El concepto de función: su comprensión y análisis

Cecilia Crespo Crespo y Christiane Ponteville
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González".
Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires. Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar chponteville@velocom.com.ar

Resumen

En la comprensión del concepto de función, básico y unificador en la matemática, las definiciones y representaciones constituyen elementos de fundamental importancia. Este trabajo, como continuación de una investigación realizada acerca de las concepciones que poseen los docentes y estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática, presenta una investigación llevada a cabo a través de cuestionarios y guías de trabajos prácticos que se centró en la conceptualización de ideas relacionadas con el concepto de función y su transposición didáctica. Tras analizar los conocimientos previos a cursar la materia Fundamentos de la Matemática, se procedió a realizar un enfoque histórico epistemológico del tema, tendiente a analizar las distintas concepciones que subyacen a la noción matemática de función, así como a la reflexión sobre su relevancia en la didáctica actual. Los resultados obtenidos a partir de las respuestas de los alumnos se complementaron a través del análisis de libros de texto de otras épocas y de la actualidad, y libros de historia y fundamentos de la matemática.

Introducción

Un concepto básico y unificador en la matemática es el de función. Existen incluso propuestas que vertebran cursos a partir de este concepto (NCTM, 1993). Las funciones desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones de la matemática a otras ciencias, y por lo tanto una herramienta poderosa para comprender a la matemática como ciencia aplicada, por medio de la modelización.

El aprendizaje del concepto de función figura como uno de los objetivos fundamentales en la enseñanza del cálculo. Son muchas las investigaciones que se han centrado en la problemática de la comprensión de este concepto desde distintas ópticas.

Por su parte, las representaciones se consideran esenciales para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas y adquieren fundamental importancia en el caso de las funciones (Rico, 2000). La noción general de representación es compleja y se la debe tener en cuenta muy especialmente para acceder al conocimiento de las conceptualizaciones realizadas.

El profesor de matemática, que enseña esta disciplina teniendo en cuenta tanto sus ideas acerca de la matemática como la manera de ser aprendida por sus alumnos, debe tener en claro las ideas relacionadas con la definición de función, sus características y representaciones. Los conceptos matemáticos que tiene un docente se vinculan directamente con los fundamentos de esta ciencia (Santos Trigo, 1993).

En este trabajo se presenta la continuación de una investigación realizada acerca de las concepciones que poseen los docentes y estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática (Crespo Crespo y Ponteville, 2001, 2002). La investigación fue realizada a través de cuestionarios y guías de trabajos prácticos y se centró en la conceptualización de ideas relacionadas con el concepto de función y su transposición didáctica. Tras analizar los conocimientos previos a cursar la materia Fundamentos de la Matemática, se procedió a realizar un enfoque histórico epistemológico del tema, tendiente a analizar las distintas concepciones que subyacen a la noción matemática de función, así como a la reflexión sobre su relevancia en la didáctica actual. Las fuentes utilizadas en esta etapa fueron principalmente libros de texto de otras épocas y de la actualidad, y libros de historia y fundamentos de la matemática.

Descripción de la experiencia realizada

En la primera etapa de nuestra investigación, relacionada con el concepto de función, se presentó a los alumnos del último año de la carrera de Profesorado de Matemática, un cuestionario en el que se les pidió que definieran función; a continuación, que la definieran sin utilizar elementos de teoría de conjuntos y finalmente la lectura e interpretación de un texto referido a las distintas representaciones que de una función pueden realizarse.

Sobre la base de las respuestas obtenidas, se abordaron en clase diversas caracterizaciones y definiciones de función presentes en textos de perfil histórico y la presentación de ejemplos particulares de funciones que permiten obtener sus características, más allá de las definiciones dadas por los alumnos en un principio.

La segunda parte de la investigación se orientó a conocer hasta qué punto unen los futuros docentes el concepto de función al de sus representaciones y la traducción entre ellas como herramienta para lograr en sus alumnos la interiorización del concepto de función.

Las respuestas obtenidas fueron posteriormente abordadas en la clase de Fundamentos de la Matemática para clarificar a través de ejemplos y de definiciones, las relaciones existentes entre las funciones y sus representaciones.

La definición de función

Las definiciones actuales de función que se manejan usualmente tanto en libros como en clases de análisis y cálculo, ponen una fuerte carga en el formalismo. Este hecho se pone de manifiesto en las respuestas que dan los alumnos.

La definición de función, en general se reduce en estas definiciones a un caso particular de relaciones, teniendo en cuenta en su formulación, el lenguaje de la teoría de conjuntos. A los alumnos les resulta muy difícil separar el concepto de función de la formulación formal de su definición.

La mayoría de las respuestas obtenidas en nuestra investigación se refieren a funciones numéricas, más particularmente a funciones de valores reales a valores reales.

Usualmente en los libros de texto se encuentran definiciones de función numérica como la siguiente:

> *Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A, exactamente un elemento, llamado f(x) de un conjunto B.*
> (James Stewart (1994). *Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.)

Esta definición lleva implícito el conocimiento del concepto de relación y de conjunto y subconjunto de números reales.

> *Si a cada uno de los valores que puede tomar una magnitud variable x perteneciente a un determinado conjunto E, corresponde un valor único, finito y determinado de la magnitud y. Esta magnitud y recibe el nombre de función (uniforme) de x, o de variable dependiente determinada en el conjunto E; x se llama argumento o variable independiente.*
>
> (Demidovich, B. (1973). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. URSS: Editorial Mir. pp. 7).

Es notorio que aún en las definiciones que los libros llaman intuitivas, se hace uso de conceptos de la teoría de conjuntos, aunque no se las escriba formalmente:

Aproximación intuitiva

La idea fundamental en el concepto de función es que cada elemento del dominio tiene una y solo una imagen en el recorrido.

Definición

Una relación f entre elementos de un conjunto A y elementos de un conjunto B es una función de A en B si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\forall x \in A \quad \exists y \in B \ / \ (x;y) \in f$

2. $(x;y) \in f \wedge (x;z) \in f \Rightarrow y=z$

Dominio de f: $D_f = A$

Recorrido de f: $R_f = \{y \ / \ y \in B \wedge \exists x \in A \ / \ (x;y) \in f\}$

> (Rabuffetti, Hebe (1972). *Introducción al análisis matemático. Cálculo I.* Buenos Aires: El Ateneo. pp. 43, 45).

Estas definiciones pueden dejar la visión de que la teoría de conjuntos es necesaria para definir el concepto de función. Esta visión, sin lugar a dudas se puso de manifiesto en la investigación realizada a través de las respuestas obtenidas de los futuros docentes. Sin embargo la noción de función fue utilizada y conceptualizada históricamente antes de la teoría de conjuntos. De ahí la pregunta que planteamos a nuestros alumnos con respecto a intentar definir función sin utilizar conceptos de teoría de conjuntos.

Históricamente, el concepto de función nació ligado a la idea de dependencia de cantidades variables en unión con el estudio del movimiento en época de Galileo Galilei y con la caracterización dada por Nicolás de Oresme: *"Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo* *podemos imaginar como una cantidad continua representada, por un segmento".* Esta concepción de carácter físico y geométrico antecedió a la noción cartesiana de dependencia numérica.

En el siglo XVII se hizo más común el uso de expresiones explícitas de funciones con el desarrollo del cálculo infinitesimal. Fue Leibniz en 1673 el primero en emplear el término "función" en el sentido actual. Su discípulo Jean Bernoulli escribió: *"Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes*" La expresión "de alguna manera" significa que es expresable con operaciones matemáticas.

A Leonhard Euler se debe, además del uso de letras de función como f(x) para expresar el valor que la función f asocia a la variable x, la siguiente definición: *"Una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes".* Sin embargo esta definición de Euler es limitada, exige que la definición sea explícita.

Joseph Fourier en 1822 escribió: "Una función general f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitrario". Esta definición contempla singularidades, pero considera que el dominio es numerable ya que se trata de una sucesión.

En 1834, Nicolai Lovachevski exponía: *"La concepción general requiere que una función de x sea definida como un número dado para cada x, variando gradualmente con x. El valor de la función puede ser dado bien por una expresión analítica o por una condición que aporta un modo de examinar todos los números y elegir uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir y resultar desconocida".*

Según palabras de Peter Dirichlet de 1837: *"Dos variables x e y están asociadas de tal forma que al asignar un valor a x entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a y, se dice que 'y' es una función (unívoca) de x".*

Cien años más tarde, los Bourbaki formalizan el concepto de función definiéndola como una relación entre dos conjuntos.

En los libros de texto de principios de siglo XX, es posible encontrar definiciones de función que siendo correctas y equivalentes a la definición que encontramos en los textos actuales, no hacen uso de formalismos propios de la teoría de conjuntos.

Tanto la evolución histórica de la definición de función, como el análisis de las definiciones existentes en los libros de texto recién mencionados, otorgaron a los futuros docentes una visión del concepto de función que trasciende al formalismo que la expresa.

Funciones: distintas representaciones

La diferenciación entre un objeto matemático y sus representaciones es de gran importancia en la comprensión de un concepto. Existen distintas representaciones de un objeto, cada una de ellas es como una huella de ese objeto (Rico, 2000). La comprensión de un concepto permite manipular y procesar distintas representaciones de manera que los distintos modos de manipulación expresen, a su vez, diversas propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos e ideas representados.

En la educación elemental y media, se suele hacer hincapié en la importancia que tiene la expresión de funciones a través de distintos tipos de representación y la traducción entre las mismas. Podemos leer (Esteban, 1993): *"la adquisición del concepto de función se conseguiría tras dominar las transferencias que pueden realizarse entre las distintas expresiones o representaciones que de una función podemos efectuar"*. A continuación este autor presenta un tetraedro en cuyos vértices figuran: expresión algebraica, numérica, verbal y gráfica y cuyas aristas son flechas dobles entre los vértices.

Este texto fue presentado a nuestros alumnos, pidiéndoseles que lo comentaran. En su totalidad, adhirieron a la afirmación y justificaron comentando la importancia de representar las funciones a través de todas estas expresiones y de realizar la correcta traducción entre las mismas, y afirmando que el concepto de función es totalmente comprendido por los alumnos de educación media cuando éstos pueden construir para cada función el tetraedro correspondiente y realizar el pasaje por sus aristas, pasando de cada forma de representación a cualquiera de las otras. No obstante, reconocen que el riesgo que se corre a partir de las representaciones gráficas es hacer generalizaciones sobre la base de la apariencia gráfica, lo cual puede conducir a ideas equivocadas desde el punto de vista analítico.

El tema fue retomado por las autoras de esta investigación en clase de Fundamentos de la Matemática para analizar funciones de las que no se puede realizar representación gráfica, otras sin expresión algebraica e incluso funciones de las que no se puede determinar el dominio explícitamente.

Algunos de los ejemplos presentados en el aula con este fin fueron los siguientes:

La función de Dirichlet, definida en el intervalo [0, 1] asigna 1 a cada racional y 0 a dada irracional.

a. *Analícela desde el punto de vista clásico.*

b. *¿De qué maneras puede representarse la función?*

c. *Analice su continuidad.*

Sea f una función que a cada número real le hace corresponder la cantidad de cifras 3 que aparecen en la parte no entera de su representación en base 10.

a. *Analícela desde el punto de vista clásico.*

b. *¿Cuánto vale la función en: 4, 1/4, 1/3,* $\sqrt{2}\pi$*,?*

c. *¿Qué puede decir del dominio de esta función?*

A partir de la presentación de estas funciones y de las preguntas planteadas al respecto, fue posible extraer conclusiones interesantes que apuntaron a una mejor conceptualización del concepto de función.

La toma de conciencia de la existencia de funciones de las que no se puede realizar representaciones gráficas, de funciones cuyo dominio no es posible determinar y de funciones que no se puede saber si están o no definidas en un valor determinado, hicieron que los alumnos replantearan sus concepciones acerca de las distintas representaciones de las funciones y su importancia en la enseñanza. La relación existente entre las diferentes representaciones que pueden hacerse de una función permite la adquisición del concepto pero no siempre es posible en una función disponer de todas ellas.

Se trabajaron también a partir de estas ideas, cuáles son la habilidades que deben promoverse en los alumnos en relación con el concepto de función. Algunas de las ideas que surgieron son:

- Identificar relaciones funcionales del mundo real utilizando funciones
- Modelizar fenómenos y situaciones diversas por medio de funciones
- Operar con representaciones particulares de funciones (fórmulas, tablas, gráficos, diagramas, etc.)
- Realizar transferencias de una forma de representación a otra, siempre que sea posible
- Interpretar informaciones a partir de ciertas representaciones de las funciones
- Internalizar el concepto de función, extrapolando de las distintas representaciones
- Comprender la relación entre funciones y ecuaciones
- Describir propiedades locales y globales de las funciones (crecimiento, continuidad, continuidad, etc.)
- Comprender las funciones como objetos matemáticos
- Predecir el comportamiento de un función, según los datos suministrados

De esta manera el concepto de función constituye una idea que debe ir adquiriéndose a lo largo de toda la escolaridad, teniendo en cuenta los conocimientos de los que disponen los alumnos.

Conclusiones

La investigación realizada pone en evidencia el alto nivel de complejidad existente en el concepto de función y cómo ésta a veces permanece de manera inconsciente en los docentes, incluso cuando éstos reflexionan acerca de su enseñanza.
El abordaje histórico permitió la comprensión de este concepto, complementado por el análisis de diversos libros de texto en los que se enfoca la definición y el abordaje de las funciones desde distintos ángulos y con distintos lenguajes.
Algunas de las causas de las dificultades de la comprensión del concepto de función, se originan en las diversas concepciones y representaciones, en la sobrevaloración del formalismo en la enseñanza y en la presentación que realizan los libros de texto. Por otra parte, demasiado énfasis en la operatoria y algoritmización y el desconocimiento de la visión histórica de la evolución del concepto, promueven la confusión entre el concepto de función y sus representaciones.
En este trabajo se arribó a la conclusión de que si bien es importante para el desarrollo del pensamiento matemático, aprender a realizar traducciones de unas representaciones a otras, aprovechando que las funciones admiten varios registros de representación, es necesario tener conciencia de que no todas las funciones pueden expresarse a través de todos los tipos de registros. En la comprensión de este concepto intervienen las representaciones y es importante que el docente oriente a los estudiantes a reconocer cuáles son las representaciones

acordes con la función planteada, cuándo puede una función expresarse a través de registros verbales, analíticos, tabulares, gráficas, etc.

Referencias bibliográficas

Crespo , C y Ponteville, Ch. (2002). Pensar la matemática para enseñar la matemática. En C. Crespo Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15. (pp. 1163-1168). México: Iberoamérica.

Crespo , C y Ponteville, Ch. (2001). La influencia de las concepciones de los docentes y los estudiantes acerca de la matemática en la enseñanza de esta ciencia. *Presentado en la XXIV Reunión de Educación Matemática*. Unión Matemática Argentina. San Luis.

Durán, A. J. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* Madrid: Alianza Universidad.

Esteban, F. (1993). *Organización de la información. La representación-expresión.* Sigma 15, (pp. 41-45).

Gatica, N. et al. (2002). El concepto de función en los libros de textos universitarios. En C. Crespo Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15. (pp. 131-136). México: Iberoamérica.

NCTM (1993). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Sevilla: SAEM *Thales*.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática.* http://www.ugr.es/local/seiem/1V_Simposio.htm

Santos T, L. M. (1993). La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. En *Mathesis* Vol IX n°4. (pp. 419-432) México: Universidad Autónoma de México.