

Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros

Otilio B. Mederos Anoceto y Aldo M. Ruiz Pérez

Universidad Central de las Villas. Centro de Estudios de Educación. Cuba.

oma8111@yahoo.es

Resumen

El objetivo principal de este artículo es ofrecer recomendaciones para estudiar los cuadriláteros convexos tomando como punto de partida las potencialidades que brinda la operación clasificación de conceptos. Tales recomendaciones surgen del análisis de varios trabajos que se han publicado relacionados con el tema y de la experiencia de los autores en la utilización de procedimientos adecuados para la realización de las operaciones con conceptos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en su país.

Introducción

Una revisión de los textos escolares y especializados pone al descubierto, que no son pocos los casos en que se cometen errores al utilizar la operación clasificación de conceptos y sobre todo, es muy común en algunos docentes, que siguen estos textos, apelar al término clasificar en casos en que no se está realizando tal operación. Estas insuficiencias pasan de profesores a alumnos y de unos textos a otros que utilizan los primeros como bibliografía. Por esta razón, existe la necesidad de que reflexionemos sobre la operación clasificación y la manera en que se debe proceder para utilizarla correctamente. Según Davíдов (1981), “una de las tareas centrales de la enseñanza consiste precisamente en proporcionar a los niños el conocimiento de los **esquemas clasificatorios**, expresivos de la correlación de los conceptos en uno u otro dominio. Específicamente, en la enseñanza de la Matemática, muchas veces no se aplica la operación clasificación adecuadamente, ni se utiliza para tomar decisiones ante diferentes variantes de estudio de un concepto, como es el caso de los cuadriláteros. En el presente artículo, en su primera sección, se define la operación clasificación de conceptos y se da un conjunto de reglas que debe tenerse en cuenta al realizarla. En la segunda sección, se discute sobre el modo de aplicar adecuadamente esta operación al estudio de los cuadriláteros convexos; lo que permite ejemplificar las reglas, así como la importancia de seguirlas. En la tercera sección, se analizan los esquemas sobre cuadriláteros convexos de los textos actuales para la Enseñanza General en Cuba, al estudiar la factibilidad de su empleo para la clasificación de estas figuras y se dan sugerencias que pueden ayudar a los profesores en su labor.

1. La operación clasificación de conceptos

Debido a que el artículo puede tener como máximo seis páginas, se presentan en esta sección la definición y las reglas que deben tenerse en cuenta al realizar la clasificación de un concepto, sin explicaciones y justificaciones. Para un estudio más amplio puede verse Mederos y Martínez (1989).

1.1. Definición de la operación clasificación de conceptos.

Dado un concepto (E, C) ; un conjunto de colecciones de propiedades de elementos de E , $P_i = \{P_{ij}\}$, $i \in I$, $j \in J_i$ (I y J_i son conjuntos), se llama criterio de clasificación de (E, C) si, y sólo si, la colección de conceptos (E, C) donde $C_i = C \cup P_i$, $i \in I$, es tal que $\{E_j\}$, $i \in I$, es una partición de E . Dado el criterio de clasificación $\{P_j\}$, $i \in I$; la operación que asocia al concepto (E, C) la colección $\{(E, C)\}$ se denomina clasificación de (E, C) según el criterio $\{P_j\}$, $i \in I$.

1.2. Reglas que deben tenerse en cuenta al realizar la clasificación de un concepto.

1. La clasificación debe realizarse partiendo de un solo criterio $P = \{P_j\}_{j \in I}$
2. Se debe comprobar que $E = \bigcup_{i \in I} E_i$
3. Se debe comprobar que $E_j \cap E_k = \emptyset$ para todo j de $I \setminus \{k\}$ y para todo k de I .
4. La clasificación debe ser proporcionada.
5. La clasificación debe realizarse sin saltos.

2. Estudio del concepto de cuadrilátero

El estudio de los cuadriláteros ha sido objeto de discusión, fundamentalmente en lo que respecta a la definición del concepto de trapecio. En el artículo de Maraldo (1980), se propone su estudio a partir de las definiciones:

- 1) **Cuadrilátero:** un polígono de cuatro lados.
- 2) **Trapecio:** un cuadrilátero en el cual, al menos un par de lados opuestos son paralelos.
- 3) **Paralelogramo:** un trapecio en el cual los dos pares de lados opuestos son paralelos.
- 4) **Rectángulo:** un paralelogramo con los cuatro ángulos rectos.
- 5) **Rombo:** un paralelogramo con los cuatro lados congruentes.
- 6) **Cuadrado:** (a) un rectángulo con sus cuatro lados congruentes, o
(b) un rombo con los cuatro ángulos rectos.

y utiliza un diagrama clasificatorio del concepto de cuadrilátero basado en las definiciones anteriores.

En el comentario de Baker (1980) se señala, que la mayoría de los autores definen el trapecio como un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos, y que consecuentemente los trapecios no son paralelogramos ni estos últimos, trapecios. En la reflexión de Seydel (1980) se celebra el artículo de Maraldo; pero se señala que la definición de trapecio dada por éste es incorrecta. Se plantea, además, que en un examen de 24 libros de texto de Geometría se reveló que sólo 4 de ellos no especifican que un trapecio es un cuadrilátero con dos, y sólo dos, lados paralelos. Sin embargo, esta discusión no da suficiente luz sobre porqué tomar una u otra definición de trapecio. Por eso, en esta sección analizaremos el asunto desde la perspectiva de la clasificación de conceptos.

2.1. Análisis de las definiciones de Maraldo.

Con respecto a la operación clasificación se presentan las dificultades siguientes:

1. No se clasifica el concepto de cuadrilátero porque el complemento de la extensión del concepto de trapecio con respecto a la extensión del concepto de cuadrilátero queda sin definir. Esta dificultad se puede evitar planteando un criterio de clasificación adecuado que, siguiendo la idea de Maraldo, pudiera ser el conjunto formado por la siguiente propiedad y su negación: "tener al menos un par de lados opuestos paralelos"; y entonces llamar a todo cuadrilátero que satisface esta propiedad trapecio y a todo cuadrilátero que no la satisfaga, trapezoide. Se obtendría así la clasificación 1 del concepto de cuadrilátero. Esta clasificación satisface las reglas 1, 2, 3 y 5. Con respecto a la regla 4, el concepto de trapecio tiene una extensión más amplia que en otras clasificaciones del concepto de cuadrilátero, como por ejemplo la correspondiente a la idea de Bernklan.

2. No se clasifica el concepto de trapecio. El complemento de la extensión del concepto de paralelogramo con respecto a la extensión del concepto de trapecio no se define. Siguiendo la idea de Maraldo, el criterio de clasificación natural del concepto de trapecio es el conjunto formado por las siguientes propiedades: 1) "tener dos pares de lados opuestos paralelos" y 2) "tener un solo par de lados opuestos paralelos". Entonces el concepto de paralelogramo corresponde a los trapecios que satisfacen la propiedad 1), y a los trapecios que satisfacen la propiedad 2) hay que darles un nombre, que pudiera ser, trapecios no paralelogramos. Se tendría la clasificación 2 que también satisface las reglas 1, 2, 3 y 5.

3. No se clasifica el concepto de paralelogramo. No se cumple la regla 2 porque el complemento de la unión de las extensiones de los conceptos de rectángulo y rombo, con respecto a la extensión del concepto de paralelogramo no corresponde a ningún concepto. La regla 3 no se cumple porque las extensiones de los conceptos de rectángulo y rombo tienen elementos comunes. Para lograr una clasificación de los paralelogramos se puede

tomar como criterio, el conjunto de las colecciones $P_1 = \{P_{11}, P_{12}\}$, $P_2 = \{P_{11}, P'_{12}\}$, $P_3 = \{P'_{11}, P_{12}\}$ y $P_4 = \{P'_{11}, P'_{12}\}$, donde P_{11} y P_{12} son las propiedades: "tener un ángulo recto" y "tener todos los lados iguales", respectivamente y P'_{11} y P'_{12} sus correspondientes negaciones. Los paralelogramos que cumplen las dos propiedades, reciben el nombre de cuadrados; los que satisfacen sólo la primera, se nombran rectángulos no cuadrados, los que cumplen sólo la segunda, se llaman rombos no cuadrados y los que no cumplen ninguna de las dos propiedades, se nombran romboides. Se tiene así la clasificación 3. Esta clasificación cumple las reglas de la 1 a la 5.

En la clasificación 3 aparecen los conceptos no usuales de rombo y rectángulo no cuadrados; por tal razón, se recomienda que si se realiza esta clasificación, entonces se definan adicionalmente los conceptos de rectángulo y rombo y que se clasifiquen (clasificación 4) los rectángulos en cuadrados y rectángulos no cuadrados, y el rombo (clasificación 5) en cuadrados y rombos no cuadrados.

¹Un paralelogramo tiene los cuatro ángulos rectos si, y sólo si, tiene un ángulo recto.

Recomendación 1: siguiendo la idea de Maraldo, recomendamos que para clasificar el concepto de paralelogramo se proceda de la manera que hemos explicado anteriormente, la cual se resume en la clasificación 1-5.

Recomendación 2: definir los conceptos de rectángulo, rombo y cuadrado como lo hace Maraldo y formular además la definición de romboide. Por otra parte, señalamos que con estas definiciones no se hace una clasificación del concepto de paralelogramo y que si se quisiera clasificar dicho concepto, se recomienda proceder de acuerdo con las clasificaciones 3, 4 y 5.

3. Estudio de los cuadriláteros en la enseñanza general en Cuba

Los cuadriláteros se comienzan a estudiar en la primaria mediante procedimientos sustitutivos de la definición como la indicación, la descripción y la comparación en los primeros grados hasta llegar a definirlos en los últimos. Sin embargo, es en el séptimo grado donde se dan, por primera vez, las definiciones de estas figuras con más rigor y donde se estudian sus propiedades más importantes. Los libros de texto actuales de Matemática para la Enseñanza General en Cuba, que se utilizan en todas las escuelas, fueron elaborados como resultado de las experiencias existentes antes de la introducción del llamado “plan alemán” en la década del 70, de los propios textos de la extinta RDA que se adaptaron para ser utilizados en Cuba, así como de la basta experiencia de los profesores, maestros e investigadores cubanos, y de las influencias de los textos de otros países. En este momento se está proyectando la elaboración de nuevos textos para la secundaria básica con vista a la aplicación de varias transformaciones educacionales en ese nivel, las cuales se extenderán posteriormente al preuniversitario.

En el texto para séptimo grado (Muñoz y otros, 1989), el concepto de cuadrilátero convexo se define como “polígono convexo de 4 lados”. El estudio de los cuadriláteros se realiza utilizando las siguientes definiciones en el orden en que se exponen:

- 1) **Paralelogramo:** cuadrilátero convexo con los lados opuestos paralelos.
- 2) **Rectángulo:** paralelogramo con sus cuatro ángulos rectos.
- 3) **Rombo:** paralelogramo con sus cuatro lados iguales
- 4) **Cuadrado:** paralelogramo con sus cuatro ángulos iguales y sus cuatro lados iguales.
- 1) **Trapezio:** cuadrilátero convexo que tiene (al menos) un par de lados opuestos paralelos.
- 2) **Trapezio isósceles:** trapezio cuyos lados no paralelos tienen la misma longitud.
- 3) **Trapezio rectángulo:** trapezio que tiene dos ángulos rectos.
- 4) **Trapezoide:** cuadrilátero convexo que no tiene lados paralelos.
- 5) **Trapezoide simétrico:** trapezoide que tiene dos pares de lados consecutivos iguales.

Hay que señalar que la definición de trapezio isósceles no es satisfactoria desde el punto de vista lógico, pues le falta la propiedad de “tener sólo dos lados paralelos” antes de la propiedad que se especifica para los lados no paralelos.

En una parte de los textos revisados para la escritura de este artículo, el orden que se sigue coincide con el expuesto anteriormente; sin embargo a los efectos de la contribución que puede tributar la enseñanza de los contenidos sobre los cuadriláteros a la operación de clasificación de conceptos, somos del criterio que el estudio de los trapezios después de los

paralelogramos, siendo estos últimos clases especiales de trapecios, presenta desventajas para cumplir con tal propósito.

Por otra parte, como los profesores no están atados a seguir precisamente el orden del libro, entendemos productivo exponer nuestras opiniones y experiencias al respecto, con el fin de que puedan ser valoradas tanto por los que hayan hecho alguna transformación al tema de los cuadriláteros en su labor docente como por los que no.

A manera de resumen en el texto (Muñoz y otros, p. 103-105) se exponen algunos esquemas sobre los cuadriláteros cuyas definiciones presentamos al inicio de esta sección.

3.1- Análisis del esquema correspondiente a los cuadriláteros convexos.

En la página 103 se presenta el esquema 1 donde en un primer nivel aparece el concepto de cuadrilátero convexo, y en un segundo nivel los conceptos de paralelogramo, trapecio y trapecoide. Este esquema no corresponde a ninguna clasificación del concepto cuadrilátero, pues no se cumple la regla 3, ya que la intersección de las extensiones de los conceptos de trapecio y paralelogramo es no vacía. Si se desea obtener una clasificación de este concepto utilizando el criterio que hemos propuesto en 2.1, habría que utilizar el esquema 2. Sería útil en un tercer nivel realizar la clasificación 2 de 2.1 para obtener un esquema 3 con tres niveles.

3.2- Análisis del esquema correspondiente a los paralelogramos.

En relación con los paralelogramos se expone esquema 4 con tres niveles. En el primer nivel el concepto de paralelogramo, en el segundo los conceptos de paralelogramo más general y paralelogramos especiales. Aparecen en el tercer nivel, tomados a partir del concepto de paralelogramo especial, los conceptos de rectángulos, rombo y cuadrado. El primer nivel del esquema 4 no corresponde a ninguna clasificación del concepto de paralelogramo por las razones siguientes:

- 1) Los conceptos de “paralelogramo más general” y “paralelogramo especial” no aparecen definidos en el citado texto.
- 2) Es imposible dar una definición de estos conceptos de manera que sus extensiones no tengan elementos comunes, es decir, que se logre cumplir con la regla 3 y que se mantenga un sentido correcto de sus nombres.

El segundo nivel del esquema 4 no corresponde a ninguna clasificación del concepto “paralelogramo especial”, aún en el caso que éste hubiera sido definido, pues las extensiones de los conceptos: rectángulo, rombo y cuadrado tienen elementos comunes. Esta insuficiencia se resuelve mediante las clasificaciones 3, 4 y 5 que hemos propuesto en 2.1 y teniendo en cuenta la recomendación 2. De esta manera se obtiene el esquema 5 con el concepto de paralelogramo en un primer nivel; y con los conceptos de rectángulo no cuadrado, cuadrado, rombo no cuadrado y romboide en un segundo nivel.

3.3- Análisis del esquema correspondiente a los trapecios.

Para los trapecios en el texto (Muñoz y otros, 1989) se emplea el esquema 6 con el concepto de trapecio en un primer nivel; y los conceptos de trapecio más general, trapecio isósceles y trapecio rectángulo en un segundo nivel. Este esquema no corresponde a ninguna clasificación del concepto de trapecio por las razones siguientes:

- 1) El concepto de “trapezio más general” no se ha definido ni es posible definirlo con sentido, de manera que su extensión no incluya a la extensión de los otros tipos de trapezio del esquema.
- 2) Los conceptos de trapezio isósceles y de trapezio rectángulo resultan del concepto de trapezio a partir de distintos criterios.

El esquema 6, para ser utilizado con la intención de presentar una clasificación del concepto trapezio, tiene también como dificultad el no considerar los trapecios isósceles en un nivel más bajo, pues ninguna figura de este tipo puede ser un paralelogramo. Esto lleva a la necesidad de buscar un criterio para clasificar los trapecios no paralelogramos, que pudiera ser el conjunto formado por la propiedad siguiente y su negación: “tener los lados no paralelos iguales”. Entonces los trapecios que cumplen esta propiedad reciben el nombre de trapecios isósceles y los que no la tienen pudieran nombrarse trapecios no paralelogramos no isósceles. De esta manera se obtiene el esquema 7 en un primer nivel del cual aparece el concepto de trapezio no paralelogramo, y en un segundo nivel los conceptos de trapezio isósceles y trapezio no isósceles. Integrando los esquemas 3, 5 y 7, se obtiene el 8 que satisface las reglas de la clasificación.

El análisis del esquema correspondiente a los trapecios realizado en (muñoz y otros, 1989) no se hace por limitaciones de espacio; así como otras clasificaciones del concepto de trapezio.

Conclusiones

- ◆ La idea de Maraldo presenta varias dificultades respecto a la clasificación de conceptos.
- ◆ Los esquemas que se proponen en el libro de texto actual para séptimo grado en Cuba no satisfacen los requerimientos para ser utilizados en la clasificación de los conceptos que en ellos se exponen.
- ◆ Las reflexiones realizadas en el presente artículo han estado dirigidas hacia el desarrollo de ideas que favorezcan una enseñanza-aprendizaje a favor de la operación clasificación de conceptos. Por eso, el análisis de los trabajos y textos que se utilizaron para reflexionar, se centró en este aspecto y no en otros, en los que pudieran tener utilidad.

Referencias bibliográficas

- Baker, T. J. (1980). What's a trapezoid. Reader reflections, *Mathematics Teacher*. Mayo. Pág. 325.
- Bernklan, D. (1980). Properties of Quadrilaterals, *Mathematics Teacher*. Mayo. Pág.325.
- Davidov, V (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.
- Maraldo, S. (1980). Properties of Quadrilaterals, *Mathematics Teacher*. Enero. Pág. 325.
- Mederos, O. y M. Martínez (1988). Clasificación de las funciones elementales, *Revista Cubana de Educación Superior*, Volumen VIII, Número 3. Págs. 71-81.
- Muñoz, F. y otros (1989). *Matemática séptimo grado*. La Habana, Editorial Pueblo y Educación.
- Seydel, Ken. (1980). Properties of Quadrilaterals, *Mathematics Teacher*. Mayo. Pág. 325.