La resolución de problemas en la formación de profesionales matemáticos en Cuba.

Baldomero Valiño Alonso *Julián Bravo Castillero.*

Universidad de La Habana. Facultad de Matemática y Computación. Cuba.

bval@matcom.uh.cu jbravo@matcom.uh.cu

Resumen

En este trabajo se presentan las experiencias desarrolladas con el objetivo de contribuir a la formación de habilidades para la resolución de problemas en estudiantes de primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática. Concretamente, se presenta la propuesta de actividades a desarrollar dentro del contexto de la asignatura "Seminario de Problemas I", con la que se inicia el programa de la disciplina "Práctica Profesional del Matemático", existente en el plan de estudio de la carrera en las universidades cubanas desde el curso 1990 – 91 (Plan de Estudio "C" de la carrera de Matemática). Uno de los propósitos del curso es recorrer, a partir de problemas físicos, geométricos, algebraicos, etc., diferentes etapas de la investigación matemática desde la formulación del problema; la obtención del modelo matemático (por ejemplo, determinar las raíces de una ecuación); los métodos de resolución (exactos y aproximados: numéricos y/o analíticos) y su implementación computacional; la utilización de técnicas para verificar la corrección de los resultados obtenidos (compatibilidad con las unidades de magnitud, estudio de casos límite, etc.) y su interpretación. Otro objetivo importante que persigue este curso es contribuir al desarrollo de hábitos de investigación científica mediante la orientación de un trabajo de curso sobre aspectos de la vida y obra de algún matemático. La exposición y defensa de los resultados de sus búsquedas, ante el colectivo de estudiantes, permite desarrollar sus habilidades de expresión oral y su formación cultural en la especialidad.

Antecedentes de la disciplina

Los antecedentes históricos de la disciplina "Práctica Profesional del Matemático" se remontan a los primeros años de la década de los sesenta cuando, pretendiendo dar cumplimento a los lineamientos trazados por la Reforma de la Educación Superior de 1962, se hacen los primeros intentos de lograr una vinculación efectiva de los estudiantes de matemática con la problemática social, con el objetivo de ampliar el espectro de posibilidades de utilización de este personal altamente calificado, que ante de 1959 encontraba su realización profesional, fundamentalmente, en el ejercicio de la docencia secundaria y universitaria. Primero en forma esporádica y luego con mayor frecuencia, comienzan a participar los estudiantes de Matemática, conjuntamente con sus profesores, en distintas tareas de investigación y desarrollo, en colaboración con profesionales de otras carreras. Un ejemplo de estas actividades, en la que hubo una participación masiva, fueron las tareas previas y la capacitación y el procesamiento de datos del censo de población y vivienda realizado en Cuba en 1971.

Un momento decisivo en el proceso de integración de los estudiantes universitarios a la producción y a la investigación fue el curso 1971-72, a partir del cual se generalizó la vinculación del estudio con el trabajo en todas las carreras de la universidad de La Habana y, un poco después, en las restantes universidades. Los estudiantes de Matemática se vinculan en esta etapa a distintas dependencias de organismos estatales y centros de investigación y de educación superior.

El régimen de estudio-trabajo tuvo su base oficial en el primer plan de estudio unificado de Matemática, que entró en vigor en las tres universidades cubanas en el curso académico 1973-74. En el curso 1975-76 comienza una nueva adecuación de dicho plan, incrementando las horas semanales de las semanas lectivas en primero y segundo años, la práctica de producción comienza a desarrollarse a partir del tercer año y se fija como forma de culminación de los estudios, el trabajo de diploma.

Al crearse en 1976 el Ministerio de Educación Superior, se emprende de inmediato la tarea del perfeccionamiento de los planes y programas de estudio de la Educación Superior. En el curso 1977 – 78 se ponen en vigor el plan de estudio "A" para la carrera de Matemática, con las especializaciones "Matemática Pura", "Estadística Matemática" e "Investigación Operacional". La duración de los estudios se fija en cinco años, con cinco semestres en tronco común, prácticas de elevación de la calificación y especializada en tercero y cuarto años y el trabajo de diploma como forma de culminación de la especialidad.

En el plan de estudio "B" de Matemática, vigente desde el curso 1982-83, desaparecen las especializaciones que existían en el plan "A" y se plantea el objetivo fundamental de la formación de un matemático de perfil amplio. Sin embargo, en la práctica no siempre se lograba la realización de un sistema de tareas que contribuyeran a la formación de las habilidades de aplicación y generalización de los conocimientos teóricos desarrollados por las diferentes disciplinas del Plan.

En el plan de estudio "C" (1990 – 91) adquiere mayor relevancia el objetivo de formación de un profesional de perfil amplio, por lo que se comienza por definir el concepto de matemático de perfil amplio, cuya actividad profesional se caracteriza por la aplicación de los métodos y modelos matemáticos ya conocidos a la resolución de problemas reales surgidos en las diferentes esferas de actuación, la elaboración de nuevos métodos cuando los ya conocidos no sean aplicables, la modelación matemática de situaciones diversas que forman parte del objeto de otras profesiones, la utilización de los algoritmos de cálculo que posibiliten la utilización de las programotecas existentes o mediante el diseño de los algoritmos de cálculo elaborados para la utilización práctica de esos modelos, la asesoría a otros profesionales de estas materias y su enseñanza en el nivel de educación superior. Todas estas tareas pueden dar lugar al planteamiento de problemas de índole puramente teórica, cuya solución implique nuevos aportes al conocimiento matemático.

La disciplina de la "Práctica Profesional del Matemático" se crea en el plan de estudio "C" para materializar esos objetivos de la formación del futuro matemático, integrando en una sola disciplina los aportes de las restantes disciplinas de la carrera a la resolución de problemas de aplicación e investigación, para los cuales se requiere frecuentemente la utilización de diversos métodos y algoritmos que son objeto de estudio de distintas disciplinas. En esta disciplina se conjugan actividades académicas, laborales e investigativas que intentan modelar el conjunto de tareas profesionales que deberá asumir el egresado en su vida laboral.

En la nueva versión del plan "C" (1998 – 99), ver [1], se han introducido ligeros cambios en el programa de la disciplina, con el objetivo de fortalecer la concepción de perfil amplio en la formación del matemático. Las prácticas laborales e investigativas comienzan a desarrollarse desde el primer año, de manera que su desarrollo y organización puedan conjugarse con los seminarios de problemas y los seminarios especializados. Además, las asignaturas optativas se incluyen dentro de este programa (al igual que en el anterior se incluían los cursos especializados optativos) para dejar constancia del número de tales asignaturas que cada estudiante está obligado a cursar en la carrera.

Nuestro principal propósito es someter a su consideración y análisis el sistema de conocimientos y la metodología empleada, para lograr cumplimentar los objetivos propuestos en la primera asignatura que constituye la disciplina "Práctica Profesional del Matemático", la cual es precisamente "Seminario de problemas I", con el fin de enriquecerlos y perfeccionarlos.

Objetivos de la asignatura:

Seminario de problemas I se imparte durante 32 horas lectivas del segundo semestre del primer año de la carrera. Los objetivos generales educativos e instructivos a cumplir según establece el programa de la disciplina son:

1. Consolidar la concepción científica del mundo, y en particular el objeto de la ciencia matemática, mediante la investigación referativa de datos históricos acerca de alguna de las teorías que se estudian en las restantes disciplinas del año o sobre la biografía de los matemáticos que las crearon.
2. Aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en las asignaturas Álgebra I, Análisis Matemático I, Geometría Analítica y Programación de Algoritmos, para la resolución de problemas especialmente diseñados que contribuyan a completar y profundizar dichos conocimientos, mediante el trabajo independiente de los estudiantes.
3. Adquirir hábitos de búsqueda de información científica en bibliotecas, centros de información, vía Internet, etc., relativas a los problemas propuestos en el seminario y a ejercitarse en el uso de la literatura auxiliar, tanto en la lengua materna como en idioma inglés.
4. Desarrollar habilidades de expresión oral mediante la exposición y defensa de los resultados de sus búsquedas, ante el colectivo de estudiantes.

Contenido de la asignatura:

El programa analítico no es rígido y cada profesor tiene la libertad de seleccionar un sistema de conocimientos para cumplimentar estos objetivos. Los contenidos seleccionados son, por temas:

i) Problemas geométricos y físicos que conducen a la solución de ecuaciones algebraicas.

ii) Introducción a los métodos iterativos. Extracción de raíces cuadradas por el método de aproximaciones sucesivas. Aplicación del método de aproximaciones sucesivas a la extracción de raíces con exponente natural. Método de iteraciones.

Significado geométrico del método de iteraciones.

iii) Método de cuerdas. Método de cuerdas perfeccionado. Método de Newton para la solución aproximada de las ecuaciones algebraicas. Significado geométrico del método de Newton. Elección de las primeras aproximaciones. Método combinado para resolver las ecuaciones. Criterio de convergencia del proceso de iteraciones. Rapidez de convergencia del proceso de iteraciones. Aproximaciones sucesivas en la geometría.

iv) Noción sobre los métodos de perturbación para la solución de ecuaciones algebraicas dependiente de un parámetro pequeño.

Desarrollo metodológico

1. Desde el primer encuentro después de declarar los objetivos y características del curso, se recomienda la orientación de un Trabajo Investigativo sobre datos históricos acerca de alguna de las teorías que se estudian en las restantes disciplinas del año o sobre la biografía de los matemáticos que las crearon. La entrega de los Trabajos de Curso pudiera señalarse para la semana 13 (el curso consta de 16 semanas) con el objetivo de que las correspondientes defensas se realicen durante las subsiguientes semanas mediante presentaciones orales ante el colectivo de estudiantes.

2. También desde el primer encuentro se proponen algunos problemas geométricos y físicos que conducen a la solución de ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, **Problema (A)** Dividir un segmento $\overline{AB}$ en la razón media y extrema (es decir, en los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ tales que $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB}$). Respuesta: $x^2+lx-l^2=0$, donde x representa la longitud del segmento $\overline{AC}$; **Problema (B)** Dividir el ángulo α en tres partes iguales. Respuesta: $4x^3-3x-\cos\alpha=0,\ x=\cos\frac{\alpha}{3}$ Recordar que este es uno de los tres problemas clásicos de la matemática griega, que se debían resolver con regla y compás. Trisección del Ángulo, Duplicación del Cubo $(x^3=2l^3)$, Cuadratura del Círculo $(x^2=\pi r^2)$. Para mayor documentación, consultar, por ejemplo [2] páginas 268 – 286. **Problema (C)** Una piedra se deja caer en un pozo. Hállese la profundidad del pozo, si se conoce que el sonido provocado por la caída de la piedra se ha captado T segundos después de topar la piedra el fondo del pozo.

Respuesta: $\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=T$, siendo v la velocidad del sonido, g la aceleración de la gravedad y x la profundidad del pozo. Observar que el cambio $\sqrt{x}=y$ transforma la ecuación irracional en $\frac{y^2}{v}+\sqrt{\frac{2}{g}}\,y-T=0$. La solución de este problema es

$x(t)=\left(\sqrt{\frac{2v^2}{g}+Tv}-v\sqrt{\frac{2}{g}}\right)^2$ importante resulta destacar las interpretaciones físicas de los casos límites de $x(t)$ cuando $t \to 0$ y $t \to +\infty$. **Problema (D)** (Aquiles y la Tortuga). Sea la distancia entre ambos 1000 pasos, la velocidad del primero de 10 pasos por segundo y la del segundo 1 paso por segundo. ¿qué tiempo demoraría Aquiles para alcanzar a la Tortuga?. Respuesta: Aquí la ecuación es $10t-t=1000$ donde t designa el tiempo buscado, $t = \frac{1000}{9} s = 111 \frac{1}{9} s$.

. Los seminarios segundo y tercero son dedicados a la discusión y solución de los problemas propuestos, y a la introducción del método de aproximaciones sucesivas mediante los razonamientos del filósofo griego Zenón de Elea (≈-500), usados para "demostrar" la ausencia de movimiento en la naturaleza, a partir del problema de Aquiles y la Tortuga previa transformación del modelo en $t_{n+1} = 100 + \frac{t_n}{10}$. Ilustrar que la sucesión $t_1 = 100, t_2 = 110, t_3 = 111, t_4 = 111{,}1\ldots$ converge al valor exacto $t = 111\frac{1}{9}$ Destacar que la clave del éxito, o sea de la convergencia radica en que el término $\frac{t}{10}$ es pequeño comparado comparado con t y mostrar que de lo contrario la sucesión no convergería a la solución buscada. Supongamos, por ejemplo, que Aquiles no compite con una tortuga lenta sino con un antílope cuya velocidad es de 20 pasos por segundo. En este caso la ecuación sería $10t-20t=1000$. La solución $t=-100$ indica que Aquiles y el animal se encontraban al lado hace 100 segundos y la diferencia entre ellos sólo va aumentar en lo ulterior. Aquí la ecuación análoga de "punto fijo" $t_{n+1} = 100+2t_n$, para $t_0=0$ conduce a una sucesión divergente $t_1 = 100, t_2 = 300, t_3 = 700, t_4 = 1500, \ldots$ Aquí se manifiesta la necesidad de exigir ciertas condiciones a la función definida por el miembro derecho de $x = \varphi(x)$. A modo de un segundo ejemplo sobre el método de aproximaciones sucesivas para la resolución de ecuaciones se pudiera estudiar la ecuación $ax=b, \frac{1}{2} \leq a \leq 1$ mediante previa transformación a $(*) x_{n+1} = (1-a)x_n + b$. La justificación de la convergencia del método en este caso queda garantizada por la igualdad $\frac{b}{a} = \frac{b}{1-(1-a)} = \sum_{q=0}^{\infty} b(1-a)^q$ pues si designamos por x_n la suma de los n primeros términos de la serie geométrica convergente resulta la igualdad (*). Como ejercicio de tarea proponer la obtención de un "esquema iterativo" para calcular con la exactitud que se desee la raíz cuadrada de un número a.

. El cuarto seminario es dedicado a la extracción de raíces cuadradas por el método de aproximaciones sucesivas y a la fundamentación matemática de este proceso iterativo, siguiendo las ideas desarrolladas en las páginas 21-28 de [3]. De tarea se propone la confección de un programa capaz de calcular la raíz cuadrada de cualquier número positivo con la precisión deseada. En este punto se destaca la interpretación numérica del concepto de límite (sucesión de Cauchy) y su importancia como criterio de parada de los procesos iterativos. Además, se conduce (mediante ejercicios que conducen a la demostración de que el límite de la sucesión de los correspondientes errores $\alpha_n = x_n - \sqrt{a}$ converge a cero cuando $n \to +\infty$) a que los estudiantes demuestren la convergencia del correspondiente esquema iterativo y que concluyan la necesidad tener una aproximación inicial "adecuada", exigencias para la función que modela el miembro derecho de la ecuación de punto fijo $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ y un criterio de parada de dicho proceso iterativo.

5. El quinto seminario involucra la aplicación del método a la extracción de raíces con exponente natural. Esta investigación se orienta de tarea al finalizar el seminario 4.
6. Los seminarios 6 y 7 son dedicados a la generalización del método de iteraciones para ecuaciones más generales, su significado geométrico. El concepto de aplicaciones contraídas y su relación con el método de iteraciones.
7. Los seminarios 8 y 9 son dedicados al estudio del Método de cuerdas, Método de cuerdas perfeccionado, Método de Newton y sus correspondientes significados geométricos. Para este último Método se introducen criterios adecuados para la elección de las primeras aproximaciones. Criterio de convergencia del proceso de iteraciones y su rapidez de convergencia.
8. Los seminarios 10 y 11 son dedicados a la aplicación combinada de los métodos estudiados para resolver ecuaciones. Se orienta la confección de programas para el cómputo.
9. Los seminarios 12 y 13 son utilizados para introducir y ejercitar la noción del método de perturbaciones regulares y singulares con el objetivo de resolver ecuaciones algebraicas dependientes de un parámetro pequeño ε. Para este punto se siguen los primeros epígrafes de [4] donde sólo ecuaciones algebraicas de segundo grado, dependientes de parámetros pequeños, son investigadas, de manera que el estudiante puede notar la eficiencia de los métodos de perturbación comparando las soluciones aproximadas con las ya conocidas soluciones exactas.

Conclusiones

La selección del método de aproximaciones sucesivas como lineamiento básico para lograr los objetivos del programa está amparada por la gran importancia de este método en los fundamentos de importantes resultados teóricos que son básicos en otras disciplinas de la carrera. Por ejemplo, el teorema de punto fijo y el concepto de aplicaciones contraídas es vital para la demostración de los teoremas de existencia y unicidad del problema de Cauchy para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde se aplica el conocido método de las aproximaciones sucesivas de Picard.

El conocimiento de la existencia de métodos aproximados (numéricos y analíticos) de solución de problemas, desde el mismo primer año, contribuye a la formación de un matemático capaz de enfrentar situaciones prácticas cuyos modelos matemáticos, difícilmente puedan ser abordados por métodos exactos de solución. Este aspecto es esencial en la formación de un matemático de perfil amplio.

Referencias bibliográficas

Valiño, B. (1998). *Plan de Estudio "C" Perfeccionado. Carrera de Matemática.* Comisión Nacional de la Carrera de Matemática, La Habana.

Davidson, L. J & Reguera, R. & Frontela, R y Díaz, M. (1995). *Problemas de Matemática Elemental 2,* Pueblo y Educación.

Vilenkin, N.Ya. (1978). *Método de Aproximaciones Sucesivas*, Mir, Moscú.

Hinch, E.J. (1991). *Perturbation Methods*, Cambridge University Press.