El polinomio de Lagrange: Un ejemplo de visualización

Felícitas Morales A y Ricardo Cantoral U.
Cinvestav, IPN. México
fmorales@mail.cinvestav.mx

Resumen

Este reporte es el resultado de un doble proceso. Por una parte de un interés surgido en el Seminario de Pensamiento Matemático y por otro de la inquietud por compartir una propuesta didáctica para la enseñanza de un tema en particular. En este enfoque alternativo, el profesor podría dejar de ser el emisor del conocimiento y el estudiante su receptor. Investigaciones recientes de la matemática educativa, ponen en evidencia que el proceso de enseñanza aprendizaje trasciende al mero acto de transmitir un saber. Desde el acercamiento teórico de la *socioepistemología*, consideramos que la visualización aplicada al tratamiento escolar de una noción juega un papel preponderante en la formación de conceptos y procesos matemáticos entre los alumnos. La intención del póster fue la de mostrar un ejemplo concreto de cómo puede enriquecerse un enfoque educativo si se incluye una situación de aprendizaje en la que se haga uso de la visualización del concepto. En este caso, presentamos una situación en la que el estudiante esté en condiciones de llegar, mediante sus propias nociones y de la movilización de habilidades de visualización, a una construcción del *Polinomio de Lagrange* que pasa por N puntos.

Introducción

Según puede extraerse de la literatura especializada, básicamente existen dos formas clásicas de entender la enseñanza de la geometría; una, la geometría vista como la ciencia del espacio y la otra, la geometría entendida como una estructura lógica. Existe sin embargo, un cierto consenso al considerar esas dos visiones relacionadas, pues algunos niveles del desarrollo del pensamiento requieren de la geometría como ciencia del espacio para con base en ellas, desarrollar la visión de la geometría como una estructura lógica. De manera que sí pensamos en la geometría como la ciencia del espacio, podemos ocuparnos de contestar preguntas que nos permitan describir como es que los niños, los jóvenes, los adultos perciben su entorno, o bien saber que códigos usan para descifrar y procesar información visual. Estas preguntas han preocupado a los investigadores de la matemática educativa desde hace algunas décadas.

Estos acercamientos plantearon la necesidad de construir nociones nuevas que dieran cuenta de la forma en que las personas se relacionan con su espacio, y surgen así nociones como la de Visualización y percepción espacial. Ello condujo a explorar la clase de las habilidades visuales que se necesitan para aprender geometría. Más recientemente, también se ha incrementado el interés por estudiar la geometría en ambientes computacionales.

Desde la perspectiva de Piaget, se exploró la concepción del espacio que desarrollan los niños, así como la noción de geometría que se desarrolla entre ellos al describir las actividades representacionales del espacio. Esto fue entendido como la imagen mental del espacio real, en la cual los niños actúan, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria, sino mediante una reconstrucción activa de un objeto en un nivel simbólico. En este sentido las investigaciones estuvieron interesadas en las transformaciones mentales del espacio real en el espacio de representaciones del niño; en aquellos atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y cómo ellos cambian con la edad. De acuerdo con la teoría de Piaget las primeras transformaciones del niño son aquellas que conservan los atributos topológicos de los objetos, tales como interior o exterior de un conjunto, frontera de un conjunto, conexidad o apertura y cerradura de las curvas. Sólo después, según las investigaciones piagetanas, el niño esta capacitado para transferir a su espacio representacional atributos euclidianos, de los objetos, tales como la longitud de las líneas o tamaños de los ángulos. Es ahí donde se representan ideas sobre la conservación de la longitud, el área o el volumen de los objetos geométricos.

Acerca de la visualización

Una cuestión importante, ligada a la percepción espacial que no sólo se reduce a la geometría, trata de la visualización en matemáticas, de la cual se puede decir surge de la necesidad de construir nociones nuevas que dieran cuenta de cómo las personas se relacionan con su espacio, esto condujo a exploraciones de las habilidades visuales necesarias para su aprendizaje. En este sentido es importante resaltar que la visualización se entiende no como el simple acto de "ver"; sino como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar , documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje de quien aprende.

Por otro lado, realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, pero exige también el uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivénciales. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diferentes representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y sobre todo, de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados. (Cantoral y Montiel, 2001)

En este sentido se trata de un proceso mental muy útil para distintas áreas del conocimiento matemático y científico. En matemáticas se utilizan diferentes representaciones que requieren de la visualización; por ejemplo, las propiedades de la inclusión en la teoría de conjuntos; suele hacerse uso de dibujos, en el análisis de las funciones también es usual manejar representaciones visuales para describir propiedades como la paridad $(x)\quad(x)$, la periodicidad $(x)\quad(x\quad k)$, o la traslación de funciones $y\quad(x\quad a), y\quad(x\quad a)$, etc.

Presentamos enseguida un ejemplo en el que se enriquece un enfoque educativo al incluir una situación que atiende a la visualización de un concepto, en ella, el estudiante puede llegar por medio de conceptos sencillos y elementos de visualización a una construcción del polinomio de Lagrange que pasa por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2),, (x_n, y_n).

Desarrollo de la situación

1. Suponemos dos rectas como las que se ilustran a continuación:

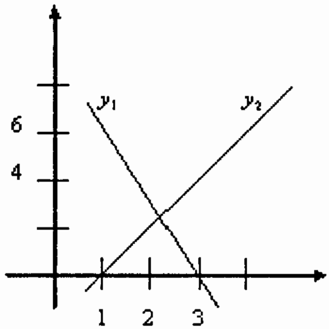

Figura 1

De la gráfica podemos ver que y_1 pasa por los puntos (1, 6) y (3, 0), proponemos entonces que y_1 $k(x$ 3) pero vemos que cuando x 1, y_1 6 Entonces 6 k (1 3) de donde k 3 y por lo tanto y_1 3(x 3). Para el caso de la recta y_2 que pasa por (1, 0) proponemos y_2 k(x 1), pero vemos que cuando x 3, y_2 4 Entonces 4 k (3-1) de donde k 2 y por lo tanto y_2 2(x - 1).

2. ¿Qué pasa si sumamos y_1 con y_2? Veamos:

y_1 y_2 3(x3) 2(x1) Por lo que obtenemos una tercera recta que llamaremos y_3 ó bien y_3 -x *1*. Reflexionando un poco sobre y_3 podemos ver que cuando x 1, y_3 toma el valor de 6 y cuando x 3, y_3 toma el valor de 4; es decir, la recta resultante pasa por los puntos (1, 6) que es el punto superior de y_1 y (3, 4) que es el punto superior de y_2.

3. Queremos teniendo en cuenta la observación del párrafo anterior y siguiendo un procedimiento similar, construir parábolas que pasen por puntos no alineados y fuera del eje x. Es decir, tratar de construir una función que pase por puntos cualquiera: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) donde x_1, x_2, x_3 sean diferentes de cero y diferentes entre sí, con la misma condición para y_1, y_2, y_3. En una gráfica la distribución de puntos se vería así:

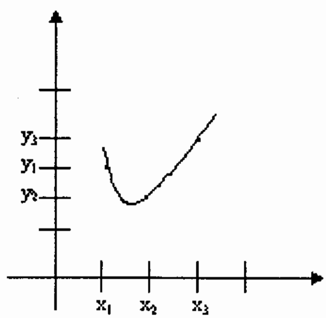

Figura 2

De acuerdo a lo propuesto tendríamos que construir primero parábolas que pasen por dos puntos sobre el eje x y uno fuera. Tendríamos tres casos posibles a analizar:

Caso I

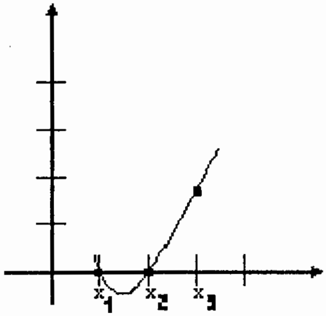

Figura 3

Ya que x_1 y x_2 son raíces de la parábola, proponemos ${}_1(x)\;\; k(x\;\; x_1)(x\;\; x_2)$ donde k tendría que ser tal que satisfaga (x_3, y_3) así: ${}_1(x_3)\;\; k(x_3\;\; x_1)(x_3\;\; x_2)\;\; y_3$. Entonces es fácil ver que:

$$k=\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad \text{Por lo que} \quad f_1=y_3\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Caso II

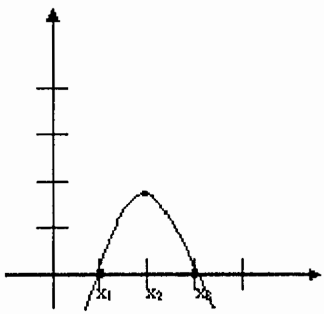

Figura 4

En este caso proponemos ${}_2(x)\;\; k(x\;\; x_1)(x\;\; x_3)$ donde k tendrá que ser tal que se cumpla (x_2, y_2); así ${}_2(x)\;\; k(x_2\;\; x_1)(x_2\;\; x_3)\;\; y_2$. Entonces vemos que:

$$k=\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad \text{Por lo que} \quad f_2=y_2\,\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

Caso III

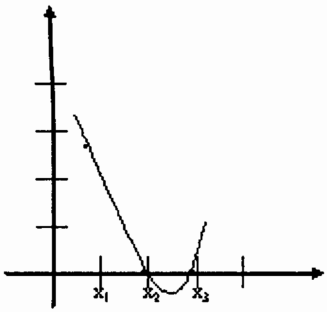

Figura 5

De la misma manera: $_3(x)$ $k(x\ \ x_2)(x\ \ x_3)$ y $_3(x_1)$ y_1 Entonces:

$$k=\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \quad \text{Por lo que} \quad f_3(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

La parábola buscada que pasa por (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) se formará de la suma de las tres anteriores:

$$f(x)=f_3(x)+f_2(x)+f_1(x) \quad \text{O bien:}$$

$$f(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Siguiendo esta idea podemos generalizar el método para expresiones de mayor grado, de tal forma que podamos llegar a una generalización y construir el polinomio deseado, usando los resultados que ya obtuvimos. De esta forma podemos construir por ejemplo el polinomio que pasa por cuatro puntos:

$$f(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}+y_4\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

Expresando la función anterior de una forma más general:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{4} y_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

El patrón de comportamiento de la función buscada queda claro al estudiante y puede ser extendido hasta el polinomio que pasa por N puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2),, (x_n, y_n).

$$P(x) = \sum_{i=l}^{n} y_i \prod_{\substack{j=l \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

El cual es conocido como el polinomio de interpolación de Lagrange.

A modo de conclusión

El estudio de las gráficas y sus propiedades no siempre fue como hoy lo conocemos, en la antigüedad se estudiaban sólo aquellas gráficas de las que se tenia conocimiento mediante medios geométricos o físicos (tales como las cónicas y las curvas mecánicas); sin embargo, no estaban relacionadas en ese entonces con propiedades algebraicas. Cuando surge tal relación entre la geometría y el álgebra aparece lo que se denomina Geometría Analítica, siguiendo este proceso más tarde se intenta estudiar la geometría con el cálculo surgiendo así la geometría diferencial.

Sin embargo a partir de la relación que se establece entre funciones y figuras geométricas, se empieza a desarrollar entre los matemáticos preguntas: ¿Dada una función es posible asignarle una gráfica? ¿Cuál? O bien ¿existen gráficas que pasan por cualquier punto del plano?; de estos cuestionamientos, surge primero la pregunta: ¿Dados tres puntos no colineales en el plano es posible hacer pasar la gráfica de una polinomial?

Surgieron entonces diferentes soluciones a tales preguntas, personajes como Newton, Lagrange y Taylor dieron cuenta de ello a lo largo de su obra. La solución que diera Lagrange hoy lleva su nombre y sigue gozando de notable reputación al nivel de las aplicaciones de la matemática. Una inquietud naciente al interior de la comunidad de matemática educativa es la de investigar cómo es que las soluciones dadas al mismo problema por Newton y Taylor están efectivamente relacionadas entres sí.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones visualización y pensamiento matemático,* México, Prentice Hall.

Cantoral, R. y Farfán, R. et. al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Editorial trillas.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral R. (2001), Notas de clase, *Seminario del pensamiento matemático*; México, Departamento de Matemática Educativa, , Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.