# El problema de la función inversa a la luz del teorema del tubo fluorescente

*Norberto Rossi y Gloria Suhit*
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Bahía Blanca. Argentina
gsuhit@criba.edu.ar

## Resumen

Con el objeto no de introducir al estudiante universitario a la noción de función inversa sino de reorganizar ideas, darle significado a unas y resignificar otras (es decir, ayudarlo a *aprehender* el concepto) se elaboró un razonamiento, basado en ideas previas del alumno, que concluye en el Teorema del Tubo Fluorescente. Este Teorema permite, a partir del gráfico de una función biyectiva, obtener el de su inversa de un modo más sencillo y seguro que el de los textos tradicionales y, simultáneamente, aporta un claro mensaje conceptual.

El cambio en la percepción del tema (en el 75 a 80% de los estudiantes) y la seducción de la inversa "instantánea" son superados por la idea (desde ahora evidente) que una función y su inversa son expresiones de una misma relación observada desde distintos puntos de vista.

## Introducción

De las muchas dificultades observadas en alumnos del primer año de Universidad, con respecto a la noción de inversa de una función biyectiva uniforme, surgió la inquietud de encontrar una forma de sintetizar el tema, con un lenguaje simple, en una propuesta que resultara atractiva para el estudiante y, al mismo tiempo, le aportara un sólido contenido conceptual.

Esta idea nació en el aula, del trabajo con los alumnos, y se fue depurando a lo largo de varios cuatrimestres hasta adquirir la forma definitiva que aquí se presenta.

El objeto *no es introducir* el tema al estudiante sino reorganizar sus ideas previas, dándole significado a algunas de ellas y resignificando otras; es decir, ayudarlo a *aprehender* el concepto.

## Desarrollo

Frecuentemente los estudiantes saben que si una función $y = f(x)$ (de aquí en adelante cuando mencionemos una función estaremos haciendo referencia a una función uniforme y biyectiva) vincula los valores $x$ del dominio con los correspondientes $y$ de su imagen, la función inversa $(f^{-1}(x))$relaciona estos valores $y$ con los originales valores $x$; también saben que los gráficos de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el plano cartesiano son simétricos con respecto a la recta de ecuación $y = x$. Esta es la presentación clásica en los libros de texto ((Anton, 1977; Larson, 1989; Stewart, 1998)). Sin embargo si se les pide a esos estudiantes que grafiquen $f^{-1}(x)$, dado el gráfico de $f(x)$, se obtienen resultados muy variados: el concepto "simétrico con respecto a la recta de ecuación $y = x$" no resulta tan obvio ni tan simple de usar, además el vínculo entre la función y su inversa no parece ayudar mucho.

Más adelante los problemas reaparecen: ¿por qué un estudiante que conoce el gráfico de la función $y = tg(x)$ no es capaz de inferir el valor de $\lim_{x \to +\infty} arctg\,(x)$ ? El comportamiento tendencial de la función no le dice nada sobre el de su inversa. Solo si "recuerda" el gráfico de $y = arctg\,(x)$ llegará a la respuesta correcta.

Nuestra estrategia para solucionar estos inconvenientes consta de varios pasos:

1. ¿Qué es el gráfico de una función?

El gráfico de una función es un conjunto de puntos en el plano cartesiano. Cada punto vincula un valor del eje $x$ con otro del eje $y$. El conjunto de todos los puntos del gráfico da la relación de todos los valores $x$ del dominio de $f(x)$ con sus correspondientes valores $y$ de la imagen.

2. ¿Qué punto del plano cartesiano permitirá relacionar un valor del eje $y$ con su correspondiente valor sobre el eje $x$?

Sin mucho trabajo los alumnos llegan a la conclusión que el punto que relaciona un valor $y$ con el valor $x$ asociado es el mismo que usamos para vincular $x$ con $y$ en el gráfico de $f(x)$ . La extensión del razonamiento anterior.a todos los valores de $y$ lleva a la siguiente conclusión: Si cada punto que vinculaba un $x$ con un $y$ (gráfico de $f(x)$) es el mismo que vincula cada $y$ con su correspondiente $x$ (gráfico de $f^{-1}(x)$), entonces ¡el mismo gráfico corresponde a y!

3. Contradicción:

Se sabía que los gráficos de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ deben ser simétricos con respecto a la recta de ecuación $y = x$ , pero ahora decimos que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ tienen el mismo gráfico. ¿Dónde está el error?

4. La contradicción es solo aparente.

Es correcto pensar al gráfico de $f(x)$ (figura 1) como el gráfico de $f^{-1}(x)$, pero cuidando el detalle que ahora el dominio de la función aparece sobre el eje vertical (eje $y$) y la imagen en el eje horizontal (eje $x$); por lo tanto, no es nuestra forma habitual de "ver" una relación funcional. Deberíamos tratar de mirar el gráfico con el dominio (valores de $y$) sobre un eje horizontal y la imagen (valores de $x$) sobre uno vertical. Esto se puede lograr rotando el plano cartesiano original noventa grados en sentido antihorario (figura 2). Ahora la imagen se representa correctamente (vertical y con la numeración creciente hacia arriba); el dominio está en el eje horizontal, pero la numeración crece hacia la izquierda y no hacia la derecha como clásicamente la ubicamos. Este problema se soluciona si rotamos la hoja del gráfico para mirarla a trasluz, conservando el eje $x$ vertical y el eje $y$ horizontal, pero ahora creciente hacia la derecha (figura 3). Recién ahora estamos viendo el gráfico de $f^{-1}(x)$ del modo habitual, llegando a comprobar (cambiando de nombre a los ejes: la $x$ por $y$ en el vertical y la $y$ por $x$ en el horizontal) que resulta simétrico con respecto a la recta de ecuación $y = x$ con el gráfico de $f(x)$, cuando ambos se representan en un mismo plano cartesiano.

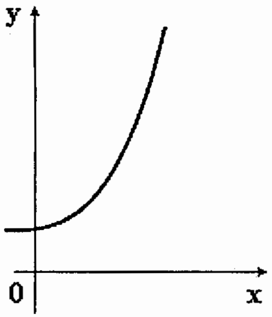


**Figura 1**

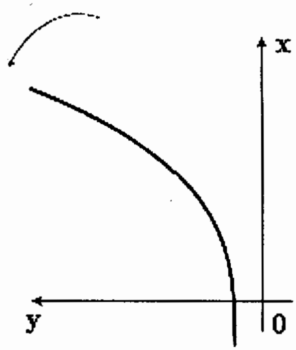


**Figura 2**

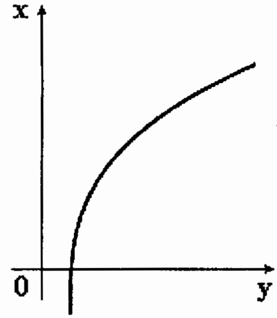


**Figura 3**

5. El Teorema del Tubo Fluorescente.

*Dado el gráfico de una función $y = f(x)$ sobre una hoja de papel, el gráfico de la función inversa es el mismo de $f(x)$, pero visto a trasluz con el eje x en posición vertical (creciente hacia arriba) y el eje y en posición horizontal (creciente hacia la derecha).*

Aclaración: En nuestra Universidad la iluminación artificial es de tubos fluorescentes.

Observación: Existe una *única* forma de mirar el gráfico original a trasluz conservando un eje creciente hacia arriba y el otro creciente hacia la derecha (la detallada en el teorema).

6. Conexiones.

El gráfico de una función biyectiva $f(x)$ y el de su inversa $f^{-1}(x)$ coinciden, pero este último debe ser visto moviendo el eje $y$ a la ubicación del eje $x$ y, del mismo modo, el eje $x$ a la posición original del eje $y$. Esto equivale a rotar todo el plano cartesiano sobre la recta de ecuación $y = x$, produciendo un gráfico para $f^{-1}(x)$ simétrico con el de $f(x)$ con respecto a dicha recta. El resultado final de esta rotación es lo que se observa mirando el gráfico original a trasluz como se explicó anteriormente.

## Discusión de resultados

Esta experiencia casi siempre se ha llevado a cabo con grupos pequeños de alumnos (no más de 8 o 10) trabajando con lápiz y papel. En pocas ocasiones se realizó con tiza y pizarrón para grupos más numerosos (25 a 30 alumnos). Las diferencias observadas fueron grandes: el impacto producido al girar una hoja y, a partir del gráfico de una función, hacer "aparecer" el de su inversa fue imposible de reproducir en el pizarrón (aunque los alumnos realizaran sus propios gráficos con lápiz y papel).

También se presentan diferencias (como cabía esperar) en función de la carrera que cursa el estudiante: mayor comprensión y aceptación en los de ingeniería y algo menor en los de carreras menos afines con las herramientas y razonamientos matemáticos.

Aún considerando estas diferencias, la mayoría de los estudiantes participantes en esta experiencia (75 a 80%) cambia significativamente su percepción del tema, algunos muy rápidamente y otros luego de un tiempo de elaboración.

Lo que resulta evidente en todos (jóvenes de una época vertiginosa) es la seducción que ejerce la inversa "instantánea", sin esfuerzos, "con solo pulsar una tecla" (mejor todavía, en este caso, sin pulsar ninguna). Pero lo esencial de la propuesta va mucho más allá: la idea que una función y su inversa son expresiones de una relación observada desde distintos puntos de vista trasciende a la simplicidad de la "técnica operativa". Y si alguien olvida cuál es ese nuevo punto de vista y omite el trabajo de repetir el razonamiento paso a paso, el nombre de "Teorema del Tubo Fluorescente" se lo recuerda.

Su utilidad continúa; enunciados como, por ejemplo:

*"la inversa de una función continua es continua"*

*"la inversa de una función estrictamente monótona (creciente o decreciente) es una función estrictamente monótona (creciente o decreciente)"*

adquieren el carácter de obvios, más allá del valor de las demostraciones formales.

## Conclusiones

El hecho que un argumento tridimensional (girar una hoja para mirar un gráfico a trasluz) complemente o sustituya favorablemente a un argumento bidimensional (simetría con respecto a la recta de ecuación ) para comprender un problema eminentemente bidimensional (la relación entre $y = f(x)$ y su inversa) resulta, en principio, llamativo. Una explicación (extraída de nuestra propia experiencia) es que realizar gráficos en el plano, simétricos con respecto a ejes no horizontales o verticales, es una tarea que requiere cierta "habilidad geométrica" que los estudiantes no han desarrollado en las etapas previas de su formación; en cambio girar el plano cartesiano tridimensionalmente no aparece como un obstáculo porque "pensar en tres dimensiones" es natural para la mente humana. Esto consolida el beneficio conceptual: el mismo gráfico = la misma relación entre las variables $x$ e $y$, solo cambia el punto de vista.

Con estas certezas y el aporte de ideas superadoras (Cordero, 2001), pero con claras coincidencias en la estrategia de razonamiento, una evolución de esta experiencia será el diseño de una situación didáctica que permita al estudiante (por sí mismo) asignar significados y descubrir relaciones para construir su propio conocimiento de la función inversa.

## Referencias bibliográficas

Anton, H. (1977). *Cálculo y Geometría Analítica*. México: Limusa.

Cordero, F (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa IV* (2), 103-128.

Larson, R. y Hostetler, R. (1989). *Cálculo y Geometría Analítica*. España: McGraw-Hill / Interamericana.

Stewart, J. (1998). *Cálculo*. México: International Thomson Editores.