La importancia de las representaciones semióticas de funciones reales en la resolución de problemas de cálculo integral

Laura García Quiroga *Rosa Vázquez Cedeño*
Universidad Autónoma de Nuevo León, México; Universidad de Camagüey, Cuba
site@prodigy.net.mx rosaaliciav@yahoo.com.mx

Resumen

En este trabajo se describen las dificultades que tienen los estudiantes de ingeniería en FIME-UANL, al representar una Función Real en diferentes sistemas semióticos en la resolución de problemas, lo cual influye decisivamente en temas posteriores como es el de Cálculo Integral.

La constatación se realiza mediante la aplicación de un test científico que evidencia el cambio de registros como la dificultad fundamental. La fundamentación teórica del trabajo se basa en la noción semiótica de registros llevado al plano matemático. Se hace una propuesta en la enseñanza de la matemática para aportar al aprendizaje del tema de funciones, que toma como fundamental la introducción de tareas y acciones relacionadas con el tránsito entre representaciones semióticas y así contribuir a la posibilidad de resolver problemas en el Cálculo Integral.

Introducción

El Cálculo Integral es parte esencial de las herramientas matemáticas, necesarias en el estudio para desarrollar las bases de la ingeniería así como está presente en la Física, Química, etc. Y en general en la propia Matemática. Es por esto que en la FIME de la UANL se desarrollan estos contenidos, del Cálculo Integral, con una dosis fuerte de abstracción y generalización en sus programas. Constituyendo esto, una de las barreras fundamentales que en el ámbito del aprendizaje es determinante en los alumnos, constatándose que en general no se llega a adquirir, en una buena parte de los mismos, el nivel de desarrollo necesario para lograr un cumplimiento exitoso en la resolución de problemas relacionados en el tema objeto de análisis.

En tales circunstancias el problema objeto de investigación en el presente artículo son: las deficiencias que presentan nuestros estudiantes para la resolución de problemas dentro del área del Cálculo Integral. Indagando dentro de los conceptos matemáticos fundamentales del tema, aquellos para los cuales la barrera cognoscitiva de los estudiantes es mayor para su asimilación.

Fundamentos de análisis

Un estudio preliminar de los conceptos básicos del Cálculo Integral nos lleva a encontrar causalidad para la correcta asimilación del tema integrales a lo concerniente al concepto de función.

Es este concepto, tanto para este tema como en otros relativos a las matemáticas, un fundamento que a este nivel requiere del desarrollo mental del alumno sobre la base de la abstracción y generalización de manera consecuente, de forma que pueda aplicar el mismo en situaciones concretas, así como su representación a través de diferentes elementos del lenguaje: algebraico, numérico y gráfico como fundamentales. Esta multiplicidad de representación introduce en el proceso deficiencias en el aprendizaje de los alumnos y que necesitan de tratamiento para que sean superadas.

La necesidad del concepto de función, al igual que otros conceptos matemáticos es el emplear distintas representaciones para la apropiación del mismo en toda su complejidad. Lo que corroboran algunos investigadores como: C. Javier, J. Kaput, G. Golding, E. Castro, I. Romero, F. Ruiz, que son citados por R. Luis (2000); y en lo que el propio autor apoya citando a R. Duval. "sostiene la necesidad de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático y establece que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados físicos..."

Lo que contribuye a la integración de los entes matemáticos como aspectos representativos de relaciones dadas en la realidad social.

Añadiéndose en dichas representaciones de las relaciones involucradas, el incremento de los niveles de generalización y abstracción para comprenderlas e interpretarlas.

Se pone de manifiesto, desde el punto de vista teórico la importancia de la formación en los alumnos de las habilidades necesarias para la representación en los distintos sistemas semióticos de los entes matemáticos.

Estas representaciones se caracterizan según sus registros. La noción de registro es una noción semiótica. Un registro está constituido por signos, en el más amplio sentido de la palabra: trazo, símbolo, icono, figura, etc. Estos signos están asociados, de manera interna, según los lazos de pertenencia a una misma red semántica y, de manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones, estas reglas son propias de la red semántica considerada.

La autora Ismenia G. (1992) se apoya citando a I. Guzmán quien opina que un registro se caracteriza por un sistema semiótico, es decir, por sus signos propios y la manera en que estos se organizan. De modo que podemos entender un registro como un medio de expresión o de representación. Un registro tiene la posibilidad de expresar o de representar un objeto, idea o concepto no necesariamente del ámbito matemático.

Tomando en consideración el registro algebraico, constituido por el sistema semiótico del álgebra relativo a las funciones reales y el registro gráfico está constituido por el sistema semiótico asociado al plano, provisto de un sistema de referencia rectangular.

En la práctica diaria se observa que el alumno utiliza el registro algebraico con muy pocas conexiones con los otros; el gráfico y las tablas de valores se utilizan como soporte, pero no se explota lo que cada uno puede aportar en representaciones concretas del concepto en cuestión.

Se pone de manifiesto, desde el punto de vista teórico, la importancia de la formación de los alumnos de las habilidades necesarias para la representación en los distintos sistemas semióticos, de los entes matemáticos.

La necesidad de constatar en los estudiantes de FIME-UANL, en los dos primeros años de ingeniería, las deficiencias en la correspondencia semiótica entre los registros algebraicos y gráficos, dio origen a la aplicación de un test científico relacionado con los contenidos fundamentales que se asocian al concepto de función.

En el mismo, se consideran dos tipos de tareas, las internas de cada registro y las de pasajes entre ellos. Duval, por su parte citado por Ismenia G. (1992) menciona que el pasaje entre registros se refiere a la confrontación de dos representaciones de un mismo objeto, a la conversión congruente entre registros de representación.

El test científico diseñado por la necesidad de constatar las dificultades al concepto de función, enfrenta tareas internas al registro algebraico, numérico y al gráfico; referidas a pasajes entre los registros, del algebraico al gráfico y viceversa, donde se tiene un análisis de cada pregunta. Éste fue aplicado a una muestra de 433 alumnos de los cuales acreditaron, calificados sobre 70, una cantidad de sólo 69, habiendo realizado un análisis de cada respuesta.

Análisis de Resultados

El análisis del test deja en evidencia que el cambio de registros es la gran dificultad que encuentran los alumnos, sobre todo cuando el pasaje es del registro gráfico al algebraico. Esta misma dificultad se encontró en Francia, en torno a funciones al respecto de pasajes entre registros, con estudiantes entre edades de 14 y 16 años. (Ismenia Guzmán, 1992.)

El que la dificultad se encuentre en alumnos de distinta madurez establece que el carácter de esta dificultad no es de orden conceptual, sino de orden conductual, está relacionada con una falta de sensibilización o de experiencia de los alumnos con problemas que involucran estos cambios de registro de expresión.

El excesivo privilegio del registro algebraico, hecho innegable en todos los diseños de aprendizaje actualmente en práctica, y la ausencia de otros registros en la práctica es perjuicio para los alumnos, ya que no tienen la posibilidad de sensibilizarse con problemas que exigen articular dichos registros.

Las respuestas que han dado los alumnos dejan establecido que la articulación es un objetivo que no se está tomado en cuenta por los actuales diseños de instrucción. El registro gráfico es utilizado, en general, con carácter ilustrativo o de soporte.

El hecho sorprendente de que los alumnos universitarios fracasen en sus repuestas por no poder interpretar datos en un gráfico muestra dos aspectos del comportamiento de los alumnos:

- La falta de práctica o la no-manipulación en el trabajo con gráficos.
- Incapacidad para enfrentar situaciones no habituales.

Nos damos cuenta que los alumnos resuelven problemas de una complejidad cognoscitiva superior cuando han sido preparados y sin embargo, frente a situaciones no habituales sencillas, no reaccionan con el éxito esperado.

Uno de los obstáculos en la posibilidad de resolver problemas de Cálculo Integral es la falta de una conversión congruente entre registros de representación del concepto de función. Se piensa que esto es frecuente debido a que el aprendizaje de este concepto ha seguido una didáctica tradicional.

Propuesta metodológica

La tendencia más general que se difunde es la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más que la transferencia de contenidos. La matemática es una ciencia en la que para algunos el método predomina sobre el contenido, es saber hacer. Se concede gran importancia en el estudio de la psicología cognitiva lo referido a los procesos mentales de resolución de problemas.

La adquisición de un concepto matemático radica en la actividad que se puede realizar en las diferentes representaciones; implica actividad en un registro (tratamiento metodológico), posteriormente realizar una coordinación entre los diferentes registros (pasaje o conversión), enfrentar la no congruencia entre registros encaminado a construir la estructura cognitiva, hasta lograr reconocer el objeto matemático en sus diferentes representaciones. Por ejemplo, es inconveniente acceder al concepto de función sólo por medio de una definición, es necesario tener actividad con las diferentes representaciones; el algebraico, tablas, gráficos y el lenguaje natural; tal actividad indica creación, tratamiento, y pasaje o conversión entre registros de representación.

El método más utilizado para promover el aprendizaje activo es la enseñanza a través de la resolución de problemas, aplicando en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento en la misma, tratando de que el alumno manipule los objetos matemáticos; active su capacidad mental; ejercite su creatividad y su autonomía.

Cuando en un tema matemático se hace la aplicación de la resolución de problemas podría surgir mediante una propuesta de la situación problémica de la que surge el tema (aplicaciones, modelos, histórico, etc..), promoviendo el trabajo independiente de los estudiantes, familiarizar al estudiante con la situación y sus dificultades, elaborar estrategias posibles, ensayos diversos por los estudiantes, uso de herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados), elección de estrategias, ataque y resolución del problema, reflexión del problema, formalizar según sea, generalizar, nuevos problemas (contra ejemplos), sistematizar, etc..

Se recomienda un tratamiento metodológico para tratar el tema de Funciones, donde sean planeados los tipos de problemas; las actividades a las cuales queremos enfrentar al estudiante sin que falten aquellas donde se promueve el trabajo independiente del estudiante; el uso de la conversación heurística con el estudiante; el material didáctico a utilizar para facilitar y optimizar exposición así como integrador del conocimiento.

Propuesta 1.- Un objeto se lanza desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial vo= 29.4 m/seg. Expresar la función velocidad con respecto al tiempo e interpretarla, esbozar la altura como función con respecto al tiempo y deducir la misma.

Una forma en la que el maestro inicie la conversación con el alumno podría ser la siguiente:

¿Qué tipo de movimiento se tiene?... ¿cuál es la función velocidad?, esperando una respuesta como ***rectilíneo uniformemente acelerado..., v(t) = vo – gt,*** *en situación contraria inducirlo, no dándoles la respuesta, de manera que lleguen a ella.*

¿Al sustituir la velocidad al cabo de cero segundos, cómo quedaría la función velocidad?..., *se espera que de alguna manera se mencione* ***v(t) = 29.4 – 9.8t.***

Se trata de que el estudiante analice las características de la función y su relación con la gráfica (confrontación del registro algebraico al gráfico) por lo que una forma de introducir podría ser

¿Qué tipo de función tenemos?..., ¿de qué grado?..., ¿cómo la representarían gráficamente?, *se espera una respuesta como* ***es de primer grado...., una línea recta,*** *en situación contraria, se insiste en no dar la respuesta sino inducir a ella.*

Con solo dos puntos de una recta podemos trazarla, ya se sabe que la v(0) es igual a...?*(esperar a que el estudiante conteste)* ***y que el tiempo en la velocidad de cero m/seg. es?*** *, las respuestas que se esperan son* ***v(0) = 29.4 m/seg. ......,*** *esperándose la realización del cálculo en forma independiente del tiempo* ***29.4 – 9.8t = 0, t = 3 seg.***

Lo que significa que tendremos los puntos A =(0,29.4) y B = (3,0) para realizar el trazo de la gráfica, quedando de la siguiente manera mostrada en la figura 1:

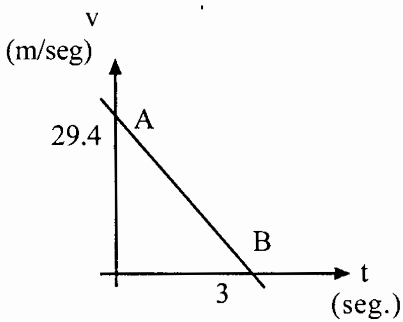

Figura 1

¿Cómo es la velocidad entre 0 y 3 seg. positiva o negativa?, se espera que se diga **positiva**
.

¿Qué significa para la altura la disminución de la velocidad?, quizás digan **al detenerse el objeto se alcanza la altura máxima.**

¿Cómo representan la altura como función?, pueden decir diversas maneras y adecuamos a **h(t).**

¿Qué representa para la h(t) estar en el punto A y en el punto B de la figura 1?, se esperan diversos comentarios entre los cuales, **en el punto de partida se tiene una h(0) = 0 y al cabo de 3 seg. alcanza su altura máxima.**

¿Lo que significa que la altura crece?, se espera **"si"**

¿Cómo es la velocidad de 3 seg. en adelante?, se espera **negativa**

¿Qué características tiene la h(t) de 3 seg. en adelante?, sus comentarios pueden ser, **la altura disminuye después de los 3 seg. hasta llegar al suelo a una altura de cero.**

¿Lo que significaría que la altura decrece?, esperando un "**si**", si esto último no resulta inducir a que el estudiante lo haga.

¿Cómo esbozarían el recorrido del objeto?, se espera que ellos dibujen algo parecido a lo que se muestra en la figura 2.

Pudiendo esbozar también h(t) de la manera que se muestra en la figura 2:

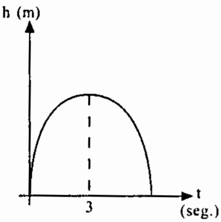

Figura 2

Se hace el inicio de una confrontación gráfica a la algebraica, la cual podría ser:

¿Con qué tipo de expresión algebraica podemos relacionar la parábola?, esperando escuchar **con la expresión cuadrática,** situación contraria inducir.

¿Cuál es su forma general?, esperando **$y = ax^2 + bx + c$**, si no, inducir.

Relacionando con las variables físicas?, podría decirse **$h(t) = vot - (½)gt^2$**, caso contrario inducir.

¿Cómo la expresaríamos para nuestro caso particular?, se espera **$h(t) = 29.4t - (½)(9.8)t^2$**

Podría calcularse la altura máxima o cualquier otra durante el recorrido. . .

<u>**Propuesta 2.-**</u> Al tratar funciones sencillas racionales e irracionales por ejemplo:

$$y=\frac{1}{x};y=\frac{3}{x-2};y=\sqrt{x}$$

Es conveniente establecer una conversación heurística con el estudiante, cuestionarlo al respecto de los valores que puede tomar la variable **x** (dominio), en estos casos hay que llevar el cuestionamiento que para el dominio, el campo de número reales se restringe. Además de hacer una serie de cuestionamientos para que a partir del dominio se obtenga el recorrido de la función (imagen) de hablar y cuestionar al alumno de la función para articular el registro algebraico – gráfico, después de graficar como de muestra en las figuras 3, 4 y 5 respectivamente, por medio de esta conversación llevar al estudiante a establecer una conexión entre el registro gráfico – algebraico.

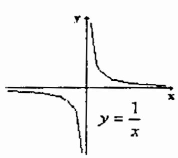

figura 3

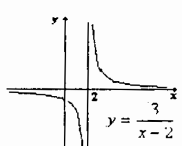

figura 4

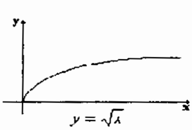

figura 5

Con este método de enseñanza podemos hacer aportaciones importantes al tema de Función así como a las matemáticas en general, de este modo se tendrá en el Cálculo Integral aumentar la posibilidad de resolver problemas.

Conclusiones

Se ha mostrado la necesidad de que los maestros que enseñan Funciones hagan una confrontación de los registros de representación algebraico, gráfico, numérico, mediante un tratamiento metodológico.

Se propone enseñar a través de la Resolución de Problemas, organizar actividades, utilizar la conversación heurística para tal confrontación ya que de este modo se estará estimulando y desarrollar el trabajo independiente en el estudiante.

Al estar propiciando el trabajo independiente en el estudiante se desarrollarán capacidades y habilidades en el estudiante y así, en el Cálculo Integral como en otros cursos aumentarán las posibilidades de resolver problemas.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1998). Registros de representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. Investigaciones en *Matemática Educativa II*. Université Louis Pasteur de Strsbourg, Frace Ed. Hitt F.. Editorial Iberoamericana, pp. 173-201.

Fridman, Lev, M. (1995). Metodología para Resolver Problemas de Matemáticas. *Didáctica*. Grupo Editorial Iberoamérica.. México, D.F.

Guzmán, M. De. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos. *Para la Educación la Ciencia y la Tecnología*. http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm#B. p. 6-13.

García, Q., L. (1999). *Propuesta Didáctica. Tratamiento Metodológico para el Tema de Función en F.I.M.E.* San Nicolás de los Garza, N.L.

Guzmán, I y Consigliere, L. (1992). Algunas dificultades de aprendizaje detectadas en alumnos de Cálculo Diferencial. Instituto de Matemáticas Universidad Católica de Valparaíso. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 4. No. 1. Abril 1992. Grupo Editorial Iberoamérica. p. 54-63.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. (Soporte Electrónico) http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm. IV Simposio SEIEM (Huelva 2000).Universidad de Granada. España.

Santos, L. M. (1996). Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Lecturas Didácticas. Grupo Editorial Iberoamérica. Julio de 1996. México, D.F

Godino, J. M. y Recio, Á. *Un Modelo Semiótico para el Análisis de la Relación entre Pensamiento, Lenguaje y Contexto en Educación Matemática*. (Soporte Electrónico) http://www.sectormatematica.cl/educmatem/semiotico.htm.

Cristóbal, E. C. (1999). Acerca de las Representaciones Semióticas Utilizadas en el Álgebra Lineal. *Memorias del VII simposio internacional en educación matemática*. W., Elfriede. Octubre 1999, cd. De México, p.198.