

# ¿Qué aporta la didáctica de la matemática a la formación inicial de los matemáticos?

*Bernardo Gómez Alfonso*

Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Valencia. España

[b.gomez@uv.es](mailto:b.gomez@uv.es)

## Resumen

Recientemente se ha puesto en evidencia la necesidad de integrar asignaturas de Didáctica de las Matemáticas en los Planes de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas, el problema que esto plantea es cómo llenar de contenido estas asignaturas. El reto es acertar con un perfil que, recogiendo las aportaciones de la investigación afin, sea apropiado y aceptado por la Comunidad de los Matemáticos, por los profesores de las Facultades de Matemáticas y por los mismos estudiantes de Matemáticas. Para enfrentar este reto adelanto a continuación algunas ideas.

## La didáctica de la matemática y su ámbito de actuación

Por un lado la Didáctica de las Matemáticas atiende a la construcción de modelos teóricos para explicar los distintos aspectos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el marco de los sistemas educativos. Como tal es una disciplina científica que pretende ser reconocida por sus **aportaciones en un ámbito de estudio propio**, aunque para lograrlo tiene que hacer frente a dificultades que proceden de un clima de opinión reticente por parte de la Comunidad afin, la de los matemáticos, más consolidada, prestigiosa y avanzada.

Por otro lado, la Didáctica de las Matemáticas atiende al desarrollo y concreción de conocimientos aplicados y comprometidos con la práctica educativa. Como tal es una disciplina profesional cuyo ámbito de actuación es la formación de docentes, en particular en su formación inicial y, en este terreno, también tiene que hacer frente a dificultades de otra índole, las que proceden de las prácticas y creencias de los estudiantes para futuros profesores de matemáticas.

## El modelo de formación de profesores de matemáticas

Se puede decir que la formación de profesores de matemáticas tiene su origen en las reformas educativas del siglo XIX que es cuando se universaliza el sistema general y público de enseñanza. Este fenómeno planteó la necesidad de formar a una gran cantidad de profesionales de la enseñanza para atender las demandas del nuevo sistema, lo que dio lugar a la creación de las instituciones que se conocerían como Escuelas Normales. Es en las Normales, encargadas de la formación inicial de los profesores, donde aparecen las asignaturas denominadas de *Metodología*, que posteriormente se llamarán de *Didáctica*. En España y en muchos otros países las Normales quedaron inicialmente fuera del sistema universitario y sólo atendieron a la formación de los docentes de Educación Primaria, denominados Maestros. La docencia en Secundaria y otros niveles superiores quedó reservada a los licenciados universitarios, quienes en su ámbito de actuación son denominados profesores.

# ¿Qué aporta la didáctica de la matemática a la formación inicial de los matemáticos?

Bernardo Gómez Alfonso

Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Valencia. España

[b.gomez@uv.es](mailto:b.gomez@uv.es)

## Resumen

Recientemente se ha puesto en evidencia la necesidad de integrar asignaturas de Didáctica de las Matemáticas en los Planes de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas, el problema que esto plantea es cómo llenar de contenido estas asignaturas. El reto es acertar con un perfil que, recogiendo las aportaciones de la investigación afín, sea apropiado y aceptado por la Comunidad de los Matemáticos, por los profesores de las Facultades de Matemáticas y por los mismos estudiantes de Matemáticas. Para enfrentar este reto adelanto a continuación algunas ideas.

## La didáctica de la matemática y su ámbito de actuación

Por un lado la Didáctica de las Matemáticas atiende a la construcción de modelos teóricos para explicar los distintos aspectos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el marco de los sistemas educativos. Como tal es una disciplina científica que pretende ser reconocida por sus aportaciones en un ámbito de estudio propio, aunque para lograrlo tiene que hacer frente a dificultades que proceden de un clima de opinión reticente por parte de la Comunidad afín, la de los matemáticos, más consolidada, prestigiosa y avanzada.

Por otro lado, la Didáctica de las Matemáticas atiende al desarrollo y concreción de conocimientos aplicados y comprometidos con la práctica educativa. Como tal es una disciplina profesional cuyo ámbito de actuación es la formación de docentes, en particular en su formación inicial y, en este terreno, también tiene que hacer frente a dificultades de otra índole, las que proceden de las prácticas y creencias de los estudiantes para futuros profesores de matemáticas.

## El modelo de formación de profesores de matemáticas

Se puede decir que la formación de profesores de matemáticas tiene su origen en las reformas educativas del siglo XIX que es cuando se universaliza el sistema general y público de enseñanza. Este fenómeno planteó la necesidad de formar a una gran cantidad de profesionales de la enseñanza para atender las demandas del nuevo sistema, lo que dio lugar a la creación de las instituciones que se conocerían como Escuelas Normales. Es en las Normales, encargadas de la formación inicial de los profesores, donde aparecen las asignaturas denominadas de *Metodología*, que posteriormente se llamarán de *Didáctica*. En España y en muchos otros países las Normales quedaron inicialmente fuera del sistema universitario y sólo atendieron a la formación de los docentes de Educación Primaria, denominados Maestros. La docencia en Secundaria y otros niveles superiores quedó reservada a los licenciados universitarios, quienes en su ámbito de actuación son denominados profesores.

## La ideología que sustenta el modelo tradicional de formación de profesores de secundaria

Los licenciados universitarios se forman únicamente en los contenidos propios de su disciplina y no reciben formación didáctica a lo largo de su carrera. Para paliar esta deficiencia, en España, los licenciados que quieran acceder a un puesto en la enseñanza oficial deben realizar un curso de especialización didáctica, una vez finalizada la carrera. Este curso denominado CAP, ha venido conjugando dos ideologías:

1. Una, que considera que para enseñar es suficiente con el dominio de la disciplina.
2. Otra, que percibe la didáctica como un arte y como tal el profesor se forma dentro de su propia práctica, o guiado por los prácticos.

Desde el primer punto de vista se señala que lo importante es la formación científica y, por tanto, se reniega de lo didáctico bajo la idea de que es una falsa ciencia, un discurso ideológico que desea imponerse en detrimento del conocimiento disciplinar. En consecuencia, se considera que para cursar la *especialización didáctica* se debe esperar a que los estudiantes terminen su carrera, con el fin de tener garantías de que ya se saben lo importante; esto es, las matemáticas.

Desde el segundo punto de vista se entiende que la Didáctica se debe centrar en la instrucción y en la práctica; es decir, en los problemas de selección, secuenciación, temporalización, metodología de los contenidos curriculares, y gestión de la clase. En consecuencia, se considera que los responsables del *curso de especialización didáctica* deben ser los profesores de Secundaria en ejercicio, miembros experimentados de las mismas instituciones que finalmente son las que van a recibir a los futuros profesores cuando estos terminen sus estudios. ¡No los especialistas en Didáctica!

### El punto de vista de la didáctica de las matemáticas en relación con el modelo tradicional

Desde la comunidad de profesionales de la Didáctica de las Matemáticas se cuestionan estas dos ideologías. Por una parte, frente a la renuncia a lo didáctico que se sigue de la primera ideología, se señala que son los matemáticos los que han de responsabilizarse de lo que se hace en su nombre y que, por lo tanto, que los matemáticos deberían pensar en la formación en Didáctica de las Matemáticas como algo propio. Por otra parte, frente al centramiento en la instrucción que se sigue de la segunda ideología se señalan carencias, ya que se afirma que cuando sólo se mira la instrucción y gestión de la clase no se discute el contenido, no se tiene en cuenta el aprendizaje y no se pone en duda el conocimiento del profesor. En otras palabras, se ignora que hay otros objetos de estudio y reflexión que amplían el ámbito de actuación de la disciplina, entre los que cabe citar el conocimiento del funcionamiento de los alumnos o del profesor, el diseño e innovación curricular, o la evaluación.

### Un nuevo modelo de formación de profesores de secundaria

Como consecuencia de estos planteamientos desde la Didáctica de las Matemáticas se ha defendido un nuevo modelo de formación de profesores de matemáticas para los niveles Secundario y Bachillerato. Este nuevo modelo reivindica la necesidad de que los Planes de Estudio de Matemáticas integren asignaturas de Didáctica de las Matemáticas y, para ello, se argumenta con tres tipos de razones principales:

- Razones de índole social, ya que la Didáctica de las Matemáticas puede hacer aportaciones en otros ámbitos de actuación tales como, por ejemplo, la difusión y mantenimiento social o el proselitismo de la disciplina.
- Razones de índole académico, ya que la Didáctica de las Matemáticas es un dominio de conocimientos que amplía el ámbito de estudio de los matemáticos, ámbito que a estos incumbe y que no pueden dejar en manos de otros profesionales, con las consecuencias que esto acarrearía.
- Razones de índole profesional, ya que la Didáctica de las Matemáticas es una disciplina que implica como salida profesional muchos estudiantes de matemáticas.

## El panorama actual

En el panorama actual español se ha conseguido integrar en los planes de estudio de las licenciaturas de Matemáticas asignaturas de Didáctica de las Matemáticas, aunque con carácter optativo. Se implica así a nuestra comunidad profesional de una manera directa en los estudios del segundo ciclo universitarios. Esto no ha sido un logro gratuito sino que se debe a un cambio en el clima de opinión académico motivado por:

- Los retos del nuevo modelo educativo implantado en España y que eleva la Educación obligatoria hasta los 16 años. Retos que no sólo afectan a los contenidos, objetivos, metodología y criterios de evaluación, sino también al papel del profesor.
- La institucionalización de la Didáctica de la Matemática como Área de Conocimiento en la Universidad española, que ha permitido su consolidación académica.
- El gran incremento en investigación y desarrollo de la Didáctica de la Matemática y el reconocimiento creciente de su importancia.
- La existencia de una numerosa comunidad profesional de didactas de las matemáticas.

## Reticencias

No obstante todavía existen resquicios de clima de opinión reticente basado en la desconfianza acerca de lo que “lo didáctico” puede aportar en la formación de los matemáticos. Opinión que, dejando de lado argumentos basados en prejuicios o corporativismos, encuentra justificación en dos ideas: una es que una reflexión didáctica no puede adquirir significado con jóvenes sin experiencia y que, por tanto, debe reservarse para la formación permanente; la otra es el temor a que la formación didáctica se haga en detrimento de la formación matemática de los estudiantes.

## Dificultades

Este clima de opinión reticente se ve reforzado por las dificultades específicas que hay que vencer en el trabajo diario con los estudiantes de matemáticas. Dificultades que tienen que ver con sus creencias, con sus hábitos y con las expectativas que despierta la Didáctica.

Los estudiantes creen que la materia puede ser dominada si trabajan en ella y si han tenido éxito es porque han trabajado duro (Schoenfeld, 1989 p. 66). Además, “la mayoría de los (estudiantes) que tienen éxito nunca ponen en duda su conocimiento matemático o las matemáticas que han aprendido: después de todo, no hace ninguna falta si tienen éxito” Sin embargo, “la situación es bastante diferente para la mayoría de los jóvenes que no tienen

éxito. Siguen creyendo que las matemáticas son importantes, pero también que son difíciles –imposibles para muchos –, misteriosas, sin sentido y aburridas. No tratan de nada y provocan sentimientos de opresión y de estar bajo el dominio de alguien, no se sabe quién. No es probable que estas personas pongan en duda las matemáticas mismas, pero seguramente pondrán en duda, criticarán y vilipendiarán la llamada educación matemática que han recibido. Culpan a los enseñantes de no haberlos comprendido nunca, culpan al currículo de matemáticas por todos sus ejercicios irrelevantes y soporíferos y, naturalmente, culpan al sistema educativo por haberlos engañado. El sistema les hizo creer que el estudio de las matemáticas era, y es, importante, y el sistema les ha fallado. El sistema creó la necesidad pero ha sido incapaz de satisfacerla” (Bishop, 1991, p. 18 y 19).

En cuanto a los hábitos de los estudiantes para futuros profesores, éstos tienden a emular las metodologías de sus antiguos maestros sin cuestionar su idoneidad. A falta de otra experiencia, tienden a organizarse de acuerdo con sus últimas vivencias, lo que trasladan a la Escuela hasta que al darse de bruces con la realidad comienzan a generar sentimientos negativos por la falta de éxito esperado.

Finalmente, las expectativas que despierta la didáctica en los estudiantes suelen ser frustrantes, tanto por la complejidad de las nociones didácticas, su lenta comprensión y su vinculación a la experiencia de su puesta en práctica, como por las contradicciones de la ideología dominante que presupone la existencia de una relación de transferencia simple de la enseñanza al aprendizaje (Laborde, 1992, p. 167). De aquí que, al comienzo, la visión didáctica sea desestabilizadora y decepcionante y, como no parece dar respuestas a los problemas, favorece más la crítica de la enseñanza tradicional que la oferta de soluciones inmediatas.

## Respuestas

Dado este panorama tan complejo es claro que hay que reaccionar en un sentido que tenga en cuenta que a los estudiantes de matemáticas como futuros profesores se les va a exigir conocer las matemáticas de una manera diferente a las otras personas implicadas exclusivamente en la cultura matemática formal. No como un producto acabado, sino como un producto en elaboración, que se plantea desde una perspectiva cultural, comprometida con la educación de los ciudadanos, con sus procesos de enseñanza-aprendizaje, con su comportamiento y sus sentimientos. Un conocimiento de Matemáticas diferente del que necesita de las aplicaciones de las Matemáticas (un estadístico, un ingeniero o un físico). Por lo tanto, es necesario producir cambios en la forma en que están viviendo su formación los estudiantes de matemáticas, y para esto es necesario el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas en los planes de estudio de las licenciaturas de Matemáticas. En otras palabras, es necesario introducir en ellos asignaturas de Didáctica de las matemáticas.

### Componentes de las asignaturas “Didáctica de la matemática

Para articular las asignaturas de “Didáctica de las matemáticas”, en el sentido señalado en el epígrafe anterior, las componentes que se pueden abordar y cuyo desarrollo darán forma concreta al trabajo en el salón de clase podrían ser las siguientes:

#### *Una componente cognitiva*

Para mostrar la complejidad de las relaciones de enseñanza-aprendizaje que se manifiestan en la subjetividad y en la insuficiencia de la práctica de la enseñanza.

La subjetividad, que se deriva del hecho de que los procesos de toma de decisión del profesor se ven influidos por múltiples factores, por ejemplo, el impacto de sus creencias, su pensamiento, su conocimiento y experiencia previa mientras aprendió matemáticas; o el conocimiento acerca de cómo piensan y resuelven tareas los aprendices.

Y la insuficiencia de la enseñanza que se deriva de que siendo el aprendiz un constructor activo de su propio conocimiento las presentaciones claras no son suficientes, por lo que éste con ideas correctas puede adquirir conocimientos locales, parciales, vagos, incoherentes o erróneos. Los profesores construyen este tipo de conocimientos que son resistentes, difíciles de erradicar y los llevan a sus clases produciendo como una bola de nieve.

### *Una componente de enseñanza*

Para revelar la relatividad del curriculum, la metodología y la evaluación que se manifiesta en una obra inacabada que es el resultado de decisiones de grupos dominantes, que evoluciona y obedece a leyes que rigen su desarrollo interno, y que está conformada con elementos que no son incuestionables.

### *Una componente formal.*

No para mostrar los contenidos de la materia que los alumnos cuando sean profesores tendrán que enseñar a sus alumnos; contenidos cuyo conocimiento se les supone por haberlos cursado en otras disciplinas matemáticas, sino porque es preciso saber cuáles son, en qué sentido están concebidos, y como son objeto de un proceso de *elementarización*.

### *Una componente histórico-epistemológica.*

Para mostrar el proceso constructivo del conocimiento matemático en sus dimensiones cognitiva, pedagógica y epistemológica que se manifiesta en su progreso evolutivo y, no tratando de introducir la historia como un pasatiempo, presentando anécdotas del pasado, biografías o descripciones de hechos ordenados cronológicamente.

La dimensión cognitiva, para aprovechar paralelismos entre las concepciones y dificultades en la historia de las ideas matemáticas y en los estudiantes de hoy cuando están tratando de ser competentes en las matemáticas de la enseñanza. La dimensión epistemológica, para señalar los cambios en las concepciones hasta llegar al concepto en su formulación actual, así como los avances, retrocesos y controversias en la aceptación de esos cambios y, los errores, contradicciones e incoherencias de los matemáticos del pasado, sus explicaciones y sus justificaciones en relación también con esos cambios. Y la dimensión pedagógica, para mostrar el orden en la presentación de las ideas matemáticas, su razón de ser y como se organizan y relacionan, en los libros de texto.

## **Ejemplos ilustrativos de estas componentes**

### *Componente cognitiva*

La insuficiencia de la enseñanza se puede poner de relieve de muchas maneras, en particular, enfrentando a los estudiantes con su propio proceso de enseñanza-aprendizaje en relación con sus concepciones, el sentido de sus conocimientos, sus limitaciones, etc. Para ilustrar esta idea son muchos los ejemplos que podemos utilizar, uno de ellos es el caso de los decimales y los porcentajes.

Planteamos a los estudiantes que discutan acerca de las siguientes afirmaciones:

- 1,23 y 1,230 representan números diferentes
- No hay ningún decimal entre 3,25 y 3,26,
- El número siguiente de  $3'25$  es  $3'26$ ;
- $3,9 < 3,12$  porque  $9 > 12$ ,
- $0,1^2 = 0,1$  porque  $1 \times 1 = 1$
- No es posible tomar del 200% de una cantidad ya que el 100 %, ya que de esa cantidad es el todo. Sin embargo si es posible una ganancia del 200%
- Si la gasolina sube un 20%, y después baja un 20%, el precio no ha variado
- Un comercio puede anunciar que hace el 100% de descuento y sin embargo no regalar los productos, solo tiene que vender a 50 lo que antes vendía a 100.

### Componente histórico-epistemológica.

Para hacer emerger las concepciones y dificultades de los estudiantes del presente planteamos preguntas en relación con las concepciones de los matemáticos del pasado. Para ilustrar esta idea también son muchos y variados los ejemplos que podemos utilizar, uno de ellos es el caso de los negativos.

Recordemos que los negativos obligaron a plantear la necesidad de una nueva ordenación de los números. Al querer conservar el orden numérico, por necesidad de la operatoria, hubo que aceptar que cualquier cantidad negativa tenía que ser menor que cualquier cantidad positiva.

$$2 < 7 \quad 2-3 < 7-3 \quad -1 < 4$$

Y, de aquí, que las cantidades negativas tenían que ser cantidades menores que cero.

$$-2 < 1 \quad -2-1 < 1-1 = 0$$

Esto dio lugar a acaloradas discusiones y a razonamientos absurdos.

- Si las cantidades negativas son menores que las positivas se tiene que:  $-3 < 2$ , mientras que  $(-3)^2 > 2^2$  de donde entre dos cantidades desiguales el cuadrado de la más pequeña es mayor que el cuadrado de la más grande (Carnot, 1753-1823) y esto es absurdo.

Otro caso paradigmático es el de los complejos:

- $(-1) = (1) \quad (-1)^2 = (1)^2 \quad \log(-1)^2 = \log(1)^2$ , de donde aplicando las reglas para operar con logaritmos se tiene que  $2\log(-1) = 2\log(1) \quad \log(1) = \log(-1)$ . Igualdad que introduce el logaritmo de un número negativo, en contra de la definición escolar que afirma que no existen los logaritmos de los números negativos, dado que el logaritmo es un exponente. Pero es que, además, de  $\log(1) = \log(-1)$  se sigue, usando la cancelación que usamos con frecuencia para resolver las ecuaciones logarítmicas, que  $1 = -1$  y esto es difícilmente aceptable.
- Por otra parte, de la definición de  $i = -1$  se tiene que  $i^2 = -1-1$  y por las reglas para

operar radicales se tiene que  $-1-1=(-1)(-1)=1\neq 1$  de donde  $i^2=\pm 1$ . Pero por la definición de raíz cuadrada se tiene que:  $i^2 = (-1)^2 = -1$  y esto es absurdo.

Otro ejemplo de controversia epistemológica esta relacionado con la dificultad para entender la convergencia / divergencia de series.

- Autores como Bernouilli, Leibnitz o Euler, obtuvieron que la serie  $1-1+1-1\dots+(-1)^{n-1}$  era sumable y de suma  $1/2$ . Bernouilli, denotando la suma por  $S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$ , y reordenándola obtuvo que  $S = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\dots$ , e igualando, obtuvo que  $1-S = S$ , de donde  $S = 1/2$ . Mientras que Euler, tomando la serie geométrica  $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+\dots$ , obtuvo para  $x = -1$ , que  $1-1+1-1+\dots = 1/2$ . Sin embargo, escribiendo la serie en la forma  $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$ , se obtiene que la suma debería ser  $0$ . Igualmente, escribiendo la serie como  $1-(1-1)-(1-1)-(1-1)+\dots$ , se obtiene que la suma debería ser  $1$ . ¿Qué se puede decir de esto?

## Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. México. Ed. Iberoamericana. 7-23
- Laborde, C. (1992). *Audacia y razón de las investigaciones francesas en didáctica de las matemáticas*. Proceedings (1989). PME 13. 46 – 61. Versión en inglés: “Audacity and Reason: French Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics* 9(1989) 31-36. Versión en español de Rodrigo Cambray Núñez. En R. Cambray; E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.): *Antología en Educación matemática. Educación matemática 1*. Grupo de estudios sobre enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV. México, D. F.
- Bishop. A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Temas de educación*. Barcelona: Paidós. 1991
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza. 1972.
- Gómez, B. (2002). Aportaciones del área a la formación inicial de los matemáticos. La visión de un profesor de Didáctica de las Matemáticas. En M. Carmen Penalva, Germán Torregrosa y Julia Valls. *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*. Universidad de Alicante.
- Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 338-355. Versión en español de A. Sánchez. En R. Cambray; E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.): *Antología en Educación matemática. Educación matemática 1*. Grupo de estudios sobre enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. S. Matemática Educativa. CINVESTAV. México, D. F.