10,3
9	25	86,2	4	13,8	0	0
10	13	44,8	14	48,8	2	6,9

C: respuestas correctas **I:** respuestas incorrectas **O:** respuestas omitidas

Además, se presentan en la siguiente tabla las frecuencias de las diversas transferencias de contextos que dieron los alumnos del grupo experimental, por ítem:

Contextos/Items	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Símbolo (a/b)	4	1	16	0	15	0	6	7	19	2	70
Expresión Decimal	4	0	2	0	6	8	0	0	1	0	21
%, a/b y PTC	0	0	0	7	0	0	11	0	0	0	18
a/b y Exp. Dec.	12	0	0	0	0	0	0	0	5	0	17
% y PTC	0	0	0	16	0	0	0	0	0	0	16
a/b y %	0	10	0	0	0	0	0	0	0	3	14
PTC	0	0	0	4	0	0	5	0	0	4	13
PTD	0	1	0	0	0	8	0	4	0	0	13
%, a/b y PTD	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	9
%	0	1	0	1	0	3	0	0	0	4	9
a/b y PTD	0	0	0	0	0	0	2	4	0	0	6
% y PTD	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	4
a/b y PTC-EV	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	4
Pto. en la Recta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Totales	20	24	18	28	22	21	26	17	25	13	214

Conclusiones

Los resultados de este estudio demuestran que hubo riqueza de transferencia de contextos, presentadas en las respuestas de los alumnos del grupo experimental. La más frecuente fue la fracción como símbolo (70 veces), seguida de la expresión decimal (21 veces). Se pudo detectar que la expresión decimal sólo se asocia como respuesta con el símbolo (17 veces) y no lo hace con ningún otro contexto, ni siquiera con el de porcentaje, a pesar de su aparente afinidad.

La investigación arrojó que ningún alumno utilizó la transferencia hacia el contexto fracción como punto en la recta para dar la respuesta en ningún problema, de lo que se infiere que este contexto debe plantearse en su enseñanza de manera diferente, o bien no es en esta

edad o grado donde deba mediar, ya que implica nociones de geometría (conmensuración), área casi ignorada en el aula. Se pudo detectar que el algoritmo habitual –en el contexto simbólico- no funciona, porque no se enseña en relación con algún contexto socio-cultural y, así, el alumno no llega a la resolución de los problemas.

Este estudio demostró que la Estrategia Constructiva logró que el estudiante sea un sujeto activo en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya que logró seleccionar los contextos representacionales de una fracción en cada uno de los problemas del instrumento, recordar el concepto de fracción en cada uno de ellos, integrar y organizar para combinarlos y poder resolver la suma o resta que se les estaba planteando, dando la fracción suma o diferencia en el contexto que para él tenía significado, aún cuando no se le estuviese pidiendo en el problema. Así mismo, el alumno demostró ser cooperativo, creativo, participativo y crítico cuando pudo vincular contextos que aparentemente no se relacionaban en los diversos problemas; cuando transformaba el material concreto (fichas, bandas de papel, tarjetas, rectas numéricas) al cortar, doblar y pegar las partes en que se fraccionaban algunas unidades, para conseguir el que más se adecuaba a su respuesta; y, finalmente, cuando al dar estas respuestas lo hacía en diversos contextos, mostrando con ello la comprensión del concepto que se estaba mediando. De este modo, se ratificó la propuesta teórica de Duval (1993) de que la coordinación entre los registros (espontaneidad en la actividad de conversión y la potencia de las transferencias alcanzadas por este grupo en el trabajo de Vargas) produjo rapidez en las actividades de tratamiento.

A nivel del docente, la implementación de la estrategia logró mostrar lo relevante que es en la enseñanza de las operaciones con fracciones, la hipótesis sobre qué enseñar (mediar), qué aprender (construir), y tomar en cuenta que en el aula se trabaja con los conocimientos personales (experiencias) de los alumnos, al escoger problemas donde tengan sentido las operaciones con fracciones y no ejercicios aritméticos ($\frac{1}{2} + \frac{5}{9}$) que no se le presentan en la vida cotidiana.

Se recomienda complementar la estrategia presentada, con actividades de tipo algorítmico una vez se haya comprendido el concepto de suma y resta de fracciones, a fin de que el estudiante tenga las dos modalidades de estrategia y pueda desenvolverse ante cualquier situación que se le presente en la vida diaria escolar. También se sugiere seguir esta investigación, utilizando fracciones en las que los denominadores no sean múltiplos ni primos entre sí, a fin de completar el diseño. Por último, se recomienda indagar acerca de la transferencia de la fracción decimal a porcentaje, ya que en las respuestas dadas por los alumnos no se asocian estos contextos, a pesar de su aparente afinidad.

Referencias Bibliográficas

- Andonegui, M., Vargas, A. (2002). Los sistemas de representación semiótica en el aprendizaje del concepto de fracción. En: C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 15, Tomo 1, pp. 201-206.
- Carpenter, T., Moser, J. (1983). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts. En: R. Lesh, M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp. 7-39. New York, Academic Press.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 5, 37-65. Strasbourg, IREM.
- Flores, R. (1994). *Hacia una Pedagogía del Conocimiento*. McGraw-Hill, Colombia.
- García, J.E., García, F.F. (1989). *Aprender investigando*. Sevilla, Diada.
- Greenes, C., Schulman, L., Spungin, R. (1993). Developing sense about numbers. *Arithmetic Teacher*, 40, 5, 9-28.
- Mosquera, J. (1995). *Investigación en Matemáticas Básicas. Selecciones del Arithmetic Teacher, Research into Practice*. Caracas, Autor.
- Neale D. C., Smith D., Johnson V.G. (1990). Implementing conceptual change-teaching in primary science. *The Elementary School Journal*, 91, 2, 109-131.
- Resnick, L. B. (1983). Learning complex concepts: The case of decimal fractions. *Paper presented at the 24th annual meeting of the Psychonomics Society*. PS, San Diego.
- Resnick, L. B. (1987). Learning to understand arithmetic. En: R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*, Vol. 3, p. 41-95.
- Ruiz, C. (1988). La Estrategia Didáctica Mediadora: Una alternativa para el desarrollo de procesos en el aula. *Investigación y Posgrado*, Vol. 3, N° 2, 57-73.
- Standbridge, B. (1990). A constructivist model of learning used in the teaching of junior science. *The Australian Science Teachers Journal*, 36, 4, 20-28.
- Sanchez, V. Y Llinares, S. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid, Síntesis.
- Szczurek, M. (1978). *La Estrategia Instruccional. Trabajo que propone un modelo para planificación de la Estrategia Instruccional*. Autor, Mimeo.
- Valdivé, C. (2000). *El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones*. Maestría Interinstitucional en Matemática (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto.
- Vargas, A. (2000). *Efecto del uso de la diversificación de contextos representacionales en el aprendizaje del concepto de fracción*. Maestría Interinstitucional en Matemática (Trabajo de Grado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto.