Una experiencia didáctica referente a la introducción del tema Ecuaciones en educación básica

Milagro Hernández y Martín Andonegui Zabala
Instituto La Salle y Universidad Pedagógica, Barquisimeto, Venezuela
ioritz@hotmail.com

Resumen

El trabajo presenta los resultados de la aplicación de una estrategia constructiva para la introducción del tema de las ecuaciones, que toma en cuenta el paso de lo aritmético a lo algebraico y de lo concreto a lo abstracto, que se centra en la actividad y creatividad del alumno, y que considera el uso de diferentes sistemas de representación en la resolución de las ecuaciones (tanteo sistemático, uso de la balanza, despeje en contexto simbólico). El modelo se aplicó a una sección de 6° grado de Educación Básica, integrada por 25 alumnos de 11 y 12 años, de una escuela pública de Barquisimeto (Venezuela). Se desarrolló a lo largo de seis sesiones de 90 minutos cada una. Los resultados evidencian que la estrategia implementada resultó exitosa; también resultó motivadora y promotora de la creatividad y la participación. En cuanto a los aprendizajes evidenciados durante la experiencia, cabe destacar que los alumnos reconocen el carácter bidireccional que tiene el signo de la igualdad en álgebra y la equivalencia de los miembros de una ecuación, identifican la incógnita en una ecuación como un número desconocido, e interpretan ese número como solución de la ecuación; también, que llegan a dotar de significado al algoritmo convencional de despeje.

Antecedentes

Entre los temas a desarrollar en el currículo matemático el álgebra constituye uno de los obligados tópicos a estudiar teniendo como su antecesora la aritmética. El paso de la aritmética al álgebra es causa de dificultades y frustraciones en las matemáticas escolares, ya que antes de iniciarse en el álgebra, el alumno sólo ha estudiado una matemática en la que prevalece el dominio de expresiones aritméticas. En cambio, los nuevos conceptos algebraicos le exigen el dominio de un lenguaje algebraico, abstracto, que requiere del manejo de algunos elementos conocidos por él -pero hasta ahora en términos aritméticos-; pero además el álgebra, a diferencia de la aritmética, implica el uso de símbolos y convenciones a las cuales el alumno no se ha enfrentado anteriormente. En este sentido, Filloy y Rojano (1984), Booth (1988), Gallardo y Rojano (1989), Sfard (1991), Kieran (1992), Socas y Palarea (1997), entre otros, mencionan que algunas de las dificultades que tienen los alumnos de distintos niveles de grado respecto a los conceptos algebraicos se encuentran en las diversas interpretaciones que hacen del uso de las letras (incógnita, variable), los convenios de notación, los diferentes uso del signo igual, la naturaleza de la respuesta, y otras similares. Fernández (1997, p.87) expresa que "el nivel sintáctico, elemento esencial en el álgebra, es la principal causa de las dificultades asociadas al uso de la notación formal, sobre todo para los escolares que después de una larga trayectoria aritmética por la enseñanza infantil y primaria, tienen que abordar en secundaria nuevas reglas sintácticas algebraicas, contradictorias muchas veces, con las aritméticas. Un ejemplo es el uso de la yuxtaposición para indicar la posición de la multiplicación: en álgebra escribimos *ab* para indicar a x b, lo que representa una fuente de error en el aprendizaje, porque no puede aplicarse al producto de números". Al respecto, Kieran (1992) predice que se cometerán errores en el uso de cadenas de concatenación porque los estudiantes continuarán usando la interpretación previa (de la aritmética), y señala errores como concluir que $x = 6$ a partir de $4x = 46$, obviando que en el álgebra tal escritura denota multiplicación.

En este mismo orden de ideas, Booth (1988) afirma que para estimar los procedimientos requeridos en el proceso de transición de la aritmética al álgebra, primero estas relaciones y procedimientos deben ser comprendidos dentro del contexto aritmético; pues de no ser así su aprendizaje en álgebra se vera afectado, por lo que el alumno podría incurrir en errores.

La transición de la aritmética al álgebra no es sencilla, pues como se ha dicho, entre otras cosas requiere de un proceso que involucra un cambio en las concepciones conocidas por el estudiante, y esto debido a que tanto la estructura como el razonamiento algebraico son de naturaleza diferente a los de la aritmética. Los alumnos que se inician en álgebra tienen que desarrollar operaciones sobre símbolos y dar un nuevo significado a las acciones que se realizan con tales símbolos, determinadas por reglas muchas veces contradictorias con las aritméticas. Algunos cambios conceptuales involucrados en el paso de la aritmética al álgebra se ubican alrededor de.la naturaleza de los valores simbólicos, de las interpretaciones del signo igual, y de tener que afrontar problemas con nuevos procedimientos para resolverlos así como para denotar e interpretar los resultados.

Por otro lado, algunas corrientes psicológicas (Da Rocha, 1997) coinciden en afirmar que los estudiantes de matemática, al iniciarse en álgebra, necesitan trabajar con modelos y representaciones concretas de los conceptos y principios matemáticos antes de que ellos puedan comprender significativamente las formas matemáticas, abstractas y simbólicas, que corresponden a tales representaciones o modelos. Estas aseveraciones se apoyan en resultados teóricos según los cuales los estudiantes aprenden mejor las ideas y los conceptos cuando se les permite que lo descubran a través de experiencias relacionadas con el mundo físico o el entorno socio-ambiental, o manipulando modelos representativos de dichas ideas y conceptos, pues estos modelos contribuyen a darle sentido a los símbolos y al vocabulario abstracto de la matemática; además, los procesos se hacen así más significativos.

El tema de las ecuaciones (ecuaciones lineales de primer grado, con una incógnita, en N) es el primer tema algebraico que se presenta a los estudiantes en los programas vigentes de Matemática de Educación Básica en Venezuela. Además, es un tema recurrente en los contenidos programáticos de matemática, en todos los niveles educativos.

En el presente trabajo (Hernández, 2001) se consideró la posibilidad de diseñar y aplicar una estrategia instruccional para la introducción del mencionado tema que tomara en cuenta el paso de lo aritmético a lo algebraico, de lo concreto a lo simbólico, y en la que se aprovecharan las potencialidades del conocimiento aritmético ya dominado por los alumnos, para introducirse en el modo de pensar algebraico (Mason, 1996).

Estrategia que, basada en el hecho de que en el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra convergen una diversidad de variables, que de alguna manera van a afectar la comprensión y rendimiento de los estudiantes, tendiera a superar el esquema tradicional de la enseñanza, centrado en el docente como dador de clases y en el alumno como un receptor pasivo de la información que transmite el docente. Por esta razón, se tomaron como ideas fundamentales que:

-El alumno aprende a través de su participación activa en la construcción de su aprendizaje.

-El docente es mediador en el proceso de enseñanza aprendizaje, por lo que induce en el alumno:

-La compresión del significado e importancia de lo aprendido.

-La anticipación de las posibles respuestas ante situaciones nuevas.

-El contenido específico y sus exigencias.

-El nivel de abstracción implícito y la dificultad del aprendizaje.

Ahondando en el tema, la propuesta presentada en este trabajo pretendía crear condiciones favorables al desarrollo del aprendizaje significativo y de la creatividad. Es decir, se esperaba que el alumno desarrollara su capacidad lógica aplicando el razonamiento matemático; usara un lenguaje claro y preciso; defendiera sus puntos de vista utilizando argumentos concluyentes; adquiriera gusto por la matemática; usara adecuadamente el formalismo matemático; aceptara la posibilidad de cometer errores y los utilizara para crecer intelectualmente.

Para terminar de caracterizar la estrategia aplicada, y sustentándose en los estudios mencionados anteriormente acerca de los errores y dificultades en álgebra, este modelo instruccional enfrenta deficiencias referidas a la falta de insistencia en los conceptos de ecuación y solución de la ecuación, y a la desconexión entre los aspectos conceptuales y operativos. Deficiencias mencionadas por Andonegui (1997), quien subraya que las mismas conllevan a que el aprendizaje del algoritmo de resolución sea mecánico, y al subsiguiente fracaso a la hora de aplicarlo. Para subsanar estas deficiencias, el autor sugiere el uso de diferentes sistemas o esquemas de representación en la resolución de las ecuaciones.

Desarrollo de la experiencia

Caracterizada la estrategia instruccional en los términos expuestos hasta ahora, se procedió a desarrollarla con un grupo experimental formado por una sección de Sexto Grado de Educación Básica, sección integrada por 25 alumnos de edades comprendidas entre 11 y 12 años, de una escuela pública de Barquisimeto (Venezuela).

El modelo instruccional tiene como premisa fundamental la actividad de construir ecuaciones .Se inicia, pues, sugiriendo a los alumnos la construcción de ecuaciones a partir de una identidad aritmética (por ejemplo: $3 . 5 - 2 = 3 + 2 . 5$). Luego se esconde un número tras una figura, invitando al alumno a encontrar dicho número por la vía del tanteo sistemático; después, la figura es sustituida por una letra (incógnita). En este proceso, se destaca la acción de "construir identidades y ecuaciones". A partir de los ejercicios anteriores se establecen los conceptos de ecuación y también se da significado a la solución de una ecuación.

Para proceder a la resolución de ecuaciones, en un principio se trabaja por la vía del tanteo sistemático, tratando para ello de "colocarse en la cabeza del que construyó la ecuación". Después, se recurre a un soporte concreto, la balanza (representada física o gráficamente). Apoyándose en este soporte, se inicia al alumno en el proceso de despeje de la incógnita -

atendiendo a las restricciones que el modelo impone, adecuadas al contexto matemático de 6º grado-. Posteriormente –y a partir de los procesos de despeje desarrollados con el recurso de la balanza- se procede con las operaciones algebraicas de despeje, las cuales imponen la manipulación de símbolos y números en combinación con las operaciones aritméticas.

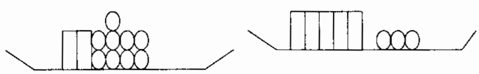
La estrategia instruccional se desarrolló en 6 sesiones de clase, cada una con una duración de 90 minutos. Cada sesión se planificó teniendo en cuenta un objetivo específico. La relación de tales objetivos es la siguiente:

1. Construir identidades aritméticas
2. Dar el concepto de incógnita y resolver ecuaciones por la vía del tanteo sistemático
3. Resolver ecuaciones del tipo $Ax + C = Bx + D$ usando el método de la balanza
4. Mostrar el proceso de despeje, utilizando símbolos
5. Establecer el algoritmo para el despeje de la incógnita en una ecuación
6. Consolidar el algoritmo para el despeje de la incógnita en una ecuación.

Como complemento, cada sesión de clase culminaba con la entrega de una Hoja de Ejercicios -relativos a las actividades desarrolladas en la sesión- para ser resueltos en el aula, y cuya posterior evaluación servía como punto de partida para la siguiente sesión. Finalizadas las seis sesiones, en la clase inmediatamente posterior se llevó a cabo la evaluación final del proceso.
Como muestra del tipo de actividades desarrolladas, se presenta un segmento de la planificación de la Cuarta Sesión, cuyo objetivo era "Mostrar el proceso de despeje, utilizando símbolos":
Se propone resolver la ecuación: $2x + 9 = 5x + 3$

Se utilizarán dos procedimientos de despeje: en el lado izquierdo, el método de la balanza; y en el derecho, el correspondiente procedimiento de despeje, usando símbolos:

Balanzas **Símbolos**

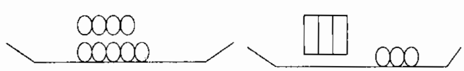


$$2x + 9 = 5x + 3$$

Quitar

Restar 2x en ambos miembros

$$2x - 2x + 9 = 5x - 2x + 3$$

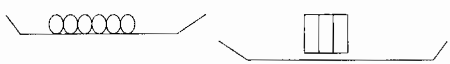


$$9 = 3x + 3$$

Quitar

Restar 3 unidades en ambos miembros

$$9 - 3 = 3x + 3 - 3$$



$$6 = 3x$$

$$\frac{6}{3} = x$$

De donde:

$$\boxed{2 = X}$$

Durante este proceso se hacen las siguientes preguntas:

¿Cuántos elementos se pueden quitar cada vez, sin perder el equilibrio?

¿Qué operación aritmética se asocia con quitar?

¿Cómo puedo verificar que las nuevas ecuaciones que voy obteniendo son correctas?

¿Qué operación final realizo para encontrar el valor de x? ¿Por qué?

¿Cómo verifico que el valor numérico despejado es la solución de la ecuación?

Las preguntas tienen como objetivo conducir a los alumnos a deducir las operaciones que realizan y en qué momentos del proceso, así como a controlar este proceso".

Resultados

Entre los resultados obtenidos podemos destacar los que muestra la siguiente tabla, relativa a los porcentajes promedio de las respuestas de los alumnos a las seis Hojas de Ejercicios propuestas en el aula –una al final de cada sesión-:

Hoja N°	N° de ejercicios	R. correctas	R. incorrectas	Sin responder
1	11	72.7	24.3	3.0
2	17	39.9	24.3	35.8
3	5	80.0	14.2	5.8
4 B	4	86.9	10.7	2.4
4 S	4	48.8	22.6	28.6
5 B	2	87.5	-	12.5
5 S	2	87.5	-	12.5
6	3	63.5	17.5	19.0

4 B, 5 B: Ejercicios a resolver, vía balanza 4 S y 5 S: Los mismos ejercicios, vía simbólica

Del análisis de estos datos puede inferirse que hubo ciertas dificultades al finalizar las sesiones 2 (Dar el concepto de incógnita y resolver las ecuaciones por la vía del tanteo sistemático) y 4 (Mostrar el proceso de despeje, utilizando símbolos), superadas en sesiones posteriores. En cuanto a las respuestas a la Hoja 6, hay que hacer notar que en dos de las tres ecuaciones propuestas –y sin ejercitación previa- se incluyó el signo –, con la idea de crear intencionalmente un obstáculo cognitivo; sorprendentemente, 48% de los alumnos resolvieron correctamente ambas ecuaciones.

En cuanto a la evaluación final, la siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Ítem	Ecuación	R. correctas (%)	R. incorrectas (%)	Sin responder
a	$9 + x = 16$	100.0	-	-
b	$4x + 3 = 3 + 9x$	72.3	22.7	-
c	$3x + 26 = 8x + 6$	72.3	22.7	-
d	$6x - 4 = 2x + 16$	31.8	40.9	27.3
e	$25x + 80 = 180 + 5x$	40.9	36.4	22.7
f	$14 - 3x = 5x - 2$	63.6	31.8	4.6

El análisis de estos datos permitió establecer como conclusiones que el porcentaje de respuestas correctas es mayor si las ecuaciones sólo presentan signos de adición (ítems a, b, c); y que existe cierta dificultad para resolver ecuaciones con algún signo de sustracción (ítems d, f), así como las que presentan números relativamente grandes (ítem e).

También resulta de interés la siguiente tabla, que presenta el porcentaje de respuestas correctas e incorrectas asociadas al método utilizado:

	R. correctas			R. incorrectas		
Ítem	Balanza	Símbolo	Tanteo	Balanza	Símbolo	Tanteo
a	13.6	9.1	77.3			
b	45.5	27.3	4.5	13.6	9.1	
c	45.5	27.3	4.5	13.6	9.1	
d		27.3	4.5	9.1	31.8	
e		31.8	9.1	9.1	22.7	4.5
f		63.3		13.6	13.6	4.5

Obsérvese el predominio del método de tanteo para resolver la ecuación *a*, así como el de la balanza para las ecuaciones *b* y *c*, y el de despeje simbólico para las restantes. Particularmente llama la atención el éxito relativo (63.6%) obtenido en la resolución de la ecuación *f*, habida cuenta de la presencia de signos negativos en ella.

Conclusiones

Como conclusiones generales podemos establecer, además:

1 La estrategia implementada resultó exitosa, como se evidencia en el desarrollo de las sesiones de aula, así como en los resultados de las hojas de ejercicios y de la evaluación final. También se considera motivadora y promotora de la participación de los alumnos, al ofrecer diversas maneras de trabajo: en grupo, pasar a la pizarra, resolución de hojas de ejercicios en grupo e individualmente. Es innovadora y favorece la creatividad, brindando al alumno diversas vías para la resolución de ecuaciones. Permite la interacción permanente alumno–docente y alumno-alumno. Destaca este último punto, pues se observó la integración efectiva de los alumnos en grupos, así como la ayuda de los más adelantados hacia otros con alguna dificultad en la comprensión del tema.

2. Se logra que el estudiante sea un sujeto activo en el proceso, cuando selecciona de los procedimientos estudiados aquel que se adecua a la ecuación que se le plantea.

3. La estrategia puede considerarse efectiva por cuanto permitió a la mitad de los alumnos superar el obstáculo cognitivo de la introducción del signo negativo en las ecuaciones.
4. En cuanto a los aprendizajes evidenciados durante la experiencia, cabe destacar:

   -Los alumnos reconocen el carácter bidireccional que tiene el signo de la igualdad en álgebra, ya que al construir ecuaciones parten de una igualdad.
   -Reconocen la equivalencia de los miembros de una igualdad, aun cuando se involucran números y letras, y advierten la diferencia entre estos últimos
   -Los alumnos identifican la incógnita en una ecuación como un número desconocido e interpretan ese número como solución de la ecuación.
   -Los alumnos reconocen la convención establecida entre un número y la incógnita cuando están escritos así: 4x, tal como se demostró en la resolución de ecuaciones.
   -Los alumnos identifican las operaciones y sus inversas.
   -Resuelven con éxito las ecuaciones cuyas soluciones son 1 (uno) y 0 (cero).

5. Los resultados de este estudio demuestran que hubo transferencia del método de la balanza al de despeje simbólico.

Referencias bibliográficas

Andonegui, M. (1997). *Esquemas de representación en la resolución de ecuaciones de primer grado*. Valencia, II Congreso Venezolano de Educación Matemática, mimeo.

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En: A.F. Coxford (Ed.), *The ideas of Algebra, K-12*, p. 20-32. Reston, NCTM.

Da Rocha, J.T. (1997). Lenguaje algebraico. Un enfoque psicológico. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, Octubre, 25-38.

Fernández, F. (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, Octubre, 75-91.

Filloy, E., Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. En: J.M. Moser (Ed.), *Prfoceedings of VI PME-NA*, p.51-56. Madison, University of Wisconsin.

Gallardo, A., Rojano, T. (1989). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9.2, 155-188.

Hernández, M. (2001). *Una propuesta didáctica para la introducción del tema ecuación en Sexto Grado de Educación Básica*. Barquisimeto, Maestría Interinstitucional en Matemática (Trabajo de grado).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En: D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 390-419. New York, MacMillan.

Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de la generalidad. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, Julio, 7-21.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Socas, M., Palarea, M.M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, Octubre, 7-24.